5. Übung zur Vorlesung „Moderne Methoden der Regelungstechnik“

BIBO-Stabilität, Steuerbarkeit

Felix Goßmann M.Sc.

Institut für Steuer- und Regelungstechnik
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Universität der Bundeswehr München

BIBO - Stabilität

- BIBO – *bounded input & bounded output*
- Auf jedes beschränkte Eingangssignal $u(t) \in \mathbb{R}$ folgt beschränktes Ausgangssignal $\psi \in \mathbb{R}$
- Aus Vorlesung ist bekannt:
  - Wenn:

$$\boxed{\lim_{t \to \infty} C \cdot e^{At} \cdot B = 0}$$

  - Dann ist das Zustandssystem BIBO-stabil
- Außerdem gilt: Besitzen alle Eigenwerte von A negative Realteile (asymptotische Stabilität), dann ist das System BIBO-stabil.

Zustandsstabilität

- Beide Kriterien sind gleichwertig, wie im folgenden gezeigt wird.

Aufgabe 1: BIBO-Stabilität

Gegeben ist das folgende Zustandssystem

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$$
$$y = C \cdot x$$

mit den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Aufgabe:</u> Zeigen Sie, dass das gegebene Zustandssystem BIBO-stabil ist.

$$\lim_{t \to \infty} C \cdot \underline{e^{At}} \cdot B = 0$$

Aufgabe 1: BIBO-Stabilität

e^{At} von $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda+4 & 0 & 0 \\ -3 & \lambda+2 & -1 \\ 3 & 0 & \lambda+1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \lambda+4 & 0 \\ -3 & \lambda+2 \\ 3 & 0 \end{matrix}$$

$$= (\lambda+4)(\lambda+2)(\lambda+1)$$

$\lambda_1 = -4$

$\lambda_2 = -2$

$\lambda_3 = -1$

System ist zustandsstabil

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{-4t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = T e^{Jt} T^{-1}$$

Aufgabe 1: BIBO-Stabilität

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$v_1 \qquad v_2 \qquad v_3$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-4t} & 0 & 0 \\ -2e^{-4t} + 3e^{-2t} - e^{-t} & e^{-2t} & -e^{-2t} + e^{-t} \\ e^{-4t} - e^{-t} & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\lim_{t \to \infty} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{C} \cdot e^{At} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B} = \lim_{t \to \infty} \left(-e^{-4t} + e^{-2t}\right) = 0$$

Aufgabe 1: BIBO-Stabilität

$$\lim_{t \to \infty} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T} \underbrace{\begin{pmatrix} e^{-4t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}}_{e^{Jt}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B}$$

Zustandsstabil $\Longrightarrow$ BIBO-Stabilität, wenn $B = C =$ konst.

gilt nicht

Aufgabe 2: Stabilität transformierter Systeme

Gegeben sind die beiden folgenden ähnlichen Zustandssysteme

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$$
$$y = C \cdot x$$

und

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A} \cdot \tilde{x} + \widetilde{B} \cdot u$$
$$y = \tilde{C} \cdot \tilde{x}$$

Wobei $\tilde{x} = T \cdot x$ gilt und die jeweiligen Matrizen den jeweils transformierten Matrizen des Zustandssystems entsprechen.

<u>Aufgabe:</u> Zeigen Sie, dass das Zustandssystem in x genau dann BIBO-stabil ist, wenn das Zustandssystem in $\tilde{x}$ BIBO-stabil ist.

Aufgabe 2: Stabilität transformierter Systeme

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\,\tilde{x} + \tilde{B}u$$

$$y = \tilde{C}\,\tilde{x}$$

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{C}\cdot e^{\tilde{A}t}\,\tilde{B} = 0 \qquad ?$$

$$\boxed{\tilde{x} = T x}$$

$$x = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

$$\lim_{t\to\infty} C\cdot e^{At}\cdot B = 0 \qquad ✓$$

Aufgabe 2: Stabilität transformierter Systeme

$$\tilde{C}\, e^{\tilde{A}t}\, \tilde{B} = \underbrace{CT^{-1}}_{\tilde{C}} \cdot \underbrace{e^{TAT^{-1}t}}_{e^{\tilde{A}t}} \cdot \underbrace{TB}_{\tilde{B}}$$

$$= C\, \underbrace{T^{-1} \cdot T}_{= I}\, e^{At}\, \underbrace{T^{-1} \cdot T}_{= I} \cdot B$$

$$= C \cdot e^{At} \cdot B$$

$\Rightarrow$ Zustandstransformation $\tilde{x} = T \cdot x$ beeinflusst die BIBO Stabilität nicht

Steuerbarkeit eines Zustandssystems

- Ein System ist steuerbar, wenn für alle x_0, x_1 eine Zeit $t \geq 0$ existiert, in der das System mit einem **zulässigen** Eingangssignal $u(t)$ von Zustand x_0 in Zustand x_1 überführt werden kann.

- Zwei verschiedene Kriterien aus Vorlesung bekannt
  - Kalman: Die Steuerbarkeitsmatrix $R(A, B) = \underline{[B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B]}$ besitzt vollen Rang, also $rang(R) = n$ → vollst. steuerbar
  - Hautus: Für alle Eigenwerte λ_i von A besitzt die Matrix $[(\lambda_i I - A), B]$ vollen Rang, also $rang([(\lambda_i I - A), B]) = n$
    ↳ teilweise steuerbar (ggf.)

Aufgabe 3: Steuerbarkeit eines Zustandssystems

Gegeben ist das Zustandssystem $\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$ mit den Matrizen

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe: Zeigen Sie, dass das gegebene Zustandssystem steuerbar ist.

Aufgabe 3: Steuerbarkeit eines Zustandssystems

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Kalman

$$R(A,B) = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right] = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

rang $R(A,B) = 2 = n \longrightarrow$ vollst. Steuerbar

Aufgabe 3: Steuerbarkeit eines Zustandssystems

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \cancel{B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \to 0$$

$$R(A,B) = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3: Steuerbarkeit eines Zustandssystems

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hautus

$$\det(\lambda \underline{I} - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2$$

$$[\lambda_i I - A , B] \overset{\lambda=0}{=} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Rang} = 2 = n$$

$\hookrightarrow$ vollst. steuerbar

Aufgabe 3: Steuerbarkeit eines Zustandssystems

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$R(A,B) = [B, AB, A^{n-1}B]$

<u>Kalman</u>:
- nur absolute Aussage (vollst. steuerbar ja/nein)
- nicht vollst. steuerbar → möglicherweise teilweise steuerbar

$\neq$

<u>Hautus</u>:
- Steuerbarkeit einzelnen EW zuordbar
- Steuerbaren und nicht steuerbaren EW bestimmen