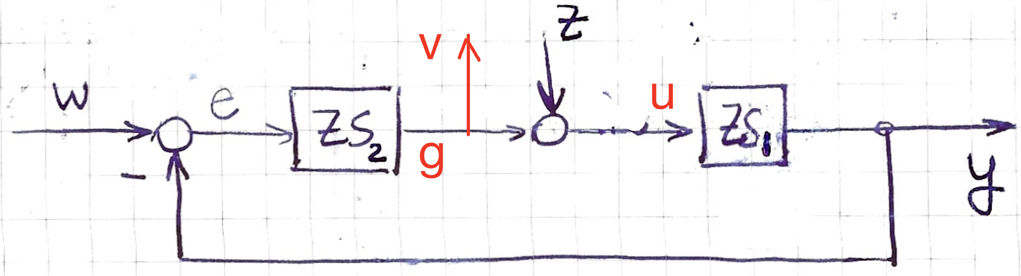
10. Übung,

Victor Chuidde Chaim

10.1 Aufgabe:

$A_1 = 1$, $B_1 = 1$

$C_1 = 1$, $D_1 = 0$



i) P-Regler: CLCP Nullstelle -2.

$CLCP = N_1 N_2 + Z_1 Z_2$, $\quad H_1(s) = C_1 (s\,id - A_1)^{-1} B_1 + D_1$

$H_1 = 1(s-1)^{-1} 1 = \frac{1}{(s-1)}$; $\quad N_1 = (s-1)$, $Z_1 = 1$

$H_2(s) = k_p$ (P-Regler), $N_2 = 1$, $Z_2 = k_p$

$CLCP = 1(s-1) + 1 \cdot k_p = s - 1 + k_p$

Nullstelle -2: $\quad s - 1 + k_p = s + 2 \Rightarrow k_p - 1 = 2$, $\boxed{k_p = 3}$

ii) I-Anteil, CLCP $p_1 = p_2 = p$ (neg. reelle)

PI-Regler $\Rightarrow H_2(s) = k_p + \frac{k_I}{s} = \frac{k_p \cdot s + k_I}{s} = \frac{\overbrace{3 \cdot s + k_I}^{= Z_2}}{\underbrace{s}_{= N_2}}$

CLCP: $(s-1) \cdot s + (3s + k_I) \cdot 1 = s^2 - s + 3s + k_I$

$s^2 + 2s + k_I \Rightarrow$ Nullstelle (NS): $p = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4k_I}}{2}$

Bedingung: $p_1 = p_2 \longrightarrow 4 - 4k_I = 0 \rightarrow \boxed{k_I = 1}$

$p_1 = p_2 = -\frac{2}{2} = -1$, BIBO-stabil!

iii) $CLCP = s^2 + 2s + 1 \Rightarrow NS: -1$, BIBO-Stabil, da $Re(p_1, p_2) < 0$.

Stationäre Genauigkeit: $SÜF(0) = 0$, $FÜF(0) = 1$

$FÜF(s) = \frac{Z_1 Z_2}{CLCP} = \frac{3s + 1}{s^2 + 2s + 1}$, $\quad FÜF(0) = 1$

$SÜF(s) = \frac{Z_1 N_2}{CLCP} = \frac{s}{s^2 + 2s + 1}$, $\quad SÜF(0) = 0$

} stationäre Genauigkeit erfüllt.

iv) Anstiegszeit: t_r für 90% $w(\infty)$

$$\psi(t,0,w+\cancel{z}) = \psi(t,0,w) = \psi(t,0,v) = (g_F * v)(t)$$
$z = 0$ (Annahme)

Impulsantwort: $g_F(t) = C_F \exp(A_F t) \cdot B_F\, v(t) + D_F \delta(t)$

$$FÜF(s) = \frac{3s+1}{s^2+2s+1}$$, Regelungsnormalform: $A_F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

$B_F = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C_F = [1 \;\; 3]$, $D_F = 0$

$$g_F(t) = [1 \;\; 3] \exp(A_F t) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t)$$

$\exp(A_F t) \Rightarrow A_F \rightarrow \lambda_{1,2} = -1$, EW-Verschiebung

$$A_F = (A_F - \lambda id) + \lambda id, \quad (A_F - \lambda id) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \text{ EW} = 0$$

$$(A_F - \lambda id)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$, nilpotent $A^a = 0$, $a \geq 2$

$$\exp((A_F - \lambda id)t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A_F - \lambda id)^n t^n}{n!} = id + (A_F - \lambda id)t$$ //

$$\exp(\lambda id\, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda id)^n t^n}{n!} = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n t^n}{n!} & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n t^n}{n!} \end{bmatrix} = e^{\lambda t} \cdot id$$

$$\exp(A_F t) = \exp(\lambda id\, t) \cdot \exp((A_F - \lambda id)t) =$$

$$\exp(A_F t) \overset{\lambda=-1}{=} e^{-t} \cancel{id} (id + (A_F + id)t) = \begin{bmatrix} e^{-t} + e^{-t} t & e^{-t} t \\ -t e^{-t} & e^{-t} + e^{-t}(-t) \end{bmatrix}$$

$$g_F(t) = [1 \;\; 3] \begin{bmatrix} \vdots & e^{-t} t \\ \vdots & e^{-t}(1-t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t) = [1 \;\; 3] \begin{bmatrix} e^{-t} t \\ e^{-t}(1-t) \end{bmatrix}$$

$$g_F(t) = e^{-t} t + 3e^{-t}(1-t) = 3e^{-t} - 2e^{-t} t$$ //

$$\psi(t,0,v) = (g_F * v)(t) = v(t) \int_0^t (3e^{-\tau} - 2e^{-\tau}\tau)\, d\tau$$

$$\psi(t,0,v) = v(t) \left(3\int_0^t e^{-\tau} d\tau - 2\int_0^t e^{-\tau}\tau\, d\tau \right)$$

$$\int_0^t e^{-\tau}\tau\, d\tau \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u=\tau \\ dv = e^{-\tau}d\tau \end{array} \;\middle|\; \begin{array}{l} du = d\tau \\ v = -e^{-\tau}\end{array}\right\} \Rightarrow \int u\,dv = uv + \int v\,du$$

$$\int_0^t e^{-\tau}\tau\, d\tau = \left(-\tau e^{-\tau} + \int e^{-\tau} d\tau\right)\Big|_0^t = -te^{-t} - (e^{-\tau})\Big|_0^t = 1 - e^{-t} - te^{-t}$$

$$\psi(t,0,v) = v(t)\left(3\cdot(1-e^{t}) - 2(1-e^{-t}-te^{-t})\right)$$

$$\psi(t,0,v) = v(t)\left(1 - e^{-t} + 2e^{-t}\cdot t\right) \;//$$

Anstiegszeit tr : $\psi(tr,0,v) = 0{,}9\, \overset{v(\infty)}{w(\infty)} = 0{,}9$

$$\psi(tr,0,v) \overset{tr>0}{=} 1 - e^{-tr} + 2e^{-tr}\cdot tr\,, \quad e^{-tr} \cong (1-tr)$$

$$\psi(tr,0,v) \cong 1 - (1-tr) + 2tr(1-tr) = 0{,}9$$

$$tr + 2tr - 2tr^2 = 0{,}9 \rightarrow 2tr^2 - 3tr + 0{,}9 = 0$$

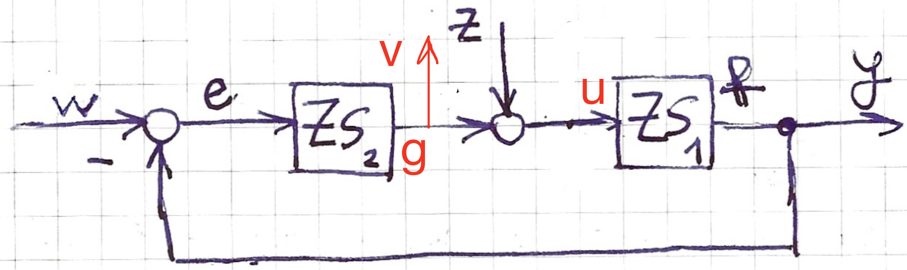
$$tr = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8\cdot 0{,}9}}{4} \rightarrow \begin{array}{l} \boxed{tr_1 \cong 0{,}4} \\ tr_2 \cong 1{,}08 \end{array} \quad tr_1 < tr_2$$

Anstiegszeit $tr \cong 0{,}4$ sek für $\psi(tr,0,v) \cong 0{,}9$ //

10.2 Aufgabe:

$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -6 \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$C_1 = [8\ \ -3]$, $D_1 = 0$



i) PID-Regler: Methode des Stabilitätsrandes

$$H_1(s) = C_1 (s\,id - A_1)^{-1}\cdot B_1 + \cancel{D_1}^{\,0}$$

$$(s\,id - A_1)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 9 & s+6 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s(s+6)+9}\begin{bmatrix} s+6 & 1 \\ -9 & s \end{bmatrix}$$

$$H_1(s) = \frac{1}{s^2+6s+9}[8\ \ -3]\begin{bmatrix} s+6 & 1 \\ -9 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2+6s+9}[8\ \ -3]\begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix}$$

$$H_1(s) = \frac{8-3s}{s^2+6s+9} \;// \rightarrow$$ BIBO stabil // : Hurwitz-Kriterium

$\underline{a_2 = 1,\ a_1 = 6,\ a_0 = 9}$, 2. Ordnung Polynom

gleich Vorzeichen

P- Regler (K_{krit}) $\stackrel{=H_2(s)}{}$: Dauerschwingungen

CLCP : $Z_1 Z_2 + N_1 N_2 = k_{krit}(8-3s) + s^2+6s+9$

$$CLCP = s^2 + s(-3k_{krit}+6) + 9 + 8\,k_{krit}$$

$$p = \frac{-(6-3k_{krit}) \pm \sqrt{(6-3k_{krit})^2 - (9+8k_{krit}).4}}{2}$$

Dauerschwingungen $\rightarrow Re(p) = 0 \rightarrow (6 - 3.k_{krit}) = 0$

$6 = 3\,K_{krit} \rightarrow \boxed{K_{krit} = 2}$

$$p = \frac{\pm\sqrt{-4(9+8.2)}}{2} = \pm i\frac{\sqrt{4.25}}{2} = \pm i.5$$

Zwei imaginare Pole : $p_1 = i5$, $p_2 = -i5$

Frequenz der Schwingungen : $p_s = i.w_s$

$w_s = 5\,rad/s$, $W_s = \frac{5}{2\pi}\,Hz \rightarrow W_s \cong 0,8\,Hz$

• $T_{krit} = 1/W_s = 1,26$ Sek

* Parameter des Reglers (seite 1006, Vorlesung 10)

$$K_p = 0,6.\,K_{krit}, \quad T_I = 0,5.\,T_{krit}, \quad T_D = 0,12.\,T_{krit}$$

$K_p = 1,2$, $T_I = 0,63$, $T_D = 0,15$

• $K_I = \frac{K_p}{T_I}$, $K_I \cong 1,9$, • $K_D = K_p.T_D \cong 0,19$

PID - Regler : $H_2(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + \frac{s\,K_D}{1+T_1.s}$

$$H_2(s) = \frac{K_p\,s(1+T_1.s) + K_I(1+T_1s) + s^2 K_D}{s(1+T_1.s)}$$

$$= \frac{s^2(K_D + K_p.T_1) + s(K_I.T_1 + K_p) + K_I}{T_1 s^2 + s}$$

$$= \frac{s^2(0,19 + 1,2T_1) + s(1,9T_1 + 1,2) + 1,9}{T_1 s^2 + s}$$

ii) BIBO-Stabilität und stationäre Genauigkeit:

* BIBO-Stabilität: $CLCP_0 \Rightarrow CLCP$ mit $T_1 = 0$.

$$CLCP_0 \overset{T_1=0}{=} Z_1 Z_2 + N_1 N_2 \overset{T_1=0}{=} (8-3s)(0{,}19s^2 + 1{,}2s + 1{,}9) + s(s^2+6s+9)$$

$$CLCP_0 = s^3(1 - 3\cdot 0{,}19) + s^2(8\cdot 0{,}19 - 1{,}2\cdot 3 + 6) + s(-1{,}9\cdot 3 + 1{,}2\cdot 8 + 9) + 8\cdot 1{,}9.$$

$$CLCP_0 = s^3\cdot 0{,}43 + s^2\cdot 3{,}92 + s\cdot 12{,}9 + 15{,}2$$

Hurwitz-Kriterium:

1. Bedingung: Alle Koeffizienten c_0, c_1, c_2 und c_3 mit demselben Vorzeichen:

$$\mathrm{sgn}(0{,}43) = \mathrm{sgn}(3{,}92) = \mathrm{sgn}(12{,}9) = \mathrm{sgn}(15{,}2) = 1$$

Alle Koeffizienten sind positiv, dann sie dasselben Vorzeichen haben.

2. Bedingung: Hauptabschnittsdeterminante von $H > 0$.

$$H = \begin{bmatrix} c_1 & c_3 & c_5 \\ c_0 & c_2 & c_6 \\ 0 & c_1 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12{,}9 & 0{,}43 & 0 \\ 15{,}2 & 3{,}92 & 0 \\ 0 & 12{,}9 & 0{,}43 \end{bmatrix}$$

$D_1 = 12{,}9 > 0$ ✓

$D_2 = 12{,}9 \cdot 3{,}92 - 15{,}2 \cdot 0{,}43 \triangleq 44 > 0$ ✓

$D_3 = D_2 \cdot (-1)^{3+3} \cdot 0{,}43 \triangleq 18{,}9 > 0$ ✓

$CLCP_0$ ist Hurwitz! $\rightarrow$ Bedingung Theorem 10.3

Theorem 10.3: $k_D \cdot b^1_{n-1} = 0{,}19(-3) = -0{,}57 \neq 1$
$ \hat{=} b_1$
und
$k_I \cdot b^1_0 = 1{,}9 \cdot 8 = 15{,}2 > 0$

für hinreichend kleinen $T_1 > 0$ ist der Regelkreis stabil.

* Stationäre Genauigkeit:

$$CLCP_{T_1} = (8-3s)((0{,}19 + 1{,}2T_1)s^2 + (1{,}2 + 1{,}9\cdot T_1)s + 1{,}9) + (T_1 s + 1)\cdot s \cdot (s^2 + 6s + 9)$$

$$CLCP_{T1} = s^4 T_1 + s^3(1 + T_1 \cdot 6 - (0{,}19 + 1{,}2T_1) \cdot 3) +$$
$$+ s^2(T_1 9 + 6 + 8(0{,}19 + 1{,}2T_1) - 3(1{,}2 + 1{,}9T_1)) +$$
$$+ s(9 - 3 \cdot 1{,}9 + 8(1{,}2 + 1{,}9 \cdot T_1)) + 8 \cdot 1{,}9$$

$$CLCP_{T_1}(0) = 15{,}2$$

$$FÜF(s) = \frac{Z_1 Z_2}{CLCP_{T1}} = \frac{(s^2(0{,}19 + 1{,}2T_1) + s(1{,}9T_1 + 1{,}2) + 1{,}9)(8 - 3s)}{CLCP_{T1}}$$

$$= \frac{-s^3(0{,}19 + 1{,}2T_1) + s^2(8(0{,}19 + 1{,}2T_1) - 3(1{,}9T_1 + 1{,}2)) + s(8(1{,}9T_1 + 1{,}2) - 3 \cdot 1{,}9) + 8 \cdot 1{,}9}{CLCP_{T1}}$$

- $$FÜF(0) = \frac{15{,}2}{CLCP_{T1}(0)} = \frac{15{,}2}{15{,}2} = 1 \checkmark$$

$$SÜF(s) = \frac{Z_1 N_2}{CLCP_{T_1}} = \frac{(8 - 3s)(T_1 s^2 + s)}{CLCP_{T1}} = \frac{-s^3 \cdot 3T_1 + s^2(8T_1 - 3) + s8}{CLCP_{T1}}$$

$$SÜF(0) = \frac{0}{CLCP_{T1}(0)} = \frac{0}{15{,}2} = 0 \checkmark$$