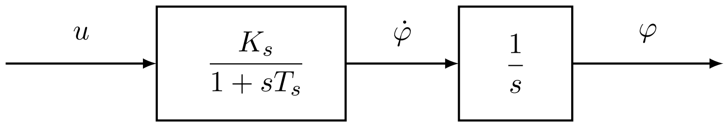
Prof. F. Svaricek
Universität der Bundeswehr München
Institut für Steuer- und Regelungstechnik (LRT-15)

Digitale Regelung

Übung 4 - Lösung

Aufgabe 1. Man betrachte das System gegeben durch das folgende Blockschaltbild ($T_s > 0$, $K_s > 0$) mit den Übertragungsfunktionen $G_1(s) = \frac{K_s}{1+sT_s}$ und $G_2(s) = \frac{1}{s}$.



Dieses kontinuierliche System soll im Rahmen dieser Aufgabe diskretisiert werden.

(i) Man bestimme die z-Übertragungsfunktion $G_1(z)$ und die z-Übertragungsfunktion $G(z)$ des gesamten Systems für die Abtastperiode $T > 0$ unter Verwendung von Tabelle 3.3 im Skript S.27.

(ii) Man gebe die Differenzengleichung des Abtastsystems an.

Lösung Aufgabe 1. (i) Nach Vorlesung gilt

$$
\begin{aligned}
G_1(z) &= \frac{z-1}{z} \cdot \mathcal{Z}\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{G_1(s)}{s}\right)\Big|_{t=kT}\right) \\
&= \frac{z-1}{z} \cdot \mathcal{Z}\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{K_s}{s(1+sT_s)}\right)\Big|_{t=kT}\right) \\
&= K_s \cdot \frac{z-1}{z} \cdot \mathcal{Z}\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1/T_s}{s(1/T_s+s)}\right)\Big|_{t=kT}\right) \\
&\underset{\text{Tab.3.3 (8)}}{=} K_s \cdot \frac{z-1}{z} \cdot \frac{(1-e^{-T/T_s})z}{(z-1)(z-e^{-T/T_s})} \\
&= K_s \cdot \frac{1-e^{-T/T_s}}{z-e^{-T/T_s}}.
\end{aligned}
$$

Die Rechnung für $G(z)$ ist umfangreicher:

$$
\begin{aligned}
G(z) &= \frac{z-1}{z} \cdot \mathcal{Z}\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{G(s)}{s}\right)\Big|_{t=kT}\right) \\
&= \frac{z-1}{z} \cdot \mathcal{Z}\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{K_s}{s^2(1+sT_s)}\right)\Big|_{t=kT}\right). \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Wir führen die folgende Partialbruchzerlegung durch:

$$
\frac{1}{s^2T_s(1/T_s+s)} = \frac{A}{s^2T_s} + \frac{B}{s} + \frac{C}{1/T_s+s}.
$$

Es muss gelten:

$$s \cdot (A+B) = 0, \quad A \cdot 1/T_s = 1, \quad s^2 \cdot T_s \cdot (B+C) = 0.$$

Also folgt $A = C = T_S$, $B = -T_s$. D.h.

$$\frac{1}{s^2 T_s(1/T_s + s)} = T_s \cdot \Big(\frac{1}{s^2 T_s} - \frac{1}{s} + \frac{1}{1/T_s + s} \Big).$$

Wir führen (1) weiter:

$$\begin{aligned} G(z) &= K_s \cdot T_s \cdot \frac{z-1}{z} \cdot \mathcal{Z}\left(\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{s^2 T_s} - \frac{1}{s} + \frac{1}{1/T_s + s} \Big)\Big|_{t=kT} \right) \\ &\underset{\text{Tab.3.3}}{=} K_s \cdot T_s \cdot \frac{z-1}{z} \cdot \Big(\frac{Tz}{T_s(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z - e^{-T/T_s}} \Big) \\ &= K_s T_s \cdot \Big(\frac{T}{T_s(z-1)} - 1 + \frac{z-1}{z - e^{-T/T_s}} \Big). \end{aligned}$$

Wir definieren $z_p = e^{-T/T_s}$. Damit

$$G(z) = K_s \frac{(T - T_s + T_s z_p) z + T_s - z_p(T + T_s)}{(z-1)(z - z_p)}.$$

(ii) Wir schreiben $G_1(z) = \frac{k_1}{z - e^{-T/T_s}}$ mit $k_1 = K_s(1 - e^{-T/T_s})$. Dann gilt

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G_1(z) \;\Rightarrow\; Y(z) - e^{-T/T_s} z^{-1} Y(z) = k_1 z^{-1} U(z).$$

Also folgt mit dem Rechtsverschiebungssatz

$$y_{k+1} = e^{-T/T_s} y_k + k_1 u_k.$$

Wir schreiben $G(z) = \frac{k_2 z + k_3}{z^2 - z(1+z_p) + z_p}$ mit $k_2 = K_s(T - T_s + T_s z_p)$ und $k_3 = K_s(T_s - z_p(T - T_s))$. Dann gilt

$$Y(z) - z^{-1} Y(z)(1 + z_p) + z^{-2} z_p Y(z) = z^{-1} U(z) k_2 + z^{-2} k_3 U(z)$$

und somit

$$y_k - (1 + z_p) y_{k-1} + z_p y_{k-2} = k_2 u_{k-1} + k_3 u_{k-2}.$$

Aufgabe 2. Man zeige im Detail, dass die Pole $p_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, \dots m+n$, $m, n \in \mathbb{N}$ einer Übertragungsfunktion der Form

$$G(s) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{s - p_k} + \sum_{l=1}^{n} \frac{\beta_l s}{s - p_l}, \quad \alpha_k, \beta_l \in \mathbb{C}$$

in der Tat durch die Abbildung $s \mapsto e^{sT}$ zu Polen der z-Übertragungsfunktion werden, d.h. dass $e^{p_k T}$ Pole der z-Übertragungsfunktion der mit Abtastzeit $T > 0$ diskretisierten Strecke sind.

Lösung Aufgabe 2. Ohne Einschränkung seien $\alpha_k \neq 0$, $1 \leq k \leq m$ und wir betrachten nur den Fall $p_k \neq 0$ für alle $1 \leq k \leq m$. Der andere Fall wird analog zum ersten gezeigt. Es gilt für ein Halteglied 0-ter Ordnung

$$\begin{aligned}
G(z) &= \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}(\mathcal{L}^{-1}(\frac{G(s)}{s})\big|_{t=kT}) = \sum_{k=1}^{m}\frac{z-1}{z}\mathcal{Z}(\mathcal{L}^{-1}\frac{\alpha_k}{s(s-p_k)}) + \sum_{l=1}^{n}\frac{z-1}{z}\mathcal{Z}(\mathcal{L}^{-1}\frac{\beta_l}{s-p_l}) = \\
&= \frac{z-1}{z}\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{-\alpha_k}{p_k}\mathcal{Z}(\mathcal{L}^{-1}\frac{-p_k}{s(s+(-p_k))}) + \sum_{l=1}^{n}\beta_l\mathcal{Z}(\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s+(-p_l)})\right) = \\
&= \frac{z-1}{z}\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{-\alpha_k}{p_k}\frac{(1-e^{p_kT})z}{(z-1)(z-e^{p_kT})} + \sum_{l=1}^{n}\beta_l\frac{z}{z-e^{p_lT}}\right) = \\
&= \sum_{k=1}^{m}\frac{-\alpha_k}{p_k}\frac{1-e^{p_kT}}{z-e^{p_kT}} + \sum_{l=1}^{m}\beta_l\frac{z-1}{z-e^{p_lT}}.
\end{aligned}$$

Also sind e^{p_kT} Pole von $G(z)$ für alle $k = 1, \ldots, m+n$.

Aufgabe 3. Man berechne die z-Übertragungsfunktion der folgenden zeitdiskreten Systeme mit $y(k) = 0$ für $k \leq 0$, $u(k) = 0$ für $k < 0$ und $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$.

(i) $y(k) + ay(k-1) = bu(k-2)$

(ii) $y(k+1) + ay(k) + by(k-1) = cu(k) + du(k-1)$

Lösung Aufgabe 3.

(i) Es gilt

$$Y(z) + az^{-1}Y(z) = bz^{-2}U(z) \;\Rightarrow\; \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{bz^{-2}}{1+az^{-1}} = \frac{b}{z^2+az}.$$

(ii) Es gilt

$$Y(z) + az^{-1}Y(z) + bz^{-2}Y(z) = cz^{-1}U(z) + dz^{-2}U(z).$$

Es folgt:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{cz^{-1}+dz^{-2}}{1+az^{-1}+bz^{-2}} = \frac{cz+d}{z^2+az+b}.$$