

Finite-Elemente-Methoden über lokal verfeinerten Netzen
für elliptische Probleme in Gebieten mit Kanten

Vom wissenschaftlichen Rat
der Technischen Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften

genehmigte

D i s s e r t a t i o n A

zur Erlangung des akademischen Grades

doctor rerum naturalium

(Dr.rer.nat.)

vorgelegt von Dipl.-Math. Thomas Apel
geboren am 30.03.1962 in Reichenbach/V.
eingereicht am 18.12.1990

Gutachter: Doz. Dr. sc. nat. Bernd Heinrich
Prof. Dr. sc. nat. Anna-Margarete Sändig
Prof. Dr. sc. nat. Reinhard Lehmann

Tag der Verteidigung: 30.08.1991

Apel, Thomas:

Finite-Elemente-Methoden über lokal verfeinerten Netzen für elliptische Probleme in Gebieten mit Kanten. -

Chemnitz, Technische Universität, Sektion Mathematik, 1990. - 146 S., 22 Abb., 19 Tab. - Dissertation (A).

Der Verringerung der Konvergenzgeschwindigkeit der Finite-Elemente-Methode bei der Lösung elliptischer Randwertaufgaben in Gebieten mit Ecken und Kanten kann durch gezielte Verfeinerung des Netzes entgegengewirkt werden. In der vorliegenden Arbeit werden effektive Verfeinerungsstrategien vorgeschlagen, der Approximationsfehler für Aufgaben mit verschiedenen Typen von Randbedingungen in Gebieten mit gekrümmtem Rand abgeschätzt und die erhaltenen Ergebnisse mit praktischen Rechnungen verglichen. Konvergenzresultate in Teilgebieten erlauben die Begründung einer Fenstertechnik. Neue Erkenntnisse zur lokalen Interpolationsfehlerabschätzung liefern eine weitere Voraussetzung für eine mathematische Begründung der Finite-Elemente-Methode über anisotropen Vernetzungen.

Inhaltsverzeichnis

0. Vorbemerkungen	4
1. Einführung	8
1.1. Randwertaufgaben mit Lösungssingularitäten	8
1.2. Notwendigkeit angepaßter FEM-Strategien	10
1.3. Überblick über angepaßte FEM-Strategien	11
1.4. Drei spezielle Klassen von Randwertaufgaben	16
1.5. Ergebnisse	20
2. Analytische Grundlagen	24
2.1. Funktionalräume und Einbettungssätze	24
2.2. Koordinatensysteme und -transformation	28
2.3. Randwertaufgaben, Existenz und Eindeutigkeit der Lösung	29
2.4. Fortsetzung von Funktionen über den Rand hinaus	29
2.5. Stetigkeitsmodul und Steklov-Mittelung	37
2.6. Abschätzungen in einem Randstreifen	43
2.7. Eine Hilfsfunktion	45
3. Netze und Interpolationsfehler	49
3.1. Lokale Interpolationsfehlerabschätzungen	49
3.2. Vernetzung und Interpolation	62
3.3. Globale Interpolationsfehlerabschätzung - natürliche Randbedingungen -	66
3.4. Globale Interpolationsfehlerabschätzung - wesentliche Randbedingungen -	70
3.5. Polyedergebiete	74
3.6. Bemerkungen und Ergänzungen	78
4. FEM-Strategien und Approximationsfehlerabschätzungen	82
4.1. FEM mit und ohne Netzverfeinerung	82
4.2. Abschätzungen im Subgebiet	86
4.3. Eine zweistufige Fenstertechnik	92
4.4. Bemerkungen und Ergänzungen	97
5. Numerische Experimente	101
5.1. Vorbemerkungen	101
5.2. Aufstellen von Testaufgaben	101
5.3. Realisierung der Testgrößen	107
5.4. Resultate und Diskussion	109
Literaturverzeichnis	123
Anlage : Das 3D-Finite-Elemente-Programmsystem FEMPS3D	

0. Vorbemerkungen

0.1. Aufbau der Arbeit. Den Schwerpunkt der vorliegenden Dissertation bildet die Begründung von Varianten der Finite-Elemente-Methode über verfeinerten Netzen zur Behandlung selbstadjungierter elliptischer Randwertprobleme 2.Ordnung in dreidimensionalen Gebieten mit Kanten.

(i) Im ersten, einführenden Kapitel wird die betrachtete Aufgabenklasse charakterisiert und die Notwendigkeit angepaßter Finite-Elemente-Methoden gezeigt. Aus der Literatur bekannte Verfahren zur Verbesserung der asymptotischen Konvergenzeigenschaften der Näherungslösung werden diskutiert. Zum Schluß werden die eigenen Ergebnisse eingeordnet.

(ii) Im zweiten Kapitel wird eine Reihe von Sätzen aus der Analysis zusammengestellt, die nur indirekt im Zusammenhang mit Fehlerabschätzungen stehen, aber in den weiteren Kapiteln benötigt werden. Ein Teil davon konnte unmittelbar aus der Literatur entnommen werden, in vielen Fällen, besonders in 2.4. bis 2.7., mußten jedoch die Behauptungen verändert oder erweitert werden, so daß beim Beweis oft weiterführende Überlegungen und neue Ideen notwendig wurden.

(iii) Interpolationsfehlerabschätzungen, auf die die Fehleranalyse der Finite-Elemente-Methode i.allg. zurückgreift, wurde ein gesondertes, das dritte, Kapitel gewidmet. Im ersten Unterpunkt werden zunächst lokale Abschätzungen betrachtet. Den Schwerpunkt bilden Resultate für Elemente, deren In- und Umkugeldurchmesser asymptotisch nicht die gleiche Größenordnung besitzen.

Der nächste Punkt, 3.2., enthält die Beschreibung von Familien von Netzen, die bei Kantenproblemen verwendet werden. Globale Interpolationsfehlerabschätzungen werden dann in den folgenden beiden Unterkapiteln bewiesen, getrennt für natürliche und wesentliche Randbedingungen. Punkt 3.5. liefert einige Aussagen zu Polyedergebieten.

Den Abschluß des Kapitels bilden Überlegungen zur Beweisbarkeit der Abschätzungen für Probleme in anderen Gebietsklassen, mit anderen Randbedingungen und mit anderen Typen finiter Elemente.

(iv) Der Approximationsfehler bei der Finite-Elemente-Methode wird im 4. Kapitel in der $W^{1,2}$ - und der L_2 -Norm abgeschätzt. Der erste Punkt enthält die Herleitung der Approximationsordnung für das unverfeinerte und verschieden graduierte Netze über dem Gesamtgebiet Ω . Die Optimalität der erhaltenen Abschätzungen wird diskutiert.

Die verminderte Konvergenzgeschwindigkeit bei unverfeinerten Netzen ist durch die Singularität bedingt. In 4.2. wird gezeigt, daß die Lösung in Teilgebieten, die die Kante nicht enthalten, in der $W^{1,2}$ -Norm mit der optimalen Ordnung konvergiert. Dadurch kann im dritten Punkt ein in der Praxis längst angewandter zweistufiger Algorithmus begründet werden (windowing).

Auch hier wird am Ende des Kapitels auf einige angrenzende Problemstellungen eingegangen. Insbesondere wird gezeigt, daß sich bei Netzverfeinerung i.allg. die Kondition der Matrix nicht verschlechtert.

(v) Im fünften Kapitel werden zu den Netzverfeinerungsstrategien Testaufgaben beschrieben und die durchgeführten Rechnungen ausgewertet. Es zeigt sich, daß die theoretisch bestimmten asymptotischen Konvergenzordnungen schon mit relativ groben Netzen praktisch nachgewiesen werden können.

Das zu den Tests verwendete, neu geschaffene Finite-Elemente-Programmsystem FEMPS3D wird in einer Anlage vorgestellt.

0.2. Diese Arbeit entstand im wesentlichen während meiner Assistenzzeit an der Sektion Mathematik der Technischen Universität Chemnitz und wurde an der Technischen Hochschule Zwickau beendet.

An dieser Stelle möchte ich ganz herzlich Herrn Doz. Dr.sc.nat. B. Heinrich für die gute Betreuung danken. Mit seinen Anregungen und durch die kritische Durchsicht aller im Verlaufe der vier Jahre entstandenen Manuskripte hat er den Inhalt der vorliegenden Dissertation maßgeblich beeinflusst.

Besonderer Dank gebührt auch Frau Prof. Dr.sc.nat. A.-M. Sändig und Herrn Dr.sc.nat. J. Roßmann, die mir geduldig Fragen zu analytischen Eigenschaften der Lösungen der betrachteten Probleme beantworteten.

Weiterhin möchte ich Herrn Dr.rer.nat. M. Jung für die hilfreichen Diskussionen bei der Erstellung des Finite-Elemente-Programmsystems FEMPS3D und der Auswertung der durchgeführten Testrechnungen danken.

Für ihr stets entgegengebrachtes Interesse gilt mein Dank auch allen anderen Kollegen der Sektion Mathematik, mit denen ich Detailprobleme diskutiert habe.

Nicht zuletzt möchte ich meiner Frau danken, die mich insbesondere in der Phase des Abfassens der Arbeit sehr unterstützt und viel Verständnis aufgebracht hat.

0.3. Konventionen. (i) Der Begriff *glatt* wird im Sinne von *unendlich oft differenzierbar* verwendet. Unter *stückweise glatt berandet* wird verstanden, daß das Gebiet zu $C^{0,1}$ gehört und der Rand aus einer endlichen Anzahl glatter Teilflächen besteht. Damit wird jedoch nicht behauptet, daß gewisse Aussagen nicht auch unter schwächeren Voraussetzungen gezeigt werden können, z.B. für C^2 -glatte Teilflächen.

(ii) Zwei beschränkte Gebiete $G \subset \mathbb{R}^N$ und $G' \subset \mathbb{R}^N$ heißen *diffeomorph* (vgl. [Wloka 1982, 2.3]), wenn eine Abbildung Ψ mit folgenden drei Eigenschaften existiert:

(a) Ψ ist eine eindeutige Transformation von G auf G' .

(b) Die Funktionen $y_1 = \phi_1(x_1, \dots, x_N), \dots, y_N = \phi_N(x_1, \dots, x_N)$ gehören zu $C^\infty(\bar{G})$.

(c) Die Funktionen $x_1 = \psi_1(y_1, \dots, y_N), \dots, x_N = \psi_N(y_1, \dots, y_N)$ gehören zu $C^\infty(\bar{G}')$.

(iii) C bedeute eine positive reelle Konstante. Verschiedene Konstanten werden in der Regel in der Bezeichnung nicht unterschieden, was insbesondere bei aufeinanderfolgenden Ungleichungen zu beachten ist (vgl. z.B. (vii)).

I.allg. sind die Konstanten vom Gebiet und vom Differentialoperator in der Aufgabenstellung abhängig, jedoch nicht von der rechten Seite. Nach der Wahl einer Vernetzung ist C insbesondere vom Diskretisierungsparameter h unabhängig.

Werden Zahlenkonstanten angegeben, so sind diese im Sinne expliziter oberer Schranken zu verstehen. Sie sollen unterstreichen, daß eine von keinem Parameter abhängige Konstante existiert. Jedoch wird nicht der Anspruch erhoben, daß die angegebene Zahl minimal ist.

(iv) Bei Sobolevräumen mit einer Summierbarkeit p wird $p < \infty$ vorausgesetzt, wenn es nicht anders angegeben ist. Die Ungleichung $p \geq 1$ ist also im Sinne $p \in [1, \infty)$ zu verstehen. Der Fall $p = \infty$ wurde nicht betrachtet.

(v) Bei den Mengenrelationen \subset und \supset ist der Fall der Mengengleichheit mit eingeschlossen.

(vi) Ein Doppelpunkt vor dem Gleichheitszeichen zeigt an, daß die Gleichheit im Sinne einer Definition zu verstehen ist.

(vii) Die *Tilde* ist zu lesen als *liegt in der Größenordnung von*, d.h., $a \sim b$ bedeutet, daß Konstanten C im Sinne von (iii) existieren, so daß $Ca \leq b \leq Ca$.

0.4. Liste häufig gleich verwendeter Bezeichnungen und deren erstes Auftreten.

u	exakte Lösung der Randwertaufgabe	1.4.
u_h	Finite-Elemente-Lösung	1.4.
f	rechte Seite der Randwertaufgabe	1.4.
λ	reelle Zahl, die die Singularität charakterisiert	1.4.
ω	Kantenwinkel	1.4.
ξ, ξ_j	Abschneidefunktionen	1.1.2.
$a(\cdot, \cdot)$	Bilinearform	1.4.
(\cdot, \cdot)	L_2 -Skalarprodukt, ggf. Dualitätsprodukt	
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	euklidisches Skalarprodukt	
∂G	Rand eines Gebiets G	
$\ \cdot\ _H$	Norm im Raum H	2.1.2.
$ \cdot _H$	eine bestimmte Halbnorm im Raum H	2.1.2.
\hookrightarrow	Symbol für die Einbettung von Räumen	2.1.3.
$x = (x_1, x_2, x_3)$ $y = (y_1, y_2, y_3)$	} Koordinaten	2.2.1.
N		
Ω	Gebiet, in dem die Randwertaufgabe betrachtet wird	
M	auf $\partial\Omega$ ausgezeichnete Mannigfaltigkeit	
$K(\varrho)$	$:= \{x \in \Omega : \text{dist}(x, M) < \varrho\}$	2.7.1.
$K(\varrho)$	$:= \{x \in \mathbb{R}^3 : \text{dist}(x, M) < \varrho\}$	4.3.2.
h	Diskretisierungsparameter	3.2.2.
μ	Netzgraduierungsparameter	3.2.2.
V_h, V_{0h}	Finite-Elemente-Räume	3.2.6.
Π_h	Interpolationsoperator	3.2.7.

1. Einführung

1.1. Randwertaufgaben mit Lösungssingularitäten

1.1.1. Die Analysis der Finite-Elemente-Methode geht gewöhnlich von der Annahme aus, daß die Lösung eines gegebenen Problems genügend glatt ist (z.B. [Ciarlet 1978, Kap. 3.2.] [Оганесян/Руховец 1979, §3.2]). Elliptische Randwertaufgaben 2. Ordnung, wie z.B.

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

werden häufig im Raumpaar $(W^{2,2}(\Omega), L_2(\Omega))$ betrachtet, d.h., eine rechte Seite aus $L_2(\Omega)$ wird durch den inversen Operator auf eine Lösung aus $W^{2,2}(\Omega)$ abgebildet. (Die Definition der Räume wird in Kapitel 2.1. angegeben.) Jedoch müssen häufig Probleme behandelt werden, deren Lösung nicht im gesamten Gebiet diese Forderungen erfüllt:

1.1.2. Beispiele. Zunächst sollen einige Beispiele von Randwertaufgaben über zweidimensionalen Gebieten angegeben werden. In diesen entstehen Lösungen der Form

$$u = \sum_j u_s^{(j)} + w$$

$$u_s^{(j)} = \xi_j(r_j) \sum_i \chi_{j,i} r_j^{\lambda_{j,i}} \bar{\Phi}_i(\varphi_j)$$

Dabei wurde der allgemeinste Fall, bei dem zusätzlich logarithmische Singularitäten auftreten können, nicht berücksichtigt. Es bedeuten

w	den regulären Lösungsanteil,
$u_s^{(j)}$	die singulären Lösungsanteile,
j	den laufenden Index für die verschiedenen singulären Punkte P_j ,
(r_j, φ_j)	Polarkoordinaten mit dem Ursprung in P_j ,
$\xi_j(\cdot)$	eine unendlich glatte Abschneidefunktion ($\xi_j(r_j)=1$ für $0 \leq r_j \leq \frac{1}{2} \varrho_j$, $\xi_j(r_j)=0$ für $r_j \geq \varrho_j$, ϱ_j ist dabei eine hinreichend kleine Zahl, so daß im Kreis $\{x : \text{dist}(x, P_j) \leq \varrho_j\}$ kein weiterer singulärer Punkt liegt.),
$\chi_{j,i}$	reelle Zahlen ("Spannungsintensitätskoeffizienten"),
$\lambda_{j,i}$	positive reelle Eigenwerte zugeordneter Sturm-Liouville-Probleme ("Singularitätenexponenten") und
$\bar{\Phi}_j(\varphi_j)$	die zugehörigen Eigenfunktionen.

(i) Während z.B. das in 1.1.1. genannte Poissonproblem in konvexen oder glattberandeten Gebieten Ω für alle rechten

Seiten aus $L_2(\Omega)$ in $W^{2,2}(\Omega)$ lösbar ist, führen Ecken mit einem Innenwinkel $\omega_j > \pi$ (vgl. Abb. 1.1) zu singulärem Verhalten in der Lösung, selbst wenn die rechte Seite unendlich glatt wäre. Die singulären Anteile bestehen hier nur aus einem Summanden

$$u_s^{(j)} = \xi_j(r_j) \chi_j r_j^{\lambda_j} \sin \lambda_j \varphi_j, \quad \lambda_j = \frac{\pi}{\omega_j}.$$

Die Lösung ist in $W^{1+\alpha,2}(\Omega)$ für $\alpha < \min\{\lambda_j\}$

bzw. $W^{2,p}(\Omega)$ für $p < \frac{2}{2 - \min\{\lambda_j\}}$ enthalten

(vgl. [Kufner/Sändig 1987, §1] [Кондратьев 1967] [Оганесян et al. 1974, §5.2] [Strang/Fix 1973 §8.1] [Оганесян/Руховец 1979, §6.1]).

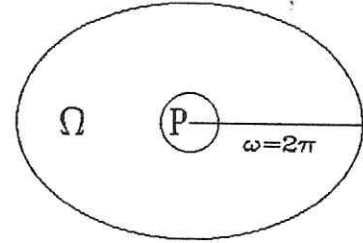
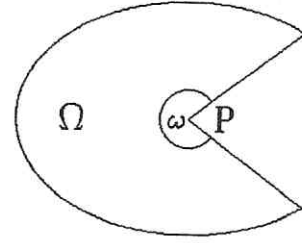
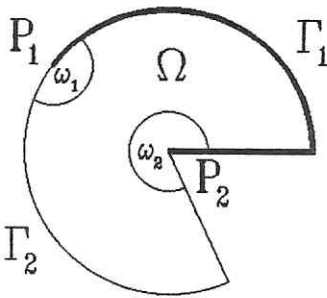


Abb. 1.1



(ii) Beim gemischten Randwertproblem, z.B.

$$\begin{aligned} - \Delta u &= f && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 && \text{auf } \Gamma_2 \end{aligned}$$

entstehen Singularitäten in der Umgebung der Punkte P_1 und P_2 , in denen der Typ der Randbedingungen wechselt, falls der zugehörige Innenwinkel $\omega_j > \frac{1}{2}\pi$ ist.

Abb. 1.2

Im Fall $\frac{1}{2}\pi < \omega_j < \frac{3}{2}\pi$ gilt $u_s^{(j)} = \xi_j(r_j) \chi_j r_j^{\lambda_j} \sin \lambda_j \varphi_j$ mit $\lambda_j = \frac{\frac{1}{2}\pi}{\omega_j}$.

Ist jedoch $\omega_j > \frac{3}{2}\pi$, so besteht der singuläre Lösungsanteil sogar aus 2 Summanden:

$$u_s^{(j)} = \xi_j(r_j) \sum_{i=1}^2 \chi_{j,i} r_j^{\lambda_{j,i}} \sin \lambda_{j,i} \varphi_j, \quad \lambda_{j,1} = \frac{\frac{1}{2}\pi}{\omega_j}, \quad \lambda_{j,2} = \frac{\frac{3}{2}\pi}{\omega_j}$$

(vgl. [Kufner/Sändig 1987, §2] [Whiteman/Schleicher 1984] [Grisvard 1976]).

(iii) Im Gegensatz zu den bisher betrachteten Beispielen können die Eigenwerte $\lambda_{j,i}$ bei Aufgaben mit unstetigen Koeffizienten ("Interfaceproblemen"), z.B.

$$\begin{aligned} - a_1 \Delta u_1 &= f && \text{in } \Omega_1 \\ - a_2 \Delta u_2 &= f && \text{in } \Omega_2 \\ u_1 &= u_2, \quad a_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} = a_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} && \text{auf } \Gamma_0 \end{aligned}$$

+ Randbedingungen

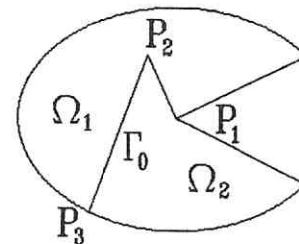


Abb. 1.3

i.allg. nicht explizit angegeben werden; sie sind positive

reelle Lösungen einer transzendenten Gleichung (vgl. z.B. [Dobrowolski 1981, §3] [Оганесян et al. 1974, §5.4] [Strang/Fix 1973, §8.1] [Оганесян/Руховец 1979, §6.1]).

1.1.3. Während die Eigenschaften und die Struktur der Lösung für Randwertaufgaben über zweidimensionalen Gebieten auch für allgemeinere Differentialoperatoren, als hier angegeben, in der Literatur recht umfassend untersucht sind, ist die Theorie für dreidimensionale Probleme noch nicht so weit entwickelt. Das ist maßgeblich der größeren Vielfalt der Aufgaben geschuldet. So können allein die Randsingularitäten in 3 qualitativ unterschiedliche Gruppen eingeteilt werden: die konischen Punkte, die Kanten und die Polyederecken. Die Fülle der dazu bereits erschienenen Arbeiten (vgl. z.B. [Grisvard 1985] [Kufner/Sändig 1987] [Roßmann 1988] [von Petersdorff/Stephan 1988] und die dort zitierte Literatur) ist Ausgangspunkt für die Untersuchungen der numerischen Analysis. Für die vorliegende Dissertation wichtige Ergebnisse werden im Kapitel 1.4. dargelegt.

1.2. Notwendigkeit angepaßter FEM-Strategien

1.2.1. Verallgemeinerte Lösung. Ausgangspunkt für die Finite-Elemente-Methode ist nicht die klassische Formulierung einer Randwertaufgabe (wie z.B. in 1.1.1.), sondern deren verallgemeinerte Formulierung.

Definition: Sei $V_0 := \{v \in W^{1,2}(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0\}$, dann heißt $u \in V_0$ verallgemeinerte (schwache) Lösung des Poisson-Problems aus 1.1.1., wenn

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in V_0.$$

1.2.2. FEM-Lösung. Ersetzt man in der verallgemeinerten Formulierung V_0 durch einen geeigneten endlichdimensionalen Raum V_{0h} (genaue Definition in Kapitel 3.2.), wobei $V_{0h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} V_0$, so erhält man die Finite-Elemente-Lösung $u_h \in V_{0h}$. Es gilt:

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx = \int_{\Omega} f v_h \, dx \quad \forall v_h \in V_{0h}.$$

1.2.3. Erwartungsgemäß verkleinert sich der Fehler $u - v_h$ mit größer werdender Raumdimension. Aufgaben mit Lösungen aus dem Raum $W^{2,2}(\Omega)$ (z.B. 1.2.1., wenn Ω ein konvexes Gebiet ist) erlauben für Standard-Finite-Elemente-Techniken mit linearen Ansatzfunktionen Fehlerabschätzungen der Form

$$\begin{aligned} \| u - u_h; W^{1,2}(\Omega) \| &\leq Ch \| f; L_2(\Omega) \| \\ \| u - u_h; L_2(\Omega) \| &\leq Ch^2 \| f; L_2(\Omega) \| \end{aligned}$$

(vgl. z.B. [Ciarlet 1978, Kap. 3.2]). Dabei ist h eine typische Elementgröße, die Dimension von V_{0h} liegt in der Größenordnung h^{-N} , $N = \dim(\Omega)$.

1.2.4. Da die in 1.1. betrachteten Aufgaben i.allg. jedoch Lösungen besitzen, die nicht zu $W^{2,2}(\Omega)$, sondern nur zu $W^{1+\alpha,2}(\Omega)$ ($\alpha < \lambda$) gehören, konnte auch nur eine geringere Approximationsordnung nachgewiesen werden:

$$\| u - u_h; W^{1,2}(\Omega) \| \leq Ch^\lambda \| f; L_2(\Omega) \| \quad \text{für } N=2$$

[Оганесян/Руховец 1979, Kap. 6]

$$\| u - u_h; W^{1,2}(\Omega) \| \leq Ch^{\lambda-\epsilon} \| f; L_2(\Omega) \| \quad \forall \epsilon > 0 \quad \text{für } N=3$$

[Kufner/Sändig 1987, §17]

Der Verlust an Genauigkeit ist nicht in der Beweistechnik begründet; man kann die Existenz von Aufgaben zeigen, für die

$$\| u - u_h; W^{1,2}(\Omega) \| \geq Ch^\lambda$$

(für $N=2$ vgl. [Оганесян et al. 1974, Einleitung zu Kap.5] [Оганесян/Руховец 1979, §6.1], für $N=3$ vgl. 4.1.7.(iv)). Wegen der praktischen Bedeutung der Singularitäten haben sich in den letzten Jahren viele Autoren damit beschäftigt, spezielle FEM-Strategien zu entwickeln, für die es gelingt, die gleiche Approximationsordnung wie für glatte Lösungen nachzuweisen (vgl.1.2.3.).

1.3. Überblick über angepaßte FEM-Strategien

1.3.1. Aus der Vielzahl der in der Literatur bekannten FEM-Strategien zur Behandlung von Randwertproblemen mit Lösungssingularitäten über zweidimensionalen Gebieten sollen im folgenden zwei der verbreitetsten kurz vorgestellt werden. Ohne Anspruch auf Vollständigkeit werden im Anschluß weitere Techniken genannt. Am Schluß des Kapitels wird die Literatur zu dreidimensionalen Problemen zusammengefaßt.

Es wird versucht, die Vor- und Nachteile der Methoden anzugeben. Vergleiche erweisen sich jedoch als sehr schwierig und sind auch in der Literatur kaum zu finden. Numerische Tests verschiedener Methoden an ein- und derselben Aufgabe findet man selten [Strang/Fix 1973, Kap. 8.4] [Dobrowolski 1981]. Nicht oder nur subjektiv beantwortet ist die Frage nach Vergleichskriterien. Möglicherweise kann man für jede beliebige Methode ein Kriterium finden, das die Überlegenheit dieser gegenüber allen anderen zeigt.

In den letzten Jahren wächst die Anzahl der Arbeiten, die sich der Singularitätenproblematik mit angepaßten Randelementmethoden widmen (vgl. [von Petersdorff 1989] und die dort zitierte Literatur). Auch Arbeiten zur Integralbilanzmethode (box method) mit spezieller Berücksichtigung der Singularitäten gibt es [Meisel 1990]. Diese sollen jedoch hier nicht weiter ausgeführt werden.

1.3.2. Aufnahmen der Singularitätenfunktionen in Ansatz- und Testraum. (i) Die Grundidee dieser Methode besteht darin, den Finite-Elemente-Raum V_{0h} um einige der Singularitätenfunktionen $\xi_j(r_j)r_j^{\lambda_{j,i}}\Phi_i(\varphi_j)$ (vgl. 1.1.) zu erweitern. Erstmals 1961 von Babuška vorgeschlagen und von Fix 1969 analysiert [Dobrowolski 1981, S.9], wird diese Methode in der Literatur als "Fix method" [Stephan/Whiteman 1988], "Singular function method (SFM)" [Dobrowolski 1981], "augmenting technique" [Whiteman 1987] oder "аддитивное выделение особенности" [Оганесян et al. 1974, §5.3] [Оганесян/Руховец 1979, §6.3] bezeichnet. Mit einem relativ unkomplizierten Beweis erhält man optimale Fehlerabschätzungen wie in 1.2.3. [Strang/Fix 1973, §8.2, §8.3] [Оганесян et al. 1974, §5.3] [Оганесян/Руховец 1979, §6.3].

(ii) **Probleme.** Als schwierig kann sich die Bestimmung der $\lambda_{j,i}$ für kompliziertere Aufgaben erweisen. Gegebenenfalls können deshalb nur Näherungen der Singulärfunktionen verwendet werden.

Weiterhin ist ein höherer Programmieraufwand nötig, zum einen, da außer den Standard-FEM-Funktionen noch die singulären Funktionen benötigt werden, zum anderen, da die herkömmlichen Quadraturformeln zur Berechnung der Elemente der Steifigkeitsmatrix und der rechten Seite bei singulären Funktionen an Genauigkeit verlieren. Hier müssen verbesserte Algorithmen genutzt werden (vgl. [Оганесян et al. 1974, §5.3] [Stephan/Whiteman 1988]).

Ein drittes Problem ist die Invertierung der Steifigkeitsmatrix K_h , weil diese infolge der Approximation der Singulärfunktionen durch die stückweise linearen Ansatzfunktionen schlecht konditioniert ist: $\text{cond } K_h = O(h^{-2-2\lambda})$ [Оганесян et al. 1974, §5.3].

(iii) **Erweiterungen.** Leider konvergieren die Koeffizienten vor den singulären Funktionen nur langsam, in speziellen Fällen überhaupt nicht, gegen die Spannungsintensitätsfaktoren (z.B. [Dobrowolski 1981, §§9-11]). Letztere haben aber z.B. in der Bruchmechanik große Bedeutung. Man hat 2 Möglichkeiten. Entweder bestimmt man diese im Anschluß aus der Näherungslösung (vgl. [Dobrowolski 1985] [Wigley 1987]) oder man verwendet die Methode mit den dualen Singulärfunktionen ("dual singular function method") [Blum/Dobrowolski 1980] [Dobrowolski 1981]. Die Idee besteht darin, den Raum der Ansatzfunktionen (für u_h) mit den singulären Funktionen $\xi_j(r_j)r_j^{\lambda_{j,i}}\Phi_i(\varphi_j)$, den Raum der Testfunktionen (für v_h) jedoch mit den dualen Funktionen $\xi_j(r_j)r_j^{-\lambda_{j,i}}\Phi_i(\varphi_j)$ zu erweitern. Mit diesem Galerkin-Petrov-Verfahren werden gute Näherungen für die Spannungsintensitätsfaktoren erhalten.

1.3.3. Netzverfeinerungstechniken. (i) Es ist einleuchtend, daß Netzverfeinerungen in der Umgebung der Singularität zur Lösungsverbesserung führen können. Empirische Elementhalbierungen haben sich jedoch bald als zu aufwendig erwiesen [Strang/Fix 1973, Kap. 8.4]. Eine systematische Untersuchung hat zu 2 Typen von Techniken geführt, den adaptiven und den a-priori-Graduierungen.

(ii) Adaptive Verfeinerung. Die Rechnung startet mit einem gleichmäßigen Netz. Lokale Fehlerschätzer geben an, welche Elemente geteilt werden müssen, und die Rechnung beginnt von vorn. Numerische Beispiele zeigen, daß dieser Zugang sehr effektiv ist (vgl. [Guerra/Becker 1976] [Babuška/Rheinboldt 1978] u.a.). Von einigen Autoren wurde diese Technik mit Multigridideen verknüpft (vgl. [Whiteman 1987] und die dort zitierte Literatur).

(iii) A-priori-Graduierung. Das Ziel dieser Methode ist, das Netz schon vor dem Start der FEM-Rechnung so zu verfeinern, daß die optimalen Fehlerabschätzungen 1.2.3. erhalten werden. Folgende Idee erlaubt die Umsetzung dieser Zielstellung: In der Umgebung der Singularität werden die Koordinaten so transformiert, daß die Lösung u bezüglich des neuen Systems keine Singularität mehr besitzt, also mit gleichmäßigem Netz optimal approximierbar ist. Auf dieses gleichmäßige Netz wird nun die Rücktransformation angewandt [Оганесян/Руховец 1968]. Es zeigt sich, daß man das Netz auch ohne Ausführung dieser Transformation beschreiben kann und daß Abschätzungen wie in 1.2.3. nachweisbar sind [Raugel 1978] [Оганесян/Руховец 1979, §6.4] [Fritzsche/Oswald 1986]. Nach dem gleichen Prinzip, jedoch wesentlich stärker verfeinert, werden Netze für optimale Fehlerabschätzungen in der Maximumnorm konstruiert [Schatz/Wahlbin 1979].

(iv) Bewertung. Der entscheidende Vorteil bei allen Netzverfeinerungstechniken ist, daß zur Realisierung nur eine Schätzung der kleinsten Singularitätenexponenten $\lambda_{j,1}$, nicht aber eine genaue Lösungsdarstellung bekannt sein muß.

Bei der a-priori-Graduierung können im Gegensatz zu den vorher beschriebenen Methoden herkömmliche FEM-Programme genutzt werden. Die Schwierigkeit wurde zur Netzgenerierung hin verlagert, aber auch hierzu sind Algorithmen bekannt [Raugel 1978] [Шайдунов 1989, §2.7] [Fritzsche 1989].

Die Verfeinerung kann so gewählt werden, daß die Zahl der Stützstellen asymptotisch in der gleichen Ordnung wie bei nicht verfeinerten Netzen liegt [Raugel 1978] [Оганесян/Руховец 1979, §6.4] [Fritzsche 1989].

Die Kondition der Steifigkeitsmatrix verschlechtert sich asymptotisch im Vergleich zu regulären Aufgaben nicht [Оганесян/Руховец 1979, §6.4].

(v) Bemerkung. Bei der analytischen Untersuchung der Netzverfeinerungstechniken sind nur die Eigenschaften des betrachteten Netzes wesentlich, nicht die Herkunft. D.h., es ist unerheblich, ob es aus einem gleichmäßigen Netz durch das Einfügen zusätzlicher Knoten oder durch Umverteilung der vorhandenen Knoten (Änderung der Koordinaten der Knotenpunkte bei gleichbleibender Topologie) gewonnen wurde. Diese Fragen spielen nur bei der rechentechnischen Umsetzung eine Rolle.

1.3.4. Weitere Techniken. (i) Singuläre Elemente. Durch die Einführung spezieller finiter Elemente in der Umgebung der Singularität, die z.B. mehr bzw. unüblich angeordnete Knoten oder andere Ansatzfunktionen besitzen, konnte eine signifikante Erhöhung der Genauigkeit, z.T. aber nicht der Konvergenzrate, erzielt werden (vgl. [Whiteman/Schleicher 1984] [Whiteman 1987] [Michavila 1987] [Stephan/Whiteman 1988] und die dort zitierte Literatur).

(ii) Fenstertechniken (windowing). Von Ingenieuren verwendet, aber theoretisch nur wenig durchdrungen sind Strategien, bei denen man mit einer Rechnung über einem gleichmäßigen Netz startet und dann die Lösung in einem oder mehreren Schritten in immer kleiner werdenden Umgebungen der Singularität ("Fenstern") verbessert (vgl. auch 4.3. und 4.4.4.) [Guerra/Becker 1976] [Оганесян/Руховец 1979, §6.6].

(iii) Die p-Methode. Untersucht wird die Abhängigkeit des Fehlers vom Polynomgrad p der Ansatzfunktionen bei fixiertem Netz:

$$\| u - u_p \| \leq C p^{-\alpha} \| u \|$$

Günstig für hohes α sind gute Glattheitseigenschaften von u , d.h., sowohl die rechte Seite als auch der Rand des Gebiets Ω müssen hinreichend glatt sein. Die Fehleranalyse findet man bei Dorr [1984].

Diese Untersuchungen sind in [Dorr 1986] auf den Fall von Polygon- und Polyedergebieten erweitert worden: Ist λ der kleinste Singularitätenexponent ($u \in W^{1+\lambda-\varepsilon, 2}(\Omega) \quad \forall \varepsilon > 0$) und $f \in W^{k, 2}(\Omega)$, wobei die natürliche Zahl $k \geq 2\lambda - 1$ ist, dann gilt

$$\| u - u_p; W^{1,2}(\Omega) \| \leq C p^{-2\lambda+\varepsilon} \| f; W^{k,2}(\Omega) \|.$$

Vergleicht man diese Methode mit der Standard-FEM (h-Version) bezüglich der Anzahl der Freiheitsgrade n , so ist sie im

Vorteil: $\| u - u_p; W^{1,2}(\Omega) \| \leq C n^{-\lambda+\varepsilon}$

gegenüber $\| u - u_h; W^{1,2}(\Omega) \| \leq C n^{-\frac{1}{2}\lambda}$.

Nachteilig sind jedoch die relativ voll besetzte Steifigkeitsmatrix und, daß sie zur Gebietserfassung bei Nichtpolygongebieten ungeeignet ist.

(iv) Die h-p-Version. Die gleichzeitige Erhöhung der Elementanzahl und des Polynomgrades der Ansatzfunktionen wurde im eindimensionalen Fall für x^λ -Singularitäten in [Gui/Babuška 1986] untersucht. Es ist gelungen, die Existenz von Verfahren mit exponentieller Konvergenz zu zeigen,

$$\| u - u_{hp}; W^{1,2}(\Omega) \| \leq C n^{c_1} e^{-c_2 \sqrt{n}},$$

und Strategien vorzuschlagen, die fast optimal sind. Es wird vermutet, analoge Ergebnisse auch im Mehrdimensionalen erreichen zu können.

(v) Hybride Methoden. Unter hybriden Methoden wird die Kombination unterschiedlicher Algorithmen verstanden. Z.B. teilen Li und Bui [1988a,b] das Gebiet in 2 Subgebiete; in dem die Singularität enthaltenden Teilgebiet wird ein Ritz-Galerkin-Verfahren mit einer abgebrochenen Folge von Singularitätenfunktionen und im Restgebiet die Finite-Elemente-Methode verwendet. Dieses Verfahren ist nicht konform an der die beiden Teilgebiete trennenden Linie und könnte auch als veränderte Singulärfunktionenmethode betrachtet werden.

1.3.5. Dreidimensionale Aufgaben. (i) Viele der bisher beschriebenen Methoden werden auch im Dreidimensionalen schon lange genutzt. In den meisten Fällen konnte jedoch noch kein Konvergenzbeweis erbracht werden. Die Ursachen liegen zum einen in der noch nicht so vollständigen analytischen Durchdringung dreidimensionaler Aufgaben, aber auch in qualitativ neuen Problemen in der FEM-Fehleranalyse: Z.B. gelten die Einbettungssätze in anderer Form, und bei Kanten sind die Spannungsintensitätskoeffizienten keine Zahlen, sondern Funktionen.

(ii) Die Singulärfunktionenmethode. Aus letztgenanntem Grund ist der Konvergenzbeweis für die Singulärfunktionenmethode komplizierter, da die Koeffizientenfunktion angenähert werden muß [Stephan/Whiteman 1988]. Diese Schwierigkeit tritt zwar bei (Polyeder-)Eckensingularitäten nicht auf, jedoch sind hier die singulären Funktionen nur in Spezialfällen exakt bekannt [Walden/Kellogg 1977]. I.allg. muß man die Singularitätensexponenten numerisch bestimmen [Beagles/Whiteman 1985] und das Verfahren mit nicht exakten singulären Funktionen anwenden [Beagles/Whiteman 1986].

Die Schwierigkeiten bei der Implementation sind mit dem zweidimensionalen Fall vergleichbar [Stephan/Whiteman 1988].

(iii) Netzverfeinerung. Für Polyedergebiete findet man Interpolationsfehleraussagen über verfeinerten Netzen in [Fritzsche/Oswald 1987] und [Fritzsche 1989], allerdings werden die Bezüge zu Randwertaufgaben nur andeutungsweise hergestellt. In der vorliegenden Dissertation werden Verfeinerungsstrategien für 3 Klassen von Randwertaufgaben, die in 1.4. beschrieben werden, begründet.

(iv) Die gekoppelte Fourier-Finite-Elemente-Methode. Zusätzlich zu den bisher vorgestellten Methoden hat man im Spezialfall einer Randwertaufgabe über rotationssymmetrischem Gebiet die Möglichkeit, das dreidimensionale Problem durch partielle Fourieranalyse bezüglich des Rotationswinkels in eine Folge entkoppelter zweidimensionaler Randwertaufgaben über der Meridianebene zu überführen. Eine endliche Anzahl dieser Aufgaben für die Koeffizienten der Fourierreihe wird mit einer Finite-Elemente-Methode, z.B. mit Netzverfeinerung, gelöst. Mittels partieller Fouriersynthese erhält man dann eine Näherungslösung des Ausgangsproblems. Aber auch in diesem Fall ist die Fehleranalyse noch nicht abgeschlossen (vgl. z.B. [Heinrich/Fischer 1989] [Heinrich 1990a,b]).

1.4. Drei spezielle Klassen von Randwertaufgaben

In diesem Kapitel werden 3 Klassen von Randwertaufgaben charakterisiert, auf die in den folgenden Kapiteln fast ausschließlich Bezug genommen wird. Die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der formulierten Probleme wird in Kapitel 2.3. gezeigt.

Dirichletproblem für Gebiete mit Kanten ohne Ecken

1.4.1. Ein spezielles Dirichletproblem. Betrachtet werde zunächst das homogene Dirichletproblem für den Laplaceoperator

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ in } \Omega, f \in L_2(\Omega) \\ u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

über einem Gebiet Ω , das als Vereinigung zweier verschieden großer Kreiszyylinder dargestellt werden kann (Abb. 1.4.) und somit eine 270° -Kante M besitzt. Die verallgemeinerte Lösung besitzt die in 1.4.2. beschriebenen Eigenschaften [Sändig 1990, 2.4].

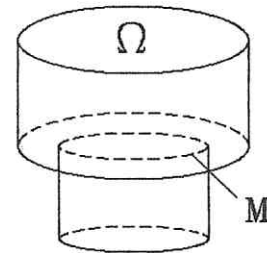


Abb. 1.4.

Dieses Problem ist sehr speziell, stand jedoch stets im Hintergrund der Überlegungen.

Die Definition der Funktionalräume erfolgt in Kap. 2.1.

1.4.2. Lösungseigenschaften. Es gilt $\forall \varepsilon > 0$:

$$u \in V_{1-\lambda+\varepsilon}^{2,2}(\Omega)$$

$$\|u; V_{1-\lambda+\varepsilon}^{2,2}(\Omega)\| \leq C \|f; L_2(\Omega)\|$$

Dabei ist $\lambda \in (\frac{1}{2}, 1)$ eine reelle Zahl.

1.4.3. Ein allgemeines Dirichletproblem.

Gesucht ist $u \in V_0 := \{v \in W^{1,2}(\Omega) : v=0 \text{ auf } \partial\Omega\}$, so daß

$$a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in V_0$$

$$\text{wobei } a(u, v) := \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^3 a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + a_0(x) u(x) v(x) \right) dx$$

$$(f, v) := \int_{\Omega} f(x) v(x) dx$$

Dabei sei $f \in L_2(\Omega)$, $a_{ij} \in L_{\infty}(\Omega)$ ($i, j=1..3$), $a_0 \in L_{\infty}(\Omega)$, $a_0(x) \geq 0$ fast überall in Ω . Die Matrix $a_{ij}(x)$ sei für fast alle $x \in \Omega$ symmetrisch und positiv definit:

$$\sum_{i,j=1}^3 a_{ij}(x) y_i y_j \geq \lambda_{\min}(x) \sum_{i=1}^3 y_i^2 \quad \forall y \in \mathbb{R}^3, \lambda_{\min}(x) \geq \lambda_{\min}^0 > 0$$

Das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ sei zusammenhängend und beschränkt, die Oberfläche $\partial\Omega$ sei stückweise glatt.

1.4.4. Die betrachteten Dirichletprobleme. Aus der in 1.4.3. beschriebenen Problemklasse werden diejenigen betrachtet, deren Lösung die Eigenschaften 1.4.2. besitzt.

Weiterhin wird vorausgesetzt, daß das Gebiet Ω einander nicht schneidende Kanten besitzt, wobei zu jedem Punkt x , der auf einer Kante liegt, eine Umgebung $U(x)$ existiert, so daß $\Omega \cap U(x)$ diffeomorph zu einem Dieder D

$$D = \mathcal{K} \times \mathbb{R}, \quad \mathcal{K} = \{(y_1, y_2) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 < r < \infty, 0 < \varphi < \omega\}$$

bzw. zu einem Teil $D \cap \{y \in \mathbb{R}^3 : |y| < \varrho\}$ davon ist.

Da die Singularität eine lokale Eigenschaft der Lösung ist, genügt es, genau eine Kante mit überstumpfen Innenwinkel zu betrachten. Sie wird mit M bezeichnet.

1.4.5. Bemerkung. Offenbar ist die betrachtete Aufgabenklasse wesentlich allgemeiner als das spezielle Problem 1.4.1. Sie überstreicht zumindest die Klasse aller Probleme 1.4.3. mit in der Umgebung der Kante M konstanten Koeffizienten über Gebieten, deren Kante M konstanten Innenwinkel besitzen [Sändig 1990, 2.4].

Eine weitere Verallgemeinerung der Klasse der behandelten Gebiete wird in Kapitel 3.6. betrachtet.

1.4.6. Das approximierende Problem. Ersetzt man in 1.4.3. den Raum V_0 durch einen geeigneten endlichdimensionalen Raum V_{0h} (genaue Definition in 3.2.6.), wobei $V_{0h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} V_0$ (limitierte Vollständigkeit der Familie V_{0h}), so erhält man das (Galerkin-)Finite-Elemente-Problem:

Gesucht ist $u_h \in V_{0h}$, so daß $a(u_h, v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in V_{0h}$.

Betrachtet werden alle derartigen Aufgaben mit der Einschränkung 1.4.4.

Kantenprobleme mit natürlichen Randbedingungen.

1.4.7. Ein allgemeines Problem. Gesucht ist $u \in V := W^{1,2}(\Omega)$, so daß $a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in V$, wobei

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^3 a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + a_0(x) u(x) v(x) \right) dx + \int_{\partial\Omega} \sigma(x) u(x) v(x) d\Gamma$$

$$(f, v) := \int_{\Omega} f(x) v(x) dx$$

Dabei sei $f \in L_2(\Omega)$, $a_{ij} \in L_{\infty}(\Omega)$ ($i, j=1..3$),

$a_0 \in L_{\infty}(\Omega)$, $\sigma(x) \in L_{\infty}(\partial\Omega)$, $a_0(x) \geq 0$ in Ω , $\sigma(x) \geq 0$ auf $\partial\Omega$,

$\text{mes}\{x \in \Omega: a_0(x) \geq a_* > 0\} + \text{mes}\{x \in \partial\Omega: \sigma(x) \geq \sigma_0 > 0\} > 0$.

Die Matrix $a_{ij}(x)$ sei für fast alle $x \in \Omega$ symmetrisch und positiv definit:

$$\sum_{i,j=1}^3 a_{ij}(x) y_i y_j \geq \lambda_{\min}(x) \sum_{i=1}^3 y_i^2 \quad \forall y \in \mathbb{R}^3, \quad \lambda_{\min}(x) \geq \lambda_{\min}^0 > 0$$

Das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ sei zusammenhängend und beschränkt, die Oberfläche $\partial\Omega$ sei stückweise glatt.

1.4.8. Die betrachteten Probleme mit natürlichen Randbedingungen. Aus der in 1.4.7. beschriebenen Problemklasse werden diejenigen betrachtet, für die gilt:

(i) Ω besitzt die Eigenschaften wie in 1.4.4.

(ii) Die Lösung u besitzt die folgenden Eigenschaften:

$$u(x) = u_s(x) + w(x) \quad \text{mit} \quad u_s(x) = \xi(r) r^{\lambda} \Phi(\varphi) \chi(x),$$

wobei $u \in W^{1+\alpha,2}(\Omega)$ für $\alpha < \lambda$, $w \in W^{2,2}(\Omega)$, $\chi \in W_{\lambda}^{2,2}(\Omega)$, $\Phi \in C^{\infty}[0, \omega]$,

$$u \in W^{2,2}(\Omega_{\delta}) \quad (\Omega_{\delta} = \{x \in \Omega: \text{dist}(x, M) > \delta > 0\}),$$

$$\|\chi; W_{\lambda}^{2,2}(\Omega)\| + \|w; W^{2,2}(\Omega)\| \leq C \|f; L_2(\Omega)\|.$$

Dabei sind

r, φ ... Polarkoordinaten senkrecht zur Kante M

$\xi(\cdot)$... glatte Abschneidefunktion (vgl. Kap. 1.1.2.)

$\chi(\cdot)$... Koeffizientenfunktion

$\Phi(\cdot)$... Eigenfunktion eines Sturm-Liouville-Problems, das von der Geometrie des Gebiets Ω und vom Differentialoperator, jedoch nicht von der rechten Seite f abhängt

λ ... reelle Zahl, $\frac{1}{2} < \lambda < 1$, Eigenwert des o.g. Problems

ω ... (nicht notwendig konstanter) Öffnungswinkel der Kante

u_s und w werden als singulärer bzw. regulärer Anteil der Lösung bezeichnet.

1.4.9. Bemerkung. Die in 1.4.8. beschriebene Problemklasse ist nicht leer. Gilt z.B. $a_{ij}(x) = \delta_{ij}$ (Kronecker-Symbol) und betrachten wir Ω wie in 1.4.1., so hat die Lösung alle geforderten Eigenschaften [Roßmann 1990]. Auch hier sei auf Kap. 3.6. verwiesen, in dem die Klasse der Gebiete erweitert wird.

1.4.10. Das approximierende Problem. Analog zu 1.4.6. ersetze man in 1.4.7. V durch V_h (genaue Definition in 3.2.6.). Gesucht ist $u_h \in V_h$, so daß $a(u_h, v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in V_h$.

Das Dirichletproblem für Polyedergebiete.

1.4.11. Die betrachteten Probleme. Betrachtet werden Dirichletprobleme 1.4.3. über Polyedergebieten (mit ebenen Randflächen und ohne Risse), deren Lösung u im Raum $V_{\alpha, \beta}^{2,2}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ liegt, wobei gilt:

$$\|u; V_{\alpha, \beta}^{2,2}(\Omega)\| \leq C \|f; L_2(\Omega)\|,$$

$$b_e \in [0, \frac{1}{2}) \quad \forall e \in \mathcal{E} \quad \text{und} \quad a_q + \sum_{\{e: q \in \mathcal{E}\}} b_e \in [0, \frac{1}{2}) \quad \forall q \in \mathcal{E}.$$

Dabei bezeichnen \mathcal{E} die Menge der Ecken (corners) und \mathcal{E} die Menge der Kanten (edges). Die Definition des Raumes $V_{\alpha, \beta}^{2,2}(\Omega)$ erfolgt in 2.1.2.(iii).

1.4.12. Das approximierende Problem. Analog zu 1.4.6. wird in der Aufgabenstellung 1.4.3. der Raum V_0 durch den endlich-dimensionalen Raum V_{0h} (definiert in 3.5.4.) ersetzt.

1.5. Ergebnisse

1.5.1. Der Schwerpunkt der vorliegenden Dissertation liegt in der Begründung effektiver Varianten der Finite-Elemente-Methode für Randwertaufgaben, deren Lösung Singularitäten besitzen. Dabei werden nur Finite-Elemente-Räume mit linearen Ansatzfunktionen betrachtet.

(i) Netzverfeinerung. Es wurden für die Kantenprobleme 1.4.4./1.4.6. und 1.4.8./1.4.10. mit einem Parameter $\mu \in (0,1]$ gesteuerte Netze untersucht, für die gilt:

$$h_{\Delta} \sim r_{\Delta}^{1-\mu}, \text{ falls } r_{\Delta} > 0 \text{ bzw. } h_{\Delta} \sim h^{1/\mu}, \text{ falls } r_{\Delta} = 0.$$

Dabei bezeichne Δ ein beliebiges Element der Vernetzung, r_{Δ} dessen Abstand zur Kante M und h_{Δ} dessen Durchmesser. Für die Lösungen u der beiden betrachteten Probleme wurden mit Hilfe des Interpolationsoperators approximierende Funktionen $v_h \in V_{0h}$ (bzw. V_h) konstruiert, für die die folgenden Fehlerabschätzungen gezeigt werden konnten:

$$\|u - v_h; W^{1,2}(\Omega)\| \leq \begin{cases} Ch \|f; L_2(\Omega)\| & \text{für } \mu < \lambda \\ Ch^{(\lambda-\varepsilon)/\mu} \|f; L_2(\Omega)\| & \text{für } \mu \geq \lambda \end{cases}$$

$$\|u - v_h; L_2(\Omega)\| \leq \begin{cases} Ch^2 \|f; L_2(\Omega)\| & \text{für } \mu < \frac{1}{2}(1+\lambda) \\ Ch^{(1+\lambda-\varepsilon)/\mu} \|f; L_2(\Omega)\| & \text{für } \mu \geq \frac{1}{2}(1+\lambda) \end{cases}$$

Dabei sind ε eine beliebig kleine positive reelle Zahl und h der globale Diskretisierungsparameter. Mit Hilfe des Lemmas von Ceá und der Methode von Nitsche können daraus Abschätzungen für die Differenz zwischen der exakten Lösung u und der Finite-Elemente-Lösung u_h gewonnen werden:

$$\|u - u_h; W^{1,2}(\Omega)\| \leq \begin{cases} Ch \|f; L_2(\Omega)\| & \text{für } \mu < \lambda \\ Ch^{(\lambda-\varepsilon)/\mu} \|f; L_2(\Omega)\| & \text{für } \mu \geq \lambda \end{cases}$$

$$\|u - u_h; L_2(\Omega)\| \leq \begin{cases} Ch^2 \|f; L_2(\Omega)\| & \text{für } \mu < \lambda \\ Ch^{2(\lambda-\varepsilon)/\mu} \|f; L_2(\Omega)\| & \text{für } \mu \geq \lambda \end{cases}$$

Zu bemerken ist dabei, daß die Anzahl der Elemente in der Vernetzung für $\mu > \frac{1}{3}$ in der Größenordnung h^{-3} liegt, d.h., es tritt keine Erhöhung gegenüber unverfeinerten Netzen ein.

Ähnliche Aussagen können für das Problem im Polyedergebiet 1.4.11./1.4.12. getroffen werden; hier sind zusätzlich Ecken-singularitäten zu behandeln.

(ii) Unverfeinerte Netze. Aus den unter (i) beschriebenen Abschätzungen folgt, daß für den Fehler im unverfeinerten Netz ($\mu=1$) die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$\|u - u_h; W^{1,2}(\Omega)\| \leq Ch^{\lambda-\varepsilon} \|f; L_2(\Omega)\|.$$

Es gelingt zum einen, die Optimalität dieser Fehlerabschätzung in dem Sinne zu zeigen, daß man in der betrachteten Klasse Aufgaben finden kann, für die gilt:

$$\|u - u_h; W^{1,2}(\Omega)\| \geq Ch^\lambda.$$

Andererseits erweist es sich, daß die verminderte Approximationsordnung nur durch die lokale Singularität bedingt ist. Für Teilgebiete Ω_- , die die Kante nicht enthalten, kann man die folgende Abschätzung beweisen:

$$\|u - u_h; W^{1,2}(\Omega_-)\| \leq Ch \|f; L_2(\Omega)\|.$$

(iii) Fenstertechnik. Mit Hilfe des in (ii) formulierten Resultats für Teilgebiete ist es möglich, eine schon in 1.3.4.(ii) angedeutete zweistufige Fenstertechnik auch für den dreidimensionalen Fall mathematisch zu begründen:

Man löst zunächst das Finite-Elemente-Problem im Gesamtgebiet über einem unverfeinerten Netz und verbessert dann die Näherungslösung, indem man ein zweites Problem über einem verfeinerten Netz lokal in der Umgebung der Kante löst. Die fehlenden Randbedingungen werden mit Hilfe der Lösung des ersten Schritts generiert.

Für die so bestimmte Näherungslösung u_h gilt:

$$\|u - u_h; W^{1,2}(\Omega)\| \leq Ch \|f; L_2(\Omega)\|.$$

(iv) Testrechnungen. Es wurden anhand von drei Randwertproblemen zahlreiche Testrechnungen durchgeführt. Bei der Aufgabenstellung wurde Wert darauf gelegt, daß die Lösungen keine wesentlich besseren Eigenschaften besitzen, als sie für den Beweis der Fehlerabschätzungen vorausgesetzt wurden.

Rechnungen mit verschiedenen Schrittweiten gestatteten eine Schätzung der Approximationsordnung. Die Ergebnisse bestätigen die theoretisch gezeigten asymptotischen Werte bereits bei relativ grober Schrittweite.

Durch die Tests mit jeweils 9 verschiedenen stark verfeinerten Netzen wurden Erfahrungen bezüglich der Wahl des Netzsteuerparameters μ gesammelt. Dabei zeigte sich, daß es günstig ist, stärker als unbedingt für die optimale Konvergenzordnung notwendig zu verfeinern. Man sollte also μ nicht zu nahe an λ wählen (vgl. die Fehlerabschätzungen in (i)).

(v) Kondition der Steifigkeitsmatrix. Es konnte gezeigt werden, daß die Konditionszahl der Steifigkeitsmatrix bei verfeinerten Netzen in der Ordnung h^{-2} liegt, falls für den Parameter $\mu > \frac{1}{2}$ gilt. D.h., die Kondition verschlechtert sich gegenüber unverfeinerten Netzen nicht.

(vi) Anisotrope Elemente. Aufbauend auf Ideen von Dobrowolski [1989b], führte die Untersuchung von Simplexelementen, deren Ausdehnung in verschiedenen Richtungen von unterschiedlicher Größenordnung ist, zu neuen lokalen Interpolationsfehlerabschätzungen.

Für Simplexelemente Δ mit N achsenparallelen Kanten konnten für alle $v \in W^{2,2}(\Delta)$ die folgenden Ungleichungen gezeigt werden:

$$|v - \Pi v; W^{1,p}(\Delta)| \leq C(\hat{\Delta}) \sum_{i,j=1}^N h_j \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right\|; L_p(\Delta)$$

falls $N=2$ oder $p > 2$ und

$$\|v - \Pi v; L_q(\Delta)\| \leq C(\hat{\Delta}) (h_1 h_2 h_3)^{1/q-1/p} \sum_{i,j=1}^N h_i h_j \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right\|; L_p(\Delta)$$

für beliebige $p, q \in [1, \infty)$.

Dabei sind Π der Operator der (affin) linearen Interpolation, h_i ($i=1..N$) die Ausdehnung von Δ in Richtung der Koordinatenachsen und $N \in \{2, 3\}$ die Raumdimension.

Für den globalen Interpolationsfehler bei anisotroper Vernetzung in der Umgebung von Kanten steht allerdings eine Abschätzung noch aus.

1.5.2. Beweistechniken. Der Grundgedanke der globalen Interpolationsfehlerabschätzungen besteht in der Summation der lokal über den einzelnen Elementen abgeschätzten Fehler. Für Elemente Δ , die einen leeren Durchschnitt mit der Ecke/Kante haben, kann bei den betrachteten Aufgaben ausgenutzt werden, daß die Lösung dort regulär, d.h., in $W^{2,2}(\Delta)$ ist. Die übrigen Elemente müssen gesondert behandelt werden, und hier unterscheiden sich auch die Autoren: Grisvard [1985, Kap.8.4.], Sändig [1990] und Fritzsche [1989, Kap. 3.3.] nutzen dabei die Zugehörigkeit der Lösung zu gewichteten Sobolevräumen, während von Kufner und Sändig [1987, §17] gewöhnliche Sobolevräume mit einer Summierbarkeit $p \neq 2$ genutzt werden.

In der vorliegenden Arbeit wird eine weitere Beweistechnik vorgestellt. Die Idee ist der Monographie von Оганесян und Руховец [1979, §2.4] entnommen und wurde hier vom Zwei- ins Dreidimensionale und auf den Fall graduerter Netze übertragen. Sie besteht darin, die Lösungsfunktion vor der Interpolation zunächst zu mitteln und damit ihre Glattheit zu erhöhen. Dieser Zugang ist auch für die Approximationsfehleruntersuchung unstetiger $W^{1,2}(\Omega)$ -Funktionen durchführbar und unterscheidet sich von der in [Fritzsche 1989] für unstetige Lösungen vorgeschlagenen Quasiinterpolation.

Damit wurde ein Weg aufgezeigt, die Netzgraduierung im Dreidimensionalen auch für Singularitätenexponenten $\lambda \leq \frac{1}{2}$, wie sie bei gemischten Randbedingungen und Interface-Problemen auftreten können, zu begründen. Diese Probleme werden jedoch in der Arbeit nicht behandelt.

1.5.3. Die weitgehende Beschränkung auf Kantensingularitäten mag zwar zunächst als Vereinfachung erscheinen, sie schließt jedoch ein, daß das Gebiet Ω gekrümmte Ränder besitzt und somit nicht exakt mit Simplizes vernetzbar ist. In dieser Auseinandersetzung mit der Randapproximation, die bei konformen Finite-Elemente-Methoden differenziert für wesentliche und natürliche Randbedingungen betrachtet werden muß, liegt einer der Unterschiede zur Arbeit von Fritzsche [1989].

Während noch vor wenigen Jahren konstatiert werden mußte, daß Netzverfeinerungstechniken im Dreidimensionalen zwar angewendet werden, aber noch nicht begründet werden konnten [Whiteman 1987] (vgl. auch 1.3.5.), sind nun zusammen mit der Arbeit von Fritzsche [1989] wesentliche Beiträge geleistet. Vermutlich wirft die Fehlerabschätzung für weitere Klassen von Randwertaufgaben keine neuen Probleme auf. Gedacht ist dabei zunächst an Konusgebiete und allgemeinere Randbedingungen bei Aufgaben über Polyedergebieten.

Bedeutsam scheinen die Abschätzungen für Elemente, deren Inkugeldurchmesser schneller als der Umkugeldurchmesser gegen Null geht. Möglicherweise ist damit die Voraussetzung geschaffen, sich der Untersuchung anisotroper Vernetzungen erfolgreich zuzuwenden.

2. Analytische Grundlagen

2.1. Funktionalräume und Einbettungssätze

2.1.1. Grundlegende Bezeichnungen. In diesem Kapitel sei $u(x)$ eine Funktion, die über einem (offenen, zusammenhängenden) Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ definiert ist. Der Rand $\partial\Omega$ sei aus $C^{0,1}$, d.h., er kann lokal durch eine Lipschitz-stetige Funktion in $N-1$ Variablen beschrieben werden.

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ sei ein Multiindex und $D^\alpha u := \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_N} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}$ bezeichne die entsprechende Ableitung von u im Sinne der Distributionen.

2.1.2. Funktionalräume. (i) Räume stetiger Funktionen. Es bezeichnen $C(\bar{\Omega})$ den Raum der auf $\bar{\Omega}$ stetigen Funktionen und $C^\infty(\bar{\Omega})$ den Raum der beliebig oft über $\bar{\Omega}$ (klassisch) differenzierbaren Funktionen. Weiterhin werden definiert (vgl. [Kufner/Sändig 1987, Kap. 0.5.]):

$$C_0^\infty(\Omega) := \{u \in C^\infty(\bar{\Omega}) : \text{supp } u \subset \Omega\}$$

$$C_M^\infty(\Omega) := \{u \in C^\infty(\bar{\Omega}) : \text{supp } u \cap M = \emptyset\}$$

Dabei ist M zunächst eine beliebige Teilmenge von $\partial\Omega$. In $C(\bar{\Omega})$ wird wie üblich die Maximumnorm verwendet.

(ii) Klassische Sobolevräume. Für $1 \leq p < \infty$ sei

$$L_p(\Omega) := \left\{ u(x) : \|u; L_p(\Omega)\| := \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

und $L_\infty(\Omega) := \{u(x) : \|u; L_\infty(\Omega)\| := \sup_{x \in \Omega} |u(x)| < \infty\}$

Für $1 \leq p < \infty$ und $k \in \mathbb{N}$ sei

$$W^{k,p}(\Omega) := \left\{ u(x) : \|u; W^{k,p}(\Omega)\| := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

(iii) Sobolevräume mit Gewicht. Sei M eine Teilmenge von $\partial\Omega$ und $r = r(x) = \text{dist}(x, M)$, dann werden folgende Räume für $k \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p < \infty$ definiert [Kufner/Sändig 1987, Kap 0.]:

$$W_\mu^{k,p}(\Omega) := \left\{ u(x) : \|u; W_\mu^{k,p}(\Omega)\| := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega r^{p\mu} |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

$V_\mu^{k,p}(\Omega)$ ist die Vervollständigung von $C_M^\infty(\Omega)$ bezüglich der Norm $\|u; V_\mu^{k,p}(\Omega)\| := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega r^{p(\mu - k + |\alpha|)} |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{1/p}$

In Polyedergebieten wird der Raum $V_{a,\beta}^{k,p}(\Omega)$ benötigt. Es bezeichnen \mathcal{E} die Menge der Eckpunkte (corners), \mathcal{E} die Menge der Kanten (edges) und M die Vereinigungsmenge aller Ecken und Kanten. Weiterhin seien $r_e = r_e(x) = \text{dist}(x, e)$, $e \in \mathcal{E}$, $\varrho_q = \varrho_q(x) = \text{dist}(x, q)$, $q \in \mathcal{E}$ und wie immer $r = r(x) = \text{dist}(x, M)$. Schließlich seien $a = (a_q)_{q \in \mathcal{E}}$ und $\beta = (\beta_e)_{e \in \mathcal{E}}$ Vektoren reeller Zahlen, k eine

natürliche Zahl und $p \geq 1$ eine reelle Zahl. $V_{\alpha, \delta}^{k,p}(\Omega)$ wird dann als Vervollständigung von $C_M^{\infty}(\Omega)$ bezüglich der Norm

$$\|u; V_{\alpha, \delta}^{k,p}(\Omega)\| := \left(\int_{\Omega} \prod_q \varrho_q^{p\alpha} \prod_{\{e: q \in \mathbb{Z}\}} r_e^{pb_e} \sum_{|\alpha| \leq k} r^{p(|\alpha|-k)} |D^{\alpha} u|^p dx \right)^{1/p}.$$

definiert [Мазья/Пламеневский 1983а].

(iv) Halbnormen. Als Halbnormen werden stets die Normanteile mit den höchsten partiellen Ableitungen betrachtet:

$$|u; W^{k,p}(\Omega)| := \left(\sum_{|\alpha|=k} \int_{\Omega} |D^{\alpha} u(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

$$|u; W_{\mu}^{k,p}(\Omega)| = |u; V_{\mu}^{k,p}(\Omega)| := \left(\sum_{|\alpha|=k} \int_{\Omega} r^{p\mu} |D^{\alpha} u(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

(v) Sobolev-Slobodezkij-Räume. Sobolev-Slobodezkij-Räume (mit Gewicht) $W^{s,p}(\Omega)$, $W_{\mu}^{s,p}(\Omega)$ und $V_{\mu}^{s,p}(\Omega)$ sind eine Verallgemeinerung der Sobolev-Räume (mit Gewicht), d.h., sie stimmen für $s=k+\delta$, $k \in \mathbb{N}$, $\delta \in (0,1)$, $p \in [1, \infty)$, wird definiert [Roßmann 1988, Kap.1]:

$$W^{s,p}(\Omega) := \left\{ u(x) : \|u; W^{s,p}(\Omega)\| := \right.$$

$$\left. := \left(\|u; W^{k,p}(\Omega)\|^p + \sum_{|\alpha|=k} \iint_{\Omega \Omega} \frac{|D^{\alpha} u(x) - D^{\alpha} u(y)|^p}{|x-y|^{N+p\delta}} dx dy \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

$$W_{\mu}^{s,p}(\Omega) := \left\{ u(x) : \|u; W_{\mu}^{s,p}(\Omega)\| := \right.$$

$$\left. := \left(\|u; W_{\mu}^{k,p}(\Omega)\|^p + \sum_{|\alpha|=k} \iint_{\Omega \Omega_y} (r(y))^{p\mu} \frac{|D^{\alpha} u(x) - D^{\alpha} u(y)|^p}{|x-y|^{N+p\delta}} dx dy \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

$$\Omega_y := \{x \in \Omega : \text{dist}(x, y) < \frac{1}{2} r(y)\}$$

$V_{\mu}^{s,p}(\Omega)$ ist die Vervollständigung von $C_M^{\infty}(\Omega)$ bezüglich der Norm

$$\|u; V_{\mu}^{s,p}(\Omega)\| := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} r^{p(\mu-s+|\alpha|)} |D^{\alpha} u(x)|^p dx + \right.$$

$$\left. + \sum_{|\alpha|=k} \iint_{\Omega \Omega} \frac{|(r^{\mu}(x) D^{\alpha} u(x) - r^{\mu}(y) D^{\alpha} u(y))|^p}{|x-y|^{N+p\delta}} dx dy \right)^{1/p}$$

(vi) Bemerkung. Es können auch gewichtete Sobolev-(Slobodezkij-)Räume mit allgemeinerer Gewichtsfunktion definiert werden. Deren Anwendungsgebiet liegt jedoch mehr bei Randwertaufgaben mit "nichtregulären" Koeffizienten und rechten Seiten [Kufner/Sändig 1987, Teil II].

2.1.3. Einbettungssätze. (i) Definition. Für 2 Banachräume X und Y bezeichnet $X \hookrightarrow Y$ die stetige Einbettung von X in Y , d.h.,

$$X \subset Y \quad \text{und} \quad \exists C > 0 \quad \forall u \in X \quad \|u; Y\| \leq C \|u; X\|.$$

C ist i.allg. vom Gebiet abhängig.

(ii) Satz. Ist $N < pl$, dann $W^{l,p}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$.

[Smirnow 1988, Kap.117]

(iii) Satz. Es gilt für $p, q, s, t \in \mathbb{R}$, $k, l \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} W^{k,p}(\Omega) &\subset L_q(\Omega) && \text{für } p \geq 1, kp < N, 1/q = 1/p - k/N && [\text{Nečas 1967, 2.3.4.}] \\ W^{k,p}(\Omega) &\subset L_q(\Omega) && \text{für } p \geq 1, kp = N, 1 \leq q < \infty && [\text{Nečas 1967, 2.3.4.}] \\ W^{s,p}(\Omega) &\subset W^{t,p}(\Omega) && \text{für } t \leq s && [\text{Wloka 1982, §1.6}] \\ W^{s,p}(\Omega) &\subset W^{s,q}(\Omega) && \text{für } p \geq q && (\text{folgt aus Hölder-Ungleichung}) \\ W^{k,p}(\Omega) &\subset W^{l,q}(\Omega) && \text{für } 1 \leq p < \infty, 0 \leq l < k, 1/p - (k-l)/N \leq 1/q < 1 && [\text{Gajewski et al. 1974, §2.1}] \end{aligned}$$

(iv) Satz. Sei $m = \dim M$. Es gilt für $p, q, s, t, \mu, \lambda \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} V_{\mu}^{k,p}(\Omega) &\subset V_{\mu-1}^{k-1,p}(\Omega) && (\text{folgt direkt aus der Definition}) \\ V_{\mu}^{k,p}(\Omega) &\subset V_{\lambda}^{k,p}(\Omega) && \text{für } \mu < \lambda && [\text{Kufner/Sändig 1987, 0.10.}] \\ V_{\mu}^{k,p}(\Omega) &\subset V_{\lambda}^{k,q}(\Omega) && \text{für } p \geq q, \mu + (N-m)/p < \lambda - (N-m)/q && [\text{Kufner/Sändig 1987, 0.10.}] \\ W_{\mu}^{k,p}(\Omega) &\subset W_{\mu-k}^{0,p}(\Omega) && \text{für } \mu > k \bar{*} (N-m)/p && [\text{Kufner/Sändig 1987, 0.11.}] \\ &&& && [\text{Edmunds et al. 1985}] \\ W_{\mu}^{s,p}(\Omega) &\subset W_{\lambda}^{t,p}(\Omega) && \text{für } s > t, s - \mu = t - \lambda, \lambda > -2/p, N=3, m=1 && [\text{Roßmann 1988, Kap. 1.}] \\ W_{\mu}^{s,p}(\Omega) &\subset W_{\lambda}^{s,p}(\Omega) && \text{für } \mu \leq \lambda && (\text{folgt aus Beschränktheit von } r^{\lambda-\mu}) \\ V_{\mu}^{s,p}(\Omega) &\subset W_{\mu}^{s,p}(\Omega) && (\text{folgt aus Beschränktheit von } r^{\alpha} \text{ für } \alpha > 0) \\ W_{\mu}^{s,p}(\Omega) &\subset V_{\mu}^{s,p}(\Omega) && \text{für } \mu - s > -2/p \text{ oder } \mu < -2/p && [\text{Roßmann 1988, Kap. 1.}] \end{aligned}$$

2.1.4. Drei Hilfssätze. Es gilt für $N=3$, $m=1$:

(i) Lemma. Wenn $u \in V_{\mu}^{s,p}(\Omega)$, dann $r^{\lambda} u \in V_{\mu-\lambda}^{s,p}(\Omega)$

[Roßmann 1988, Kap 1.1.]

(ii) Lemma. Wenn $u \in W_{\lambda}^{2,2}(\Omega)$, $0 < \lambda < 1$, dann $r^{\lambda} u \in W^{1+\lambda-\varepsilon,2}(\Omega) \forall \varepsilon > 0$.

Beweis. [Sändig 1989]: Mit Hilfe der Einbettungen 2.1.3.(iv) und Hilfssatz (i) erhält man

$$\begin{aligned} \|r^{\lambda} u; W^{1+\lambda-\varepsilon,2}(\Omega)\| &= \|r^{\lambda} u; W_0^{1+\lambda-\varepsilon,2}(\Omega)\| \leq C \|r^{\lambda} u; V_0^{1+\lambda-\varepsilon,2}(\Omega)\| \\ &\leq C \|u; V_{\lambda}^{1+\lambda-\varepsilon,2}(\Omega)\| \leq C \|u; W_{\lambda}^{1+\lambda-\varepsilon,2}(\Omega)\| \\ &\leq C \|u; W_{1+\varepsilon}^{2,2}(\Omega)\| \leq C \|u; W_{\lambda}^{2,2}(\Omega)\| \quad \blacksquare \end{aligned}$$

(iii) Lemma. Seien $x_0 \in \Omega$ ein beliebiger Punkt, $R = \text{dist}(x_0, M)$ dessen Abstand zu M und $B = B(x_0, \frac{1}{2}R)$ eine Kugel mit dem Mittelpunkt x_0 und dem Radius $\frac{1}{2}R$. Dann gilt unter der Voraussetzung $kp > N$ und $\mu \geq 0$ für alle $g \in V_{\mu}^{k,p}(B)$:

$$\|g; C(\bar{B})\| \leq CR^{k-\mu-N/p} \|g; V_{\mu}^{k,p}(B)\|.$$

Beweis (vgl. [Fritzsche 1989, Kap. 3.3.]), Infolge der für $kp > N$ gültigen Einbettung $V_\mu^{k,p}(B) \hookrightarrow W_\mu^{k,p}(B) \hookrightarrow W^{k,p}(B) \hookrightarrow C(\bar{B})$ ist g eine auf \bar{B} stetige Funktion. Sie wird auf die Einheitskugel B_0 transformiert, die Einbettung $W^{k,p}(B) \hookrightarrow C(\bar{B})$ ausgenutzt und rücktransformiert. Man erhält folgende Ungleichung:

$$\|g; C(\bar{B})\|^p \leq C(B_0) \sum_{l=0}^k R^{p(l-N)} |g; W^{l,p}(B)|^p$$

Da der Abstand r eines beliebigen Punktes $x \in B$ zu M in der Größenordnung R liegt, folgt

$$|g; W^{l,p}(B)|^p \leq CR^{p(k-l-\mu)} \int_B r^{p(\mu-k+l)} \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha g|^p dx.$$

In die obige Gleichung eingesetzt, erhält man die Behauptung. ■

2.1.5. Bemerkung. Einige Autoren verwenden andere gewichtete Räume. Kondratyev [1977] verwendet z.B. einen Raum mit der Norm

$$\|u\| := \left(\sum_{1 \leq |\alpha| \leq k} \int_\Omega r^{\mu-2(k-|\alpha|)} |D^\alpha u(x)|^2 dx + \|u; L_2(\Omega)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

der jedoch für $\mu \geq 0$ in $\|u; W_{\mu/2}^{k,2}(\Omega)\|$ stetig eingebettet ist (folgt unmittelbar aus der Beschränktheit von r^ε für $\varepsilon > 0$).

2.1.6. Spursätze. (i) Bezeichnung. Seien $M \subset \bar{\Omega}$ eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit und $X(\cdot)$ und $Y(\cdot)$ Banachräume. Falls für eine Funktion $u \in X(\Omega)$ ein eindeutig bestimmter, stetiger, linearer Spuroperator $\mathcal{R}: X(\Omega) \rightarrow Y(M)$ existiert, so daß für alle $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ die Beziehung $\mathcal{R}u = u|_M$ erfüllt ist, dann soll im folgenden das gleiche Symbol wie bei der Einbettung in 2.1.3. verwendet werden:

$$Y(\Omega) \hookrightarrow X(M)$$

(ii) Satz. Für $k, l \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, $p, q \in \mathbb{R}$, $p, q \geq 1$ gilt:

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L_q(\partial\Omega) \quad \text{für } kp < N, \quad q \leq p(N-1)/(N-kp) \quad [\text{Kufner et al. 1977, 6.4.}]$$

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L_q(\partial\Omega) \quad \text{für } kp \geq N \quad [\text{Kufner et al. 1977, 6.4.}]$$

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{l,q}(M) \quad \text{für } 1 < p \leq q, \quad 1 \leq k - N/p + m/q, \quad 1 \leq m \leq N \quad [\text{Kufner et al. 1977, 8.1.}]$$

(iii) Satz. Für $p, s, t \in \mathbb{R}$, $p > 1$, $s > 0$, $1 \leq m < N$, $t = s - (N-m)/p > 0$ gilt:

$$W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{t,p}(M) \quad \text{für } p \leq 2 \quad [\text{Kufner et al. 1977, 8.3.}]$$

$$W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{t,p}(M) \quad \text{für } p > 2, \quad t \notin \mathbb{N} \quad [\text{Kufner et al. 1977, 8.3.}]$$

(iv) Bemerkung. Die dritte Aussage in (ii) enthält für $m=N$ einen Einbettungssatz.

2.2. Koordinatensysteme und -transformation

2.2.1. (y_1, y_2, y_3) . (i) In 1.4.4. wurden bereits eine Mannigfaltigkeit M definiert und Forderungen an das Gebiet Ω gestellt. Dadurch ist es möglich, eine endliche Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von Ω mit folgenden Eigenschaften zu betrachten (vgl. [Kufner/Sändig 1987, §26.1]):

- Wenn $U_i \cap M = \emptyset$, dann ist U_i ein glatt berandetes oder/und konvexes Gebiet. (Das bedeutet, U_i darf auch Ecken und Kanten besitzen, allerdings nur solche, die nicht zu Lösungssingularitäten führen.)
- Wenn $U_i \cap M \neq \emptyset$, dann ist U_i diffeomorph zu einem beschränkten Teil eines Dieders D_i .

In D_i wird ein Koordinatensystem (y_1, y_2, y_3) eingeführt, so daß $D_i = \{(y_1, y_2, y_3) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, \xi) \in \mathbb{R}^3 : 0 < r < \infty, 0 < \varphi < \omega_i, -\infty < \xi < \infty\}$

(ii) Weiterhin wird eine Zerlegung der Eins entsprechend der in (i) gewählten Überdeckung betrachtet. Es ist nun möglich, Gebietsintegrale über Ω in eine Summe von Integralen über die U_i zu zerlegen, diese einzeln abzuschätzen und wieder zu einem Integral zusammenzufügen. Bei der Abschätzung der Integrale über U_i mit $U_i \cap M \neq \emptyset$ wird häufig eine Transformation in die Koordinaten (y_1, y_2, y_3) und zurück genutzt.

Wenn keine Mißverständnisse entstehen können, wird der Einfachheit halber die Beschreibung des Zerlegens und Zusammenfügens weggelassen.

(iii) Aus der Voraussetzung des Diffeomorphismus zwischen U_i und D_i folgt die Existenz einer Konstanten C , so daß für beliebige Multiindizes $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

$$\left| \frac{\partial^{|\alpha|} x_i}{\partial y^\alpha} \right| < C \quad \text{und} \quad \left| \frac{\partial^{|\alpha|} y_i}{\partial x^\alpha} \right| < C,$$

und somit sind auch die Jacobischen Funktionaldeterminanten

$$\frac{\partial(y_1, y_2, y_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} \quad \text{und} \quad \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(y_1, y_2, y_3)}$$

beschränkt (vgl. auch [Wloka 1982, §2.3]).

2.2.2. Zylinderkoordinaten. Für den Übergang zu Zylinderkoordinaten $(y_1, y_2, y_3) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, \xi)$ gilt:

$$\frac{\partial(y_1, y_2, y_3)}{\partial(r, \varphi, \xi)} = r \quad \text{und} \quad \exists C > 0: \left| \frac{\partial r}{\partial y_i} \right| \leq C, \quad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \right| \leq \frac{C}{r}, \quad \left| \frac{\partial^2 r}{\partial y_i \partial y_j} \right| \leq \frac{C}{r}, \quad \left| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_i \partial y_j} \right| \leq \frac{C}{r^2}$$

($i, j = 1, 2$) (Beweis durch Nachrechnen).

2.3. Randwertaufgaben. Existenz und Eindeutigkeit der Lösung.

2.3.1. Satz (Lax/Milgram). Sei H ein Hilbertraum und f ein Element des dualen Raums H^* . Sei weiter $a(.,.): H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ eine Bilinearform, für die gilt:

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq C_1 \|u; H\| \|v; H\| && \forall u,v \in H && \text{(Beschränktheit)} \\ a(u,u) &\geq C_2 \|u; H\|^2 && \forall u \in H && \text{(Elliptizität)} \end{aligned}$$

Dann existiert genau ein Element $u \in H$, so daß

$$a(u,v) = (f,v) \quad \forall v \in H.$$

Der Satz ist z.B. in [Ciarlet 1978, §1.1.1] bewiesen.

2.3.2. Folgerung. Die allgemeinen Probleme 1.4.3. und 1.4.7. besitzen eine eindeutige Lösung $u \in V_0$ bzw. V .

Beweis. Der Beweis erfolgt mit Hilfe von Satz 2.3.1., indem man die Voraussetzungen prüft. Für 1.4.3. ist das in [Ciarlet 1978, §1.1.2] ausgeführt. Analog behandelt man 1.4.7., nur benötigt man hier die Poincaré-Ungleichung in der Form

$$\|u; W^{1,2}(\Omega)\|^2 \leq C (\|u; W^{1,2}(\Omega)\|_T^2 + \|u; L_2(\Omega_T)\|^2 + \|u; L_2(\Gamma_T)\|^2),$$

wobei $\Omega_T \subset \Omega$, $\Gamma_T \subset \partial\Omega$, $\text{mes}\Omega_T + \text{mes}\Gamma_T > 0$ und $C = C(N, \Omega, \Omega_T, \Gamma_T)$. Diese Ungleichung folgt unmittelbar aus Lemma 1.36 in [Gajewski et al. 1974, §2.1] (vgl. auch 3.1.8.(iii)). ■

2.3.3. Folgerung. Die approximierenden Probleme 1.4.6., 1.4.10. und 1.4.12. besitzen eine eindeutige Lösung.

Beweis. V_{0h} und V_h sind endlichdimensionale Unterräume von V_0 bzw. V . (Die Menge der auf Ω eingeschränkten Funktionen aus V_h wird mit V_h identifiziert.) Der Nachweis der Beschränktheit und Elliptizität der Bilinearform bezüglich der Unterräume erfolgt wie in 2.3.2. ■

2.4. Fortsetzung von Funktionen über den Rand hinaus

2.4.1. Definition. Seien G ein Gebiet, $G_+ \supset G$ ein umfassenderes Gebiet, $H(G)$ ein Funktionenraum über G und $g \in H(G)$ eine beliebige Funktion. Dann heißt $g_+ = Fg$ Fortsetzung von G auf G_+ , wenn gilt:

- (i) $Fg \in H(G_+)$
- (ii) $(Fg)(x) = g(x) \quad \forall x \in G$

Gilt zusätzlich

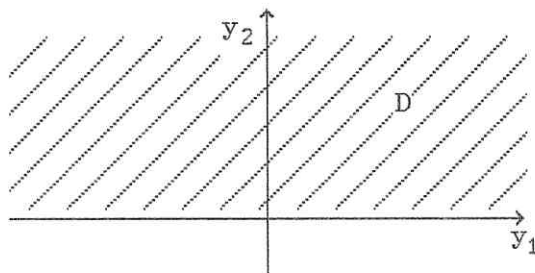
- (iii) $\exists C: \|Fg; H(G_+)\| \leq C \|g; H(G)\|,$

dann soll Fg als beschränkte Fortsetzung bezeichnet werden.

2.4.2. Für $H(G) = C^k(\bar{G})$ ist die Fortsetzung in Arbeiten von Whitney und Hestenes behandelt [Michlin 1976, §2.2]. Dieser Zugang ist auch für die klassischen Sobolevräume in dem Sinne anwendbar, daß Fg beschränkte $W^{k,p}$ -Fortsetzung von g ist, wenn sie C^k -Fortsetzung ist (vgl. [Оганесян/Руховец 1979, §1.3]). Für $W^{k,p}$ ist auch ein allgemeineres Resultat von Calderon bekannt; hier wird die Sobolevsche Integraldarstellung ausgenutzt [Michlin 1976, §2.2].

Resultate für die Fortsetzung von Funktionen aus Sobolevräumen mit Gewicht wurden nur in einem Artikel von Кондратьев [1977] gefunden. Dort werden jedoch in äußerst knapper Darstellung andere gewichtete Räume über Diedergebieten betrachtet. Deshalb soll in diesem Kapitel der klassische Zugang nach Whitney und Hestenes, angewandt auf die in 2.1.2.(iii) eingeführten Sobolevräume mit Gewicht, ausführlich studiert werden.

2.4.3. (i) Lemma. Ist $D = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : y_2 > 0\}$, $g \in W_\mu^{k,p}(D)$ oder $V_\mu^{k,p}(D)$, $k \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$, $\mu \in \mathbb{R}$ beliebig, und sind λ_i , $i=0..k$, die Lösungen des Gleichungssystems



$$(-1)^l \lambda_1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^l \lambda_2 + \dots + \left(-\frac{1}{k+1}\right)^l \lambda_{k+1} = 1, \quad l=0..k, \quad (2.1)$$

dann ist die Funktion

$$F_1 g(y_1, y_2, y_3) = \begin{cases} g(y_1, y_2, y_3) & \text{für } y_2 > 0 \\ \sum_{\lambda=1}^{k+1} \lambda_\lambda g(y_1, -\frac{y_2}{\lambda}, y_3) & \text{für } y_2 < 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

beschränkte Fortsetzung von g bezüglich dieser Räume.

(ii) **Bemerkung.** Die Lösung des Gleichungssystems (2.1) existiert und ist eindeutig, da die Systemdeterminante eine Vandermondesche Determinante für $k+1$ paarweise verschiedene Zahlen und somit nicht Null ist [Оганесян/Руховец 1979, §1.3].

(iii) **Beweis.** Die Konstanten λ_l wurden so gewählt, daß bei $y_2=0$ die Funktionen g und $\sum_{\lambda=1}^{k+1} \lambda_\lambda g(y_1, -\frac{y_2}{\lambda}, y_3)$ bis zu den Ableitungen der Ordnung k übereinstimmen. Bleibt die Existenz einer Konstanten C zu zeigen, so daß

$$\|F_1 g; W_\mu^{k,p}(\mathbb{R}^3)\| \leq C \|g; W_\mu^{k,p}(D)\|$$

Der Beweis für die V -Räume ist dann analog.

Sei $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ein Multiindex, $0 \leq |\alpha| \leq k$, und $D^c = \mathbb{R}^3 \setminus D$. Durch Einsetzen von (2.2) und Anwenden der Hölder-Ungleichung (Summenform) für den Ausdruck innerhalb der Betragsstriche erhält man:

$$\begin{aligned} |F_1 g; W_\mu^{|\alpha|, p}(D^c)|^p &:= \int_{D^c} r^{\mu p} |D^\alpha Fg|^p dy \\ &= \int_{D^c} r^{\mu p} \left| \sum_{l=1}^{k+1} \lambda_l D^\alpha g(y_1, -\frac{y_2}{l}, y_3) \left(-\frac{1}{l}\right)^{\alpha_2} \right|^p dy \\ &\leq \int_{D^c} r^{\mu p} \left[(k+1)^{p-1} \sum_{l=1}^{k+1} \lambda_l^p \left(\frac{1}{l}\right)^{\alpha_2 p} |D^\alpha g(y_1, -\frac{y_2}{l}, y_3)|^p \right] dy \\ &= (k+1)^{p-1} \sum_{l=1}^{k+1} \lambda_l^p \left(\frac{1}{l}\right)^{\alpha_2 p} \int_{D^c} r^{\mu p} |D^\alpha g(y_1, -\frac{y_2}{l}, y_3)|^p dy \quad (j) \end{aligned}$$

In jedem Summanden wird nun $-\frac{y_2}{l} =: y_{2,l}$ substituiert. Mit $r^{\mu p} = (y_1^2 + y_2^2)^{\frac{1}{2}\mu p} = (y_1^2 + l^2 y_{2,l}^2)^{\frac{1}{2}\mu p} \leq \max\{1, l^{\mu p}\} (y_1^2 + y_{2,l}^2)^{\frac{1}{2}\mu p}$ folgt:

$$\begin{aligned} \int_{D^c} r^{\mu p} |D^\alpha g(y_1, -\frac{y_2}{l}, y_3)|^p dy &\leq \\ &\leq \max\{1, l^{\mu p}\} \cdot l \int_D r^{\mu p} |D^\alpha g(y_1, y_{2,l}, y_3)|^p dy_1 dy_{2,l} dy_3 \quad (jj) \end{aligned}$$

Setzt man nun (jj) in (j) ein und addiert $|g; W_\mu^{|\alpha|, p}(D)|^p$, so erhält man

$$|F_1 g; W_\mu^{|\alpha|, p}(\mathbb{R}^3)|^p \leq C_{|\alpha|} |g; W_\mu^{|\alpha|, p}(D)|^p,$$

wobei $C_{|\alpha|} = (k+1)^{p-1} \sum_{l=1}^{k+1} \left(\lambda_l^p \left(\frac{1}{l}\right)^{\alpha_2 p - 1} \max\{1, l^{\mu p}\} \right)$.

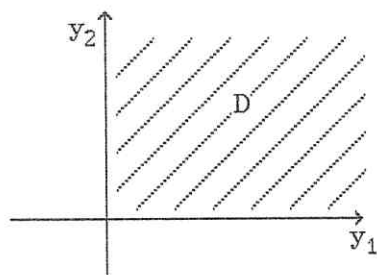
Durch Aufsummieren über alle α mit $0 \leq |\alpha| \leq k$ erhält man die Behauptung. ■

(iv) Bemerkung. Der Beweis zeigt, daß die Ungleichung 2.4.1.(ii) nicht nur für Normen, sondern auch für Halbnormen gilt.

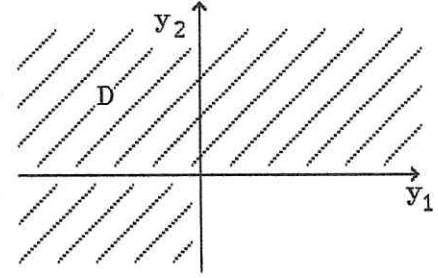
(v) Bemerkung. Daß r der Abstand zur y_3 -Achse ist, ist nicht wesentlich für den Beweis. Wäre r der Abstand zur y_1 -Achse, bliebe der Beweis völlig analog. Wäre r der Abstand zur y_2 -Achse, so fiel lediglich die Konstante $\max\{1, l^{\mu p}\}$ weg.

2.4.4. Lemma. Ist $D = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : y_1, y_2 > 0\}$ und $g \in W_\mu^{k, p}(D)$ oder $V_\mu^{k, p}(D)$, $k \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$, $\mu \in \mathbb{R}$ beliebig, dann kann g auf \mathbb{R}^3 beschränkt fortgesetzt werden.

Beweis. Analog (2.1), (2.2) kann g zunächst über die (y_2, y_3) -Ebene hinaus auf $\{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : y_2 > 0\}$ fortgesetzt werden. Damit wird das Problem auf den in 2.4.3. behandelten Fall zurückgeführt.

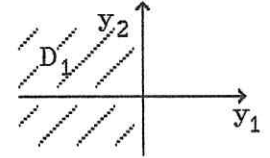


2.4.5. Lemma. Ist $D = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : y_2 > 0 \text{ oder } y_1 < 0\}$ und $g \in W_\mu^{k,p}(D)$ oder $V_\mu^{k,p}(D)$, $k \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$, $\mu \in \mathbb{R}$ beliebig, dann kann g auf \mathbb{R}^3 beschränkt fortgesetzt werden.



Beweis. Sei $D_1 = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : y_1 < 0\}$. Es wird eine Funktion $g_1(y_1, y_2, y_3)$ konstruiert durch

- Einschränkung von g auf D_1
- Fortsetzung dieser Einschränkung auf \mathbb{R}^3 analog 2.4.3.



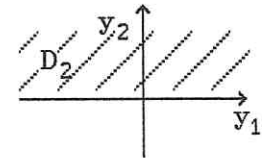
Es gilt: $g_1 = g$ in D_1 (i)

und $\|g_1; H(\mathbb{R}^3)\| \leq C \|g; H(D_1)\| \leq C \|g; H(D)\|$ (ii)

(H sei einer der Räume $W_\mu^{k,p}$ oder $V_\mu^{k,p}$)

Sei $D_2 = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : y_2 > 0\}$. Es wird eine Funktion $g_2(y_1, y_2, y_3)$ konstruiert durch

- Einschränkung von $g_1 - g$ auf D_2
- Fortsetzung dieser Einschränkung auf \mathbb{R}^3 analog 2.4.3.



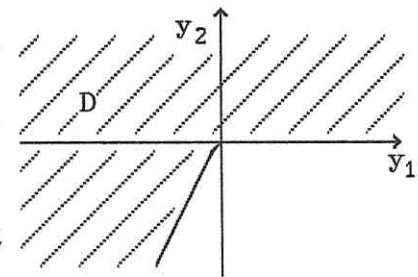
Es gilt: $g_1 - g = 0$ in $D_1 \cap D_2$, folglich $g_2 = 0$ in D_1 (iii)

und $\|g_2; H(\mathbb{R}^3)\| \leq C \|g_2; H(D_2)\| \leq C (\|g; H(D_2)\| + \|g_1; H(D_2)\|) \leq C \|g; H(D)\|$ (iv)

Folglich ist $F_1 g := g_1 - g_2$ Fortsetzung von g auf \mathbb{R}^3 :

- $F_1 g$ ist in \mathbb{R}^3 definiert.
- (ii) und (iv) sichern die gewünschte Normabschätzung.
- Es gilt $F_1 g = g$ in D , denn
 - in D_1 ist $g_1 - g_2 = g$ wegen (i) und (iii).
 - in $D \setminus D_1$ gilt $g_2 = g_1 - g$ und somit $F_1 g = g_1 - (g_1 - g) = g$.

2.4.6. Lemma. Ist D ein Dieder mit einem Öffnungswinkel ω und ist $g \in W_\mu^{k,p}(D)$ oder $V_\mu^{k,p}(D)$, dann kann g auf \mathbb{R}^3 beschränkt fortgesetzt werden.



Beweis. (i) Ist $\omega = \pi$, so ist mit Lemma 2.4.3. alles gezeigt.

(ii) Ist $\omega < \pi$, so wird D mit der linearen Abbildung

$$y'_1 = y_1 + y_2 \cot \omega, \quad y'_2 = y_2, \quad y'_3 = y_3$$

auf einen Dieder D' mit Innenwinkel $\frac{1}{2}\pi$ transformiert. Die mittransformierte Funktion g wird auf \mathbb{R}^3 fortgesetzt (vgl. 2.4.4.) und rücktransformiert.

Die so konstruierte Funktion Fg erfüllt alle Bedingungen einer Fortsetzung gemäß 2.4.1., da die lineare Abbildung unendlich glatt ist.

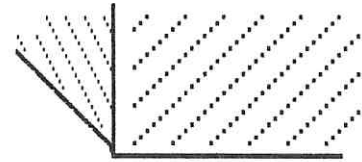
(iii) Ist $\omega > \pi$, so verfährt man analog (ii). Man transformiert auf einen Dieder mit $\omega = \frac{3}{2}\pi$ und verwendet Lemma 2.4.5. ■

2.4.7. Folgerung. Liegt eine Funktion im Durchschnitt verschiedener (gewichteter) Sobolevräume über einem Dieder D , so kann sie unter Erhaltung aller Raumzugehörigkeiten auf \mathbb{R}^3 beschränkt fortgesetzt werden.

Beweis. Die Behauptung ist eine Folgerung aus den Lemmata 2.4.3. bis 2.4.6. und der Tatsache, daß die konstruierte Fortsetzung nur von der betrachteten maximalen Differentiationsordnung abhängt. ■

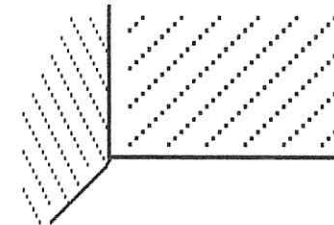
2.4.8. Die Existenz des Fortsetzungsoperators kann man auch für Polyederecken, in denen 3 Kanten zusammenstoßen, zeigen.

(i) **Lemma (Würfecke, $3 \times 90^\circ$).** Ist $G = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : y_1, y_2, y_3 > 0\}$ und $g \in W_\mu^{k,p}(G)$ oder $V_\mu^{k,p}(G)$, $k \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$, $\mu \in \mathbb{R}$ beliebig, dann kann g auf \mathbb{R}^3 beschränkt fortgesetzt werden.



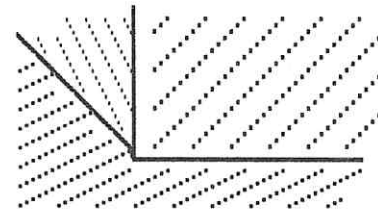
Beweis. Analog 2.4.3. kann g zunächst über die Ebene $y_3=0$ fortgesetzt werden. Damit wird das Problem auf den in 2.4.4. behandelten Fall zurückgeführt. ■

(ii) **Lemma ($2 \times 90^\circ, 1 \times 270^\circ$).** Ist $G = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : (y_1 < 0 \text{ oder } y_2 > 0), y_3 > 0\}$ und $g \in W_\mu^{k,p}(G)$ oder $V_\mu^{k,p}(G)$, $k \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$, $\mu \in \mathbb{R}$ beliebig, dann kann g auf \mathbb{R}^3 beschränkt fortgesetzt werden.



Beweis. Analog 2.4.3. kann g zunächst über die Ebene $y_3=0$ fortgesetzt werden. Damit wird das Problem auf den in 2.4.5. behandelten Fall zurückgeführt. ■

(ii) **Lemma ($1 \times 90^\circ, 2 \times 270^\circ$).** Ist $G = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : (y_1 > 0 \text{ und } y_2 > 0) \text{ oder } y_3 > 0\}$ und $g \in W_\mu^{k,p}(G)$ oder $V_\mu^{k,p}(G)$, $k \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$, $\mu \in \mathbb{R}$ beliebig, dann kann g auf \mathbb{R}^3 beschränkt fortgesetzt werden.



Beweis. Sei $G_1 = \{(y_1, y_2, y_3) : y_3 < 0\}$. Es wird eine Funktion g_1 konstruiert durch

- Einschränkung von g auf G_1
- Fortsetzung dieser Einschränkung auf \mathbb{R}^3 analog 2.4.3.

Es gilt: $g_1 = g$ in G_1 (j)

und $\|g_1; H(\mathbb{R}^3)\| \leq C \|g; H(G_1)\| \leq C \|g; H(G)\|$ (jj)

(H sei einer der Räume $W_\mu^{k,p}$ oder $V_\mu^{k,p}$)

Sei $G_2 = \{(y_1, y_2, y_3) : y_1 > 0 \text{ und } y_2 > 0\}$. Es wird eine Funktion g_2 konstruiert durch

- Einschränkung von $g_1 - g$ auf G_2
- Fortsetzung dieser Einschränkung auf \mathbb{R}^3 analog 2.4.4.

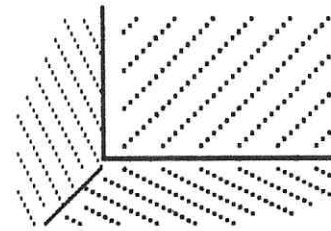
Es gilt: $g_1 - g_2 = 0$ in $G_1 \cap G_2$, folglich $g_2 = 0$ in G_1 (jjj)

$$\text{und } \|g_2; H(\mathbb{R}^3)\| \leq C \|g_2; H(G_2)\| \leq C (\|g; H(G_2)\| + \|g_1; H(G_2)\|) \leq C \|g; H(G)\| \quad (\text{JV})$$

Folglich ist $F_1 g := g_1 - g_2$ Fortsetzung von g auf \mathbb{R}^3 :

- $F_1 g$ ist in \mathbb{R}^3 definiert.
- (jj) und (JV) sichern die gewünschte Normabschätzung.
- Es gilt $F_1 g = g$ in G , denn
 - in G_1 ist $g_1 - g_2 = g$ wegen (j) und (jjj).
 - in $G \setminus G_1$ gilt $g_2 = g_1 - g$ und somit $F_1 g = g_1 - (g_1 - g) = g$. ■

(iv) Lemma (Fichera-Ecke, $3 \times 270^\circ$). Ist $G = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : y_1 > 0 \text{ oder } y_2 > 0 \text{ oder } y_3 > 0\}$ und $g \in W_\mu^{k,p}(G)$ oder $V_\mu^{k,p}(G)$, $k \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$, $\mu \in \mathbb{R}$ beliebig, dann kann g auf \mathbb{R}^3 beschränkt fortgesetzt werden.



Beweis. Sei $G_1 = \{(y_1, y_2, y_3) : y_1 > 0\}$. Es wird eine Funktion g_1 konstruiert durch

- Einschränkung von g auf G_1
- Fortsetzung dieser Einschränkung auf \mathbb{R}^3 analog 2.4.3.

Es gilt: $g_1 = g$ in G_1 (j)

$$\text{und } \|g_1; H(\mathbb{R}^3)\| \leq C \|g; H(G_1)\| \leq C \|g; H(G)\| \quad (\text{JJ})$$

(H sei einer der Räume $W_\mu^{k,p}$ oder $V_\mu^{k,p}$)

Sei $G_2 = \{(y_1, y_2, y_3) : y_2 > 0\}$. Es wird eine Funktion g_2 konstruiert durch

- Einschränkung von $g_1 - g$ auf G_2
- Fortsetzung dieser Einschränkung auf \mathbb{R}^3 analog 2.4.3.

Es gilt: $g_1 - g_2 = 0$ in $G_1 \cap G_2$, folglich $g_2 = 0$ in G_1 (jjj)

$$\text{und } \|g_2; H(\mathbb{R}^3)\| \leq C \|g; H(G)\| \quad (\text{JV})$$

Sei $G_3 = \{(y_1, y_2, y_3) : y_3 > 0\}$. Es wird eine Funktion g_3 konstruiert durch

- Einschränkung von $g_1 - g_2 - g$ auf G_3
- Fortsetzung dieser Einschränkung auf \mathbb{R}^3 analog 2.4.3.

Es gilt:

$$(g_1 - g) - g_2 = 0 \text{ in } G_1 \cap G_3 \text{ (wegen (j) und (jjj))} \rightarrow g_3 = 0 \text{ in } G_1 \quad (\text{V})$$

$$g_3 = 0 \text{ in } G_2 \cap G_3 \text{ (laut Definition von } g_2) \rightarrow g_3 = 0 \text{ in } G_2 \quad (\text{VJ})$$

$$\text{und } \|g_3; H(\mathbb{R}^3)\| \leq C \|g; H(G)\| \quad (\text{VJJ})$$

Folglich ist $F_1 g := g_1 - g_2 - g_3$ die gesuchte Fortsetzung:

- $F_1 g$ ist in \mathbb{R}^3 definiert.
- (JJ) (JV) und (VJJ) sichern die Beschränktheit.
- Es gilt $F_1 g = g$ in G , denn $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$ und
 - in G_1 ist $F_1 g = g$ wegen (j) (jjj) und (V).
 - in G_2 ist $F_1 g = g_1 - g_2 = g_1 - (g_1 - g) = g$ wegen (VJ) und Def. von g_2 .
 - in G_3 ist $F_1 g = g_1 - g_2 - (g_1 - g_2 - g) = g$ laut Definition von g_3 . ■

(v) Folgerung. Ist G ein Gebiet, das von 3 ebenen Flächen begrenzt ist, die paarweise in nicht parallelen Kanten zusammenstoßen, und liegt die Funktion g im Durchschnitt verschiedener (gewichteter) Sobolevräume über G , so kann diese unter Erhaltung aller Raumzugehörigkeiten auf \mathbb{R}^3 beschränkt fortgesetzt werden.

Beweis. Durch eine lineare Abbildung kann G auf ein Gebiet G' transformiert werden, das in einem der Punkte (i) bis (iv) behandelt wurde. Bezüglich G' wird fortgesetzt und rücktransformiert. Die Fortsetzung hängt nur von der betrachteten maximalen Differentiationsordnung ab. ■

2.4.9. Fortsetzung von $\Phi(\cdot)$. (i) Die Funktion $\Phi(\cdot)$ aus 1.4.8. ist aus $C^\omega[0, \omega]$. Benötigt wird jedoch eine Funktion $F_2\Phi(\cdot)$ mit folgenden Eigenschaften:

- $F_2\Phi(\cdot)$ ist eine 2π -periodische, über \mathbb{R} definierte Funktion.
- $F_2\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi)$, wenn $\varphi \in [0, \omega]$.
- $F_2\Phi \in C^2(\mathbb{R})$.

(ii) Satz. Eine Fortsetzung von Φ im Sinne von (i) existiert.

Beweis. Setzen $F_2\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi - 2k\pi)$ in $[2k\pi, 2k\pi + \omega]$, k beliebig ganzzahlig. In den Intervallen $[2k\pi + \omega, 2(k+1)\pi]$ sei $F_2\Phi(\varphi)$ ein Polynom 5. Grades, so daß an den Intervallenden $F_2\Phi$ bis zur 2. Ableitung stetig ist. ■

(iii) Bemerkung. Für spezielle Φ kann auch eine trigonometrische Fortsetzung angegeben werden; z.B. wird für $\Phi(\varphi) = \sin \frac{\pi}{\omega} \varphi$ die benötigte Fortsetzung realisiert durch

$$(F_2\Phi)(\varphi) = \begin{cases} \Phi(\varphi) & \text{in } [0, \omega] \\ (1 - 2\frac{\pi}{\omega}) \sin(\frac{\pi}{2\pi - \omega}(\varphi - \omega)) & \text{in } (\omega, 2\pi) \end{cases}$$

2.4.10. Fortsetzung von u . Sei u die Funktion mit der Darstellung und den Eigenschaften 1.4.8. In einigen Kapiteln wird jedoch eine Fortsetzung Fu auf ein Gebiet $\Omega_+ \supset \Omega$ benötigt (Ω vgl. 1.4.4.). Diese Fortsetzung sei in folgendem Sinne verstanden: Betrachtet werde eine Überdeckung $\{U_i\}$ von Ω_+ und eine entsprechende Zerlegung der Eins (vgl. 2.2.1.)

$1 = \sum_{i \in I} \chi_i$, $u = \sum_{i \in I} (\chi_i u)$ (nur in Ω definiert). Sei $Fu := \sum_{i \in I} F(\chi_i u)$, wobei $F(\chi_i u)$ wie folgt definiert ist:

- (i) Ist $U_i \subset \Omega$, so ist $F(\chi_i u) := \chi_i u$.
(ii) Ist $U_i \cap \Omega = \emptyset$, so ist $F(\chi_i u) := 0$.
(iii) Ist $U_i \cap \Omega$ ein Teil eines Dieders, so ist

$$F(\chi_i u) := F(\chi_i u_s) + F_1(\chi_i w)$$

$$F(\chi_i u_s) := \xi(r) r^\lambda (F_2 \bar{\Phi})(F_1 \chi_i \chi)$$

Im Falle gekrümmter Ränder wird U_i auf einen Dieder transformiert, fortgesetzt und rücktransformiert.

F_1 ist der in 2.4.3. bis 2.4.7. beschriebene Fortsetzungsoperator für $k=2$.

Die Fortsetzungseigenschaften sind erhalten: Offenbar ist für $x \in \Omega$

$$(Fu)(x) = \sum_{i \in I} F \chi_i u(x) = \sum_{i \in I} \chi_i u(x) = u(x).$$

Die Raumzugehörigkeit von Fu zu $W_{1-\lambda+\varepsilon}^{2,2}(\Omega_+)$ bzw. $W^{1+\lambda-\varepsilon,2}(\Omega_+)$ liefert der folgende Satz.

2.4.11. Satz. Sei $\mathcal{D}_+ = \{x \in \mathbb{R}^3 : \text{dist}(x, M) < \varrho_1\} = \{x \in \mathbb{R}^3 : \xi(r) > 0\}$ (ϱ_1 vgl. 1.1.2.) und $\mathcal{D} = \mathcal{D}_+ \cap \Omega$. Dann gelten folgende Abschätzungen:

$$\|Fu_s; W^{1+\lambda-\varepsilon,2}(\mathcal{D}_+)\| \leq C \|\chi; W_\lambda^{2,2}(\mathcal{D})\| \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\|Fu_s; W_{1-\lambda+\varepsilon}^{2,2}(\mathcal{D}_+)\| \leq C \|\chi; W_\lambda^{2,2}(\mathcal{D})\| \quad \forall \varepsilon > 0$$

Beweis. (i) Mit 2.1.4.(ii) erhält man

$$\|Fu_s; W^{1+\lambda-\varepsilon,2}(\mathcal{D}_+)\| = \|\xi(r) r^\lambda (F_2 \bar{\Phi})(F_1 \chi); W^{1+\lambda-\varepsilon,2}(\mathcal{D}_+)\|$$

$$\leq C \|\xi(r) (F_2 \bar{\Phi})(F_1 \chi); W_\lambda^{2,2}(\mathcal{D}_+)\|$$

Durch Herausziehen von ξ und $F_2 \bar{\Phi}$ mit der C^2 -Norm und Verwenden der Beschränktheit von F_1 erhält man die erste der beiden behaupteten Ungleichungen. \square

(ii) Durch Nachrechnen erhält man, daß für fast alle $x \in \mathcal{D}_+$ gilt:

$$\sum_{|\alpha| \neq 2} (D^\alpha Fu_s)^2 \leq C \left[r^{2\lambda} \sum_{|\alpha|=2} (D^\alpha F_1 \chi)^2 + r^{2\lambda-2} \sum_{|\alpha|=1} (D^\alpha F_1 \chi)^2 + r^{2\lambda-4} (F_1 \chi)^2 \right],$$

wobei C von Ω und (über $\bar{\Phi}$) vom Differentialoperator abhängt. Der Beweis erfolgt durch Anwenden der Produktregel, Herausziehen der Terme mit ξ und $F \bar{\Phi}$ mit dem Maximum und Anwenden der Abschätzungen 2.2.2. und $r < \varrho_1 < 1$.

(iii) Zum Beweis der 2. Ungleichung verwendet man Ungleichung (ii) und Satz 2.1.3.(iv): $W_\lambda^{k,2}(\mathcal{D}_+) \hookrightarrow W_{\lambda-k}^{0,2}(\mathcal{D}_+)$ für $\lambda > k-1$:

$$\|Fu_s; W_{1-\lambda+\varepsilon}^{2,2}(\mathcal{D}_+)\|^2 = \int_{\mathcal{D}_+} r^{2(1-\lambda+\varepsilon)} \sum_{|\alpha| \neq 2} (D^\alpha Fu_s)^2 dx$$

$$\leq C \int_{\mathcal{D}_+} \left(r^{2(1+\varepsilon)} \sum_{|\alpha|=2} (D^\alpha F_1 \chi)^2 + r^{2\varepsilon} \sum_{|\alpha|=1} (D^\alpha F_1 \chi)^2 + r^{2(\varepsilon-1)} (F_1 \chi)^2 \right) dx$$

$$\leq C \|F_1 \chi; W_{1+\varepsilon}^{2,2}(\mathcal{D}_+)\|^2$$

Mit Hilfe von $W_\lambda^{2,2}(\mathcal{D}_+) \hookrightarrow W_{1+\varepsilon}^{2,2}(\mathcal{D}_+)$ (vgl. 2.1.3.(iv)) und der Beschränktheit von F_1 erhält man die 2. Ungleichung. \blacksquare

2.5. Stetigkeitsmodul und Steklov-Mittelung

2.5.1. Bemerkung. Die folgenden Definitionen 2.5.2. und 2.5.4. sind der Monographie von Оганесян und Руховец [1979, §2.4] entnommen. Die dazugehörigen Abschätzungen wurden auf den dreidimensionalen Fall mit allgemeiner Summierbarkeit p übertragen. Bei der Formulierung und beim Beweis wurde darauf geachtet, daß die Konstanten vom Gebiet unabhängig sind; möglichst wurden sogar explizite obere Schranken für diese angegeben.

2.5.2. Definition. Sei $G \subset \mathbb{R}^N$ ein stückweise glatt berandetes Gebiet und $G_+ \supset G$ ein Gebiet mit $\text{dist}(\partial G, \partial G_+) > t$. Weiterhin sei $g \in W^{k,p}(G)$ auf G_+ fortgesetzt. Dann heißt die Zahl

$$\omega(g, t; W^{k,p}(G)) := \sup_{|z| \leq t} \|g(x+z) - g(x); W^{k,p}(G)\|$$

Stetigkeitsmodul der Funktion g .

2.5.3. Lemma. Seien $g \in W^{k+\lambda,p}(G)$, $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq \lambda \leq 1$, $1 \leq p < \infty$, $G \subset \mathbb{R}^3$ ein stückweise glatt berandetes Gebiet und $G_+ \supset G$ ein Gebiet mit $\text{dist}(\partial G, \partial G_+) > 2t$. Dann gilt:

$$\omega(g, t; W^{k,p}(G)) \leq C t^\lambda \|g; W^{k+\lambda,p}(G_+)\|$$

Dabei ist C nur von λ abhängig. Insbesondere ist $C=1$ für $\lambda=1$.

Beweis. (i) Zeigen zunächst

$$|g(x+z) - g(x); W^{k,p}(G)| \leq C t^\lambda |g; W^{k+\lambda,p}(G_+)|$$

für $0 < \lambda < 1$ und $|z| \leq t$.

Sei $\varphi_k(z) := |g(x+z) - g(x); W^{k,p}(G)|^p$. Mit Hilfe der Dreiecksungleichung und $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$ (folgt aus der Hölder-Ungleichung) erhält man

$$\varphi_k(z) \leq 2^{p-1} |g(x+z) - g(x+z+y); W^{k,p}(G)|^p + 2^{p-1} |g(x+z+y) - g(x); W^{k,p}(G)|^p.$$

Folglich

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}|z| \leq |y| \leq |z|} \frac{\varphi_k(z) dy}{|y|^{3+p\lambda}} &\leq 2^{p-1} \int_{\frac{1}{2}|z| \leq |y| \leq |z|} \frac{|g(x+z) - g(x+z+y); W^{k,p}(G)|^p}{|y|^{3+p\lambda}} dy + \\ &+ 2^{p-1} \int_{\frac{1}{2}|z| \leq |y| \leq |z|} \frac{|g(x+z+y) - g(x); W^{k,p}(G)|^p}{|y|^{3+p\lambda}} dy = I_1 + I_2 \end{aligned}$$

Die linke Seite kann man berechnen:

$$\int_{\frac{1}{2}|z| \leq |y| \leq |z|} \frac{\varphi_k(z) dy}{|y|^{3+p\lambda}} = C \varphi_k(z) |z|^{-p\lambda} \quad \text{mit} \quad C = \frac{4\pi}{p\lambda} (4^\lambda - 1)$$

Aus $|z| \leq t$ folgt mit $G_0 = G \cup \{x \in \mathbb{R}^3 : \text{dist}(x, \partial G) < t\}$

$$|g(x+z)-g(x+z+y); W^{k,p}(G)| \leq |g(x)-g(x+y); W^{k,p}(G_0)|.$$

Damit kann man I_1 wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} I_1 &\leq 2^{p-1} \int_{|y|\leq t} \frac{|g(x)-g(x+y); W^{k,p}(G_0)|^p}{|y|^{3+p\lambda}} dy \\ &= 2^{p-1} \sum_{|\alpha|=k} \int_{|y|\leq t} \int_{G_0} \frac{|D^\alpha g(x)-D^\alpha g(x+y)|^p}{|y|^{3+p\lambda}} dx dy \\ &\leq 2^{p-1} \sum_{|\alpha|=k} \int_{G_+} \int_{G_+} \frac{|D^\alpha g(x)-D^\alpha g(x')|^p}{|x-x'|^{3+p\lambda}} dx dx', \quad \text{mit } y=x'-x. \end{aligned}$$

Das Integral I_2 schätzt man zunächst mit

$$\frac{1}{|y|^{3+p\lambda}} \leq C \frac{1}{|z+y|^{3+p\lambda}} \left(\frac{|z+y|^{3+p\lambda}}{|y|^{3+p\lambda}} \leq \left(\frac{|z|+|y|}{|y|} \right)^{3+p\lambda} \leq 3^{3+p\lambda} \text{ für } |y| \geq \frac{|z|}{2} \right)$$

und dann analog zu I_1 nach oben ab.

Zusammengefaßt erhält man

$$C \varphi(z) |z|^{-p\lambda} \leq C |g; W^{k+\lambda,p}(G_+)|^p \quad \text{für } z: |z|\leq t$$

und damit die Teilbehauptung (i). \square

(ii) Zeigen nun $|g(x+z)-g(x); W^{l,p}(G)| \leq t |g; W^{l+1,p}(G_+)|$

$\forall z: |z|\leq t$, falls $g \in W^{l+1,p}(G_+)$.

Durch Umformung, Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und der Hölder-Ungleichung erhält man

$$\begin{aligned} |g(x+z)-g(x); W^{l,p}(G)|^p &= \sum_{|\alpha|=l} \left| \int_0^1 \int_G \frac{d}{dt} D^\alpha g(x_1+tz_1, x_2+tz_2, x_3+tz_3) dt \right|^p dx \\ &= \sum_{|\alpha|=l} \int_0^1 \int_G \left| \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} D^\alpha g(x+tz) z_i \right|^p dx \leq \sum_{|\alpha|=l} \int_0^1 \int_G |\nabla D^\alpha g(x+tz)| |z| dt dx \\ &\leq \sum_{|\alpha|=l} \int_0^1 \int_G |\nabla D^\alpha g(x+tz)|^p dt |z|^{p-1} dx = |z|^{p-1} \int_0^1 \sum_{|\alpha|=l} \int_G |\nabla D^\alpha g(x+tz)|^p dx dt \\ &\leq t^p \int_0^1 |g; W^{l+1,p}(G_+)|^p dt, \quad \text{da } |z|\leq t \end{aligned}$$

(iii) Im Fall $\lambda=1$ gilt (ii) für $0 \leq l \leq k$. Zur p -ten Potenz aufsummiert, erhält man die Behauptung des Lemmas. \square

(iv) Im Fall $0 < \lambda < 1$ summiert man die Ungleichungen (i) und (ii) für $0 \leq l \leq k-1$ auf und erhält die Behauptung des Lemmas. \square

(v) Für $\lambda=0$ gilt die Behauptung des Lemmas trivialerweise:

$$\begin{aligned} \|g(x+z) - g(x); W^{k,p}(G)\| &\leq \|g(x+z); W^{k,p}(G)\| + \|g(x); W^{k,p}(G)\| \\ &\leq 2 \|g; W^{k,p}(G_+)\| \end{aligned}$$

2.5.4. Definition. Seien $G \subset \mathbb{R}^3$ ein stückweise glatt berandetes Gebiet und $G_+ \supset G$ ein Gebiet mit $\text{dist}(\partial G, \partial G_+) > \sqrt{3}\varrho$. Weiterhin sei $g \in L_2(G)$ auf G_+ fortgesetzt. Dann heißt die Funktion

$$g^\varrho(x) = \frac{1}{(2\varrho)^3} \int_{Q_\varrho} g(x+z) dz = \frac{1}{(2\varrho)^3} \int_{x_1-\varrho}^{x_1+\varrho} \int_{x_2-\varrho}^{x_2+\varrho} \int_{x_3-\varrho}^{x_3+\varrho} g(z) dz$$

(Steklov-)gemittelte Funktion. Dabei ist $\varrho > 0$ eine reelle Zahl und $Q_\varrho := \{z \in \mathbb{R}^3 : |z_i| < \varrho, i=1,2,3\}$.

2.5.5. Lemma. Mittelung und Differentiation sind vertauschbar, d.h., unter der Voraussetzung $g \in W^{1,2}(G_+)$ gilt für fast alle $x \in G$

$$\frac{\partial g^\varrho}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)^\varrho.$$

Zum Beweis der Vertauschbarkeit von Integration und Differentiation vgl. z.B. [Michlin 1978, §1.1].

2.5.6. Verallgemeinerte Minkowski-Ungleichung. Seien $p \geq 1$, $x \in G_1 \subset \mathbb{R}^m$ und $y \in G_2 \subset \mathbb{R}^n$, dann gilt:

$$\left(\int_{G_1} \left| \int_{G_2} |f(x,y)| dy \right|^p dx \right)^{1/p} \leq \int_{G_2} \left(\int_{G_1} |f(x,y)|^p dx \right)^{1/p} dy,$$

falls die entsprechenden Integrale existieren [Оганесян/Руховец 1979, Kap. 2.4.2.]. (Diese Ungleichung wird in den folgenden Beweisen häufig benötigt.)

2.5.7. Lemma. Seien $g \in W^{1,p}(G)$, $1 \leq p < \infty$, G ein stückweise glatt berandetes Gebiet, $G_+ \supset G$ ein Gebiet mit $\text{dist}(\partial G, \partial G_+) > \sqrt{3}\varrho$, $0 < \varrho < 1$. Weiterhin sei g auf G_+ fortgesetzt. Dann gilt:

$$\|g^\varrho; W^{2,p}(G)\| \leq \frac{4^{1/p}}{\varrho} \|g; W^{1,p}(G_+)\|,$$

d.h., $g^\varrho \in W^{2,p}(G)$.

Beweis. (i) In einem ersten Schritt wird $\|g^\varrho; L_p(G)\| \leq \|g; L_p(G_+)\|$ direkt aus der Definition von g^ϱ und durch Anwendung der verallgemeinerten Minkowski-Ungleichung 2.5.6. gezeigt:

$$\|g^\varrho; L_p(G)\| = \left(\int_G \left| \frac{1}{8\varrho^3} \int_{Q_\varrho} g(x+y) dy \right|^p dx \right)^{1/p} \leq \frac{1}{8\varrho^3} \int_{G_+} \left(\int_G |g(x+y)|^p dx \right)^{1/p} dy$$

Der unterstrichene Ausdruck ist die L_p -Norm von g in einem Gebiet, das durch Verschiebung von G um den Vektor y entsteht. Diese läßt sich mit $\|g; L_p(G_+)\|$ nach oben abschätzen und aus dem Integral ziehen. \square

(ii) Es wird gezeigt, daß $\left\| \frac{\partial g^\varrho}{\partial x_i}; L_p(G) \right\| \leq \frac{1}{\varrho} \|g; L_p(G_+)\|$, $i=1,2,3$. Falls das Integral existiert, gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-\varrho}^{\varrho} f(x_1+y_1, x_2, x_3) dy_1 = f(x_1+\varrho, x_2, x_3) - f(x_1-\varrho, x_2, x_3)$$

Setzen $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{8\varrho^3} \int_{-\varrho}^{\varrho} \int_{-\varrho}^{\varrho} g(x_1, x_2+y_2, x_3+y_3) dy_3 dy_2$, folglich

$$\frac{\partial g^{\varrho}}{\partial x_1} = \frac{1}{8\varrho^3} \int_{-\varrho}^{\varrho} \int_{-\varrho}^{\varrho} [g(x_1+\varrho, x_2+y_2, x_3+y_3) - g(x_1-\varrho, x_2+y_2, x_3+y_3)] dy_3 dy_2$$

Nun kann man $\|\frac{\partial g^{\varrho}}{\partial x_1}; L_p(G)\|$ mit der verallgemeinerten Minkowski-Ungleichung, der Dreiecksungleichung und der Minkowski-Ungleichung abschätzen:

$$\begin{aligned} \|\frac{\partial g^{\varrho}}{\partial x_1}; L_p(G)\| &= \left(\int_G \left| \frac{1}{8\varrho^3} \int_{-\varrho}^{\varrho} \int_{-\varrho}^{\varrho} [g(x_1+\varrho, x_2+y_2, x_3+y_3) - g(x_1-\varrho, x_2+y_2, x_3+y_3)] dy_3 dy_2 \right|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq \frac{1}{8\varrho^3} \int_{-\varrho}^{\varrho} \int_{-\varrho}^{\varrho} \left(\int_G |g(x_1+\varrho, x_2+y_2, x_3+y_3) - g(x_1-\varrho, x_2+y_2, x_3+y_3)|^p dx \right)^{1/p} dy_3 dy_2 \\ &\leq \frac{1}{8\varrho^3} \int_{-\varrho}^{\varrho} \int_{-\varrho}^{\varrho} \left[\left(\int_G |g(x_1+\varrho, x_2+y_2, x_3+y_3)|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_G |g(x_1-\varrho, x_2+y_2, x_3+y_3)|^p dx \right)^{1/p} \right] dy_3 dy_2 \end{aligned}$$

Analog der letzten Schlußfolgerung in (i) erhält man die Behauptung für $i=1$. Die Fälle $i=2$ und $i=3$ zeigt man analog. \square

(iii) Aus (i) und (ii) folgt sofort

$$\|g^{\varrho}; W^{1,p}(G)\|^p \leq \left(1 + \frac{3}{\varrho^p}\right) \|g; L_p(G_+)\|^p$$

und mit $\varrho < 1$ $\|g^{\varrho}; W^{1,p}(G)\| \leq \frac{4^{1/p}}{\varrho} \|g; L_p(G_+)\|^p$. \square

(iv) Indem man in (i) statt g^{ϱ} auch deren Ableitung einsetzt und die Vertauschbarkeit von Mittelung und Differentiation ausnutzt, erhält man $\|g^{\varrho}; W^{1,p}(G)\| \leq \|g; W^{1,p}(G_+)\|$ \square

(v) Indem man in (ii) statt der ersten die zweiten Ableitungen einsetzt, erhält man mit (iv)

$$\|g^{\varrho}; W^{2,p}(G)\| \leq \frac{4^{1/p}}{\varrho} \|g; W^{1,p}(G_+)\| \quad \square$$

Damit ist alles bewiesen. \blacksquare

(vi) **Bemerkung.** Durch zu (iv) und (v) analoge Schlußfolgerungen kann das Lemma auf Räume mit höherer Differenzierbarkeit und mit Hilfe der multiplikativen Ungleichungen (vgl. [Оганесян/Руховец 1979, §1.8]) auf Räume mit gebrochener Differenzierbarkeit verallgemeinert werden. Man kann zeigen:

$$\|g^{\varrho}; W^{k+\lambda,p}(G)\| \leq C(k,p,\lambda) \varrho^{-\lambda} \|g; W^{k,p}(G_+)\|$$

($1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda \leq 1$, $k \in \mathbb{N}$ beliebig).

2.5.8. Lemma. Unter den Voraussetzungen von Lemma 2.5.7. gilt:

$$\|g-g^{\varrho}; L_p(G)\| \leq 6\varrho \omega(g, \sqrt{3}\varrho; W^{1,p}(G))$$

$$\|g-g^{\varrho}; W^{1,p}(G)\| \leq 9 \omega(g, \sqrt{3}\varrho; W^{1,p}(G))$$

Beweis. (i) Vor dem eigentlichen Beweis soll die folgende Ungleichung bewiesen werden. Falls die jeweiligen Integrale existieren, gilt:

$$\frac{1}{8\varrho^3} \left(\int_G \sum_{i=1}^3 \left| \int_{Q_{\varrho}} a_i(x,y) dy \right|^p dx \right)^{1/p} \leq 3 \sup_{y \in Q_{\varrho}} \left(\sum_{i=1}^3 \int_G |a_i(x,y)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Bekanntlich gilt für \mathbb{R}^3 -Normen $\left(\sum_{i=1}^3 |b_i|^p \right)^{1/p} \leq \sum_{i=1}^3 |b_i|$. Diese Ungleichung wird zunächst verwendet, anschließend die Minkowski- und die verallgemeinerte Minkowski-Ungleichung:

$$\begin{aligned} \left(\int_G \sum_{i=1}^3 \left| \int_{Q_{\varrho}} a_i(x,y) dy \right|^p dx \right)^{1/p} &\leq \left[\int_G \left(\sum_{i=1}^3 \left| \int_{Q_{\varrho}} a_i(x,y) dy \right|^p \right) dx \right]^{1/p} \\ &\leq \sum_{i=1}^3 \left[\int_G \left| \int_{Q_{\varrho}} a_i(x,y) dy \right|^p dx \right]^{1/p} \leq \sum_{i=1}^3 \int_{Q_{\varrho}} \left[\int_G |a_i(x,y)|^p dx \right]^{1/p} dy \end{aligned}$$

Ganz grob kann man nun den Ausdruck in der eckigen Klammer vergrößern, indem man $\sum_{i=1}^3$ einfügt. Die äußere Summe ist damit einem Faktor 3 äquivalent. Folglich:

$$\left(\int_G \sum_{i=1}^3 \left| \int_{Q_{\varrho}} a_i(x,y) dy \right|^p dx \right)^{1/p} \leq 3 \int_{Q_{\varrho}} \left[\sum_{i=1}^3 \int_G |a_i(x,y)|^p dx \right]^{1/p} dy$$

Durch Übergang zum Supremum im Klammerausdruck erhält man die Behauptung. \square

$$\begin{aligned} \text{(ii) Offenbar gilt: } g(x+y) - g(x) &= \int_0^{y_1} \frac{\partial}{\partial x_1} g(x_1+z_1, x_2+y_2, x_3+y_3) dz_1 + \\ &+ \int_0^{y_2} \frac{\partial}{\partial x_2} g(x_1, x_2+z_2, x_3+y_3) dz_2 + \int_0^{y_3} \frac{\partial}{\partial x_3} g(x_1, x_2, x_3+z_3) dz_3 \end{aligned}$$

und $\int_{Q_{\varrho}} \int_0^{y_i} dz_i dy = \int_{Q_{\varrho}} y_i dy = 0$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \int_{Q_{\varrho}} [g(x+y) - g(x)] dy &= \int_{Q_{\varrho}} \int_0^{y_1} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} g(x_1+z_1, x_2+y_2, x_3+y_3) - \frac{\partial}{\partial x_1} g(x) \right] dz_1 dy + \\ &+ \int_{Q_{\varrho}} \int_0^{y_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_2} g(x_1, x_2+z_2, x_3+y_3) - \frac{\partial}{\partial x_2} g(x) \right] dz_2 dy + \int_{Q_{\varrho}} \int_0^{y_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_3} g(x_1, x_2, x_3+z_3) - \frac{\partial}{\partial x_3} g(x) \right] dz_3 dy \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck wird nach oben abgeschätzt, indem man von den eckigen Klammern zu Beträgen übergeht und die Integrationsgrenzen von $(0, y_i)$ auf $(-\varrho, \varrho)$ erweitert. Schließlich wird im i -ten Integral die Integration nach y_i ausgeführt (der Integrand hängt nicht von y_i ab, folglich entsteht ein Faktor 2ϱ) und die Parameter z_i werden in y_i umbenannt ($i=1..3$). Man erhält:

$$\int_{Q_\varrho} [g(x+y) - g(x)] dy \leq 2\varrho \sum_{i=1}^3 \int_{Q_\varrho} |a_i(x,y)| dy \quad \text{mit}$$

$$a_1(x,y) = \frac{\partial}{\partial x_1} [g(x+y) - g(x)]$$

$$a_2(x,y) = \frac{\partial}{\partial x_2} [g(x_1, x_2+y_2, x_3+y_3) - g(x)]$$

$$a_3(x,y) = \frac{\partial}{\partial x_3} [g(x_1, x_2, x_3+y_3) - g(x)]$$

(iii) Aus der Definition der Mittelung und mit (ii) und (i) folgt:

$$\begin{aligned} \|g - g^\varrho; L_p(G)\| &= \frac{1}{8\varrho^3} \left(\int_G \left| \int_{Q_\varrho} [g(x+y) - g(x)] dy \right|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq \frac{2\varrho}{8\varrho^3} \left(\int_G \left| \sum_{i=1}^3 \int_{Q_\varrho} |a_i(x,y)| dy \right|^p dx \right)^{1/p} \leq 2\varrho \cdot 3 \sup_{y \in Q_\varrho} \left(\sum_{i=1}^3 \int_G |a_i(x,y)|^p dx \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Nun wird a_i wieder substituiert und die Supremumbildung auf ein größeres Gebiet ausgedehnt. Man erhält

$$\begin{aligned} \|g - g^\varrho; L_p(G)\| &\leq 6\varrho \sup_{y \in Q_\varrho} \left(\sum_{i=1}^3 \int_G \left| \frac{\partial}{\partial x_i} [g(x+y) - g(x)] \right|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq 6\varrho \sup_{y \in Q_\varrho} |g(x+y) - g(x); W^{1,p}(G)|, \end{aligned}$$

woraus die erste behauptete Ungleichung folgt. \square

(iv) Für die zweite Ungleichung muß man noch den $W^{1,p}(G)$ -Halbnormanteil abschätzen. Dazu verwendet man wieder die Definition der Mittelung, Lemma 2.5.5. und (i):

$$\begin{aligned} |g - g^\varrho; W^{1,p}(G)| &= \left(\sum_{i=1}^3 \int_G \left| \frac{1}{8\varrho^3} \int_{Q_\varrho} \frac{\partial}{\partial x_i} [g(x+y) - g(x)] dy \right|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq 3 \sup_{y \in Q_\varrho} \left(\sum_{i=1}^3 \int_G \left| \frac{\partial}{\partial x_i} [g(x+y) - g(x)] \right|^p dx \right)^{1/p} = 3 \sup_{y \in Q_\varrho} |g(x+y) - g(x); W^{1,p}(G)| \end{aligned}$$

Mit (iii) und $\varrho < 1$ folgt die zweite Ungleichung. \blacksquare

2.5.9. Lemma. Unter den Voraussetzungen von Lemma 2.5.7. gilt:

$$|g^\varrho; W^{2,p}(G)| \leq 9^{1/p} \varrho^{-1} \omega(g, \sqrt{3}\varrho; W^{1,p}(G))$$

Beweis. Analog den ersten Umformungen in 2.5.7.(ii) gilt fast überall:

$$\frac{\partial^2 g^\varrho}{\partial x_1 \partial x_j} = \frac{1}{8\varrho^3} \int_{-\varrho}^{\varrho} \int_{-\varrho}^{\varrho} \left[\frac{\partial g}{\partial x_j}(x_1+\varrho, x_2+y_2, x_3+y_3) - \frac{\partial g}{\partial x_j}(x_1-\varrho, x_2+y_2, x_3+y_3) \right] dy_3 dy_2.$$

Durch Integration, Umformen, Anwenden der Minkowski- und der verallgemeinerten Minkowski-Ungleichung und Übergang zum Supremum erhält man schließlich

$$\left\| \frac{\partial^2 g^\varrho}{\partial x_1 \partial x_j}; L_p(G) \right\| \leq \frac{1}{8\varrho^3} \left\{ \int_G \left| \int_{-\varrho}^{\varrho} \int_{-\varrho}^{\varrho} \left[\frac{\partial g}{\partial x_j}(x_1+\varrho, x_2+y_2, x_3+y_3) - \frac{\partial g}{\partial x_j}(x_1-\varrho, x_2, x_3) \right] dy_3 dy_2 \right|^p dx \right\}^{1/p} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{8\varrho^3} \left\{ \int_G \left| \int_{-\varrho}^{\varrho} \int_{-\varrho}^{\varrho} \left[\frac{\partial g}{\partial x_j}(x_1-\varrho, x_2+y_2, x_3+y_3) - \frac{\partial g}{\partial x_j}(x_1, x_2, x_3) \right] dy_3 dy_2 \right|^p dx \right\}^{1/p} \\
\leq & \frac{1}{8\varrho^3} \int_{-\varrho}^{\varrho} \int_{-\varrho}^{\varrho} \left\{ \int_G \left| \frac{\partial g}{\partial x_j}(x_1+\varrho, x_2+y_2, x_3+y_3) - \frac{\partial g}{\partial x_j}(x_1, x_2, x_3) \right|^p dx \right\}^{1/p} dy_3 dy_2 \\
& + \frac{1}{8\varrho^3} \int_{-\varrho}^{\varrho} \int_{-\varrho}^{\varrho} \left\{ \int_G \left| \frac{\partial g}{\partial x_j}(x_1-\varrho, x_2+y_2, x_3+y_3) - \frac{\partial g}{\partial x_j}(x_1, x_2, x_3) \right|^p dx \right\}^{1/p} dy_3 dy_2 \\
\leq & 2 \cdot \frac{1}{8\varrho^3} \int_{-\varrho}^{\varrho} \int_{-\varrho}^{\varrho} \sup_{y \in \mathbb{Q}_\varrho} \left\{ \int_G \left| \frac{\partial g}{\partial x_j}(x+y) - \frac{\partial g}{\partial x_j}(x) \right|^p dx \right\}^{1/p} dy_3 dy_2 \\
= & \frac{1}{\varrho} \sup_{y \in \mathbb{Q}_\varrho} \left\{ \int_G \left| \frac{\partial g}{\partial x_j}(x+y) - \frac{\partial g}{\partial x_j}(x) \right|^p dx \right\}^{1/p}
\end{aligned}$$

Das Supremum kann man nach oben mit dem Stetigkeitsmodul abschätzen. Analog schätzt man $\frac{\partial^2 g^\varrho}{\partial x_2 \partial x_j}$ und $\frac{\partial^2 g^\varrho}{\partial x_3 \partial x_j}$ ab. Durch Aufsummieren folgt die Behauptung. ■

2.6. Abschätzungen in einem Randstreifen

2.6.1. Streifengebiet. (i) Definition. $G_0 \subset \mathbb{R}^2$ sei ein Gebiet mit stückweise glattem Rand. Als Streifengebiet wird das Gebiet $G_\delta = G_0 \times (0, \delta) \subset \mathbb{R}^3$, $\delta > 0$, bezeichnet.

(ii) Lemma. Sei $g \in W^{1,p}(G_\delta)$, $p > 1$, dann gilt

$$\|g; L_p(G_\delta)\| \leq C\delta^{1/p} \|g; L_p(G_0)\| + C\delta \|g; W^{1,p}(G_\delta)\|.$$

C ist unabhängig von der Größe des Gebiets G_δ .

Beweis. Man kann die Behauptung als abgewandelte Poincaré-Ungleichung betrachten. Sie soll hier analog [Оганесян/Руховец 1979, Kap 1.4.1.] bewiesen werden: Für fast alle $x \in G_\delta$ gilt:

$$\begin{aligned}
|g(x_1, x_2, x_3)|^p &= \left| g(x_1, x_2, 0) + \int_0^{x_3} \frac{\partial g}{\partial t}(x_1, x_2, t) dt \right|^p \\
&\leq 2^{p-1} |g(x_1, x_2, 0)|^p + 2^{p-1} \left| \int_0^{x_3} \frac{\partial g}{\partial t}(x_1, x_2, t) dt \right|^p
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Hölder-Ungleichung erhält man für $x_3 < \delta$:

$$\left| \int_0^{x_3} \frac{\partial g}{\partial t}(x_1, x_2, t) dt \right|^p \leq \delta^{p-1} \int_0^\delta \left| \frac{\partial g}{\partial t}(x_1, x_2, t) \right|^p dt$$

Mit Hilfe von diesen beiden Abschätzungen folgt:

$$\begin{aligned}
\|g; L_p(G_\delta)\|^p &\leq 2^{p-1} \int_0^\delta \int_{G_0} |g(x_1, x_2, 0)|^p dx + (2\delta)^{p-1} \int_0^\delta \int_{G_0} \int_0^\delta \left| \frac{\partial g}{\partial t}(x_1, x_2, t) \right|^p dt dx \\
&= 2^{p-1} \delta \|g; L_p(G_0)\|^p + 2^{p-1} \delta^p \left\| \frac{\partial g}{\partial x_3}; L_p(G_\delta) \right\|^p \quad (*)
\end{aligned}$$

Daraus folgt sofort die Behauptung. ■

(iii) Folgerung. Wenn $g \in W^{1,p}(G_\delta)$, $p > 1$, und $g=0$ auf G_0 , dann gilt:

$$\|g; L_p(G_\delta)\| \leq C\delta |g; W^{1,p}(G_\delta)| \quad (C \text{ wie (ii)}).$$

(iv) Folgerung. Wenn $g \in W^{k,p}(G_\delta)$, $k \geq 1$, $p > 1$, dann gilt

$$|g; W^{k-1,p}(G_\delta)| \leq C\delta^{1/p} |g; W^{k-1,p}(G_0)| + C\delta |g; W^{k,p}(G_\delta)|$$

$$\text{bzw. } \|g; W^{k-1,p}(G_\delta)\| \leq C\delta^{1/p} \|g; W^{k-1,p}(G_0)\| + C\delta \|g; W^{k,p}(G_\delta)\|$$

(C wie (ii)).

Der Beweis erfolgt durch Einsetzen der entsprechenden Ableitungen in (*) und anschließendes Aufsummieren.

2.6.2. Randstreifen. (i) Die Ungleichungen in 2.6.1. gelten offenbar auch, wenn G_δ ein Gebiet ist, daß diffeomorph zu einem Streifengebiet ist. Das ist insbesondere erfüllt, wenn G ein Gebiet mit glatter Oberfläche und $G_\delta = \{x \in G: \text{dist}(x, \partial G) < \delta\}$ ist. In diesem Fall sei G_δ als Randstreifen bezeichnet.

(ii) Kann man ein Gebiet G_δ als Vereinigung von (nicht notwendig durchschnittsfremden) Teilgebieten $G_\delta^{(i)}$, $i=1 \dots i_0$, darstellen, die ihrerseits diffeomorph zu einem Streifengebiet sind, so bleibt die Gültigkeit der Ungleichungen aus 2.6.1. erhalten.

(Beweis durch Aufsummieren der Ungleichungen über den Teilgebieten und ggf. Aufrunden der Normen, falls sich die Teilgebiete überlappen; C hängt dann evtl. noch von i_0 ab.)

(iii) Mit Hilfe von (ii) kann man die Aussage für die in (i) eingeführten Randstreifen von Gebieten mit glattem Rand auf Gebiete mit stückweise glattem Rand verallgemeinern:

Seien G ein Gebiet mit stückweise glatter Oberfläche, $G_\delta = \{x \in G: \text{dist}(x, \partial G) < \delta\}$ der Randstreifen der Breite δ , $k \geq 1$ und $p > 1$. Dann gibt es eine Konstante C, so daß

$$\|g; L_p(G_\delta)\| \leq C\delta^{1/p} \|g; L_p(\partial G)\| + C\delta |g; W^{1,p}(G_\delta)| \quad \forall g \in W^{1,p}(G_\delta)$$

$$\|g; W^{k-1,p}(G_\delta)\| \leq C\delta^{1/p} \|g; W^{k-1,p}(\partial G)\| + C\delta \|g; W^{k,p}(G_\delta)\| \quad \forall g \in W^{k,p}(G_\delta)$$

C hängt i.allg. von ∂G ab, ist jedoch insbesondere von g und δ unabhängig.

(iv) Mit Hilfe der Spursätze 2.1.6. kann man die Norm über der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit noch in Gebietsnormen überführen. Folglich gilt z.B. unter den Voraussetzungen von (iii) und mit $\delta < 1$:

$$\|g; W^{k-1,p}(G_\delta)\| \leq C\delta^{1/p} \|g; W^{k,p}(G)\| \quad \forall g \in W^{k,p}(G).$$

2.7. Eine Hilfsfunktion

2.7.1. (i) Vorbemerkung. In Kapitel 4.2. wird eine über Ω definierte Abschneidefunktion Q mit den in (iii) formulierten Eigenschaften benötigt. Ziel dieses Kapitels ist es, die Existenz einer solchen Funktion zu zeigen. Für den zweidimensionalen Fall mit in der Umgebung der Ecke nicht gekrümmtem Rand wurde ein Beweis in der Monographie von **Оганесян** und **Руховец** [1979, §6.6] demonstriert, der hier auf den dreidimensionalen Fall mit i.allg. gekrümmtem Rand verallgemeinert wird.

(ii) **Bezeichnungen.** Seien Ω das Gebiet, in dem eine der betrachteten Randwertaufgaben 1.4.4. bzw. 1.4.8. gestellt ist. Ω und die auf $\partial\Omega$ ausgezeichnete Mannigfaltigkeit M (Kante) sind in 1.4.4. und 2.2.1. näher charakterisiert.

Das Ausgangskoordinatensystem (x_1, x_2, x_3) habe die Einheitsvektoren e_{x_1} , e_{x_2} und e_{x_3} . Weiterhin werde das in 2.2.1. definierte Koordinatensystem (y_1, y_2, y_3) mit den Einheitsvektoren e_{y_1} , e_{y_2} und e_{y_3} betrachtet.

Ferner sei $K(\delta) := \{x \in \Omega : \text{dist}(x, M) < \delta\}$ der innerhalb Ω liegende Anteil eines "Schlauchs" mit dem Radius δ und der Mittellinie M . Laut 2.2.1. kann $K(\delta)$ mit einer endlichen Anzahl von Mengen U_i überdeckt werden, deren jede im y -Koordinatensystem wie folgt beschrieben werden kann:

$$U_i := \{(y_1, y_2, y_3) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, \zeta) : 0 < \varphi < \omega_i, 0 < r < \delta, r^2 + \zeta^2 < R_i^2\}$$

Die beiden Randstücke, die in M zusammenstoßen und innerhalb $K(\delta)$ liegen, werden mit Γ_1 und Γ_2 bezeichnet. Folglich ist $\Gamma_1 = \{y \in K(\delta) : y_2 = 0\}$.

Schließlich bezeichnet $\frac{\partial v}{\partial \mathcal{N}} := \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} \cos(n, e_{x_i}) \frac{\partial v}{\partial x_j}$ die Konormalenableitung von v . Sie ist fast überall auf $\partial\Omega$ definiert, n ist der Vektor der äußeren Normale, a_{ij} sind die Koeffizienten aus dem Randwertproblem, vgl. 1.4.3. und 1.4.7.

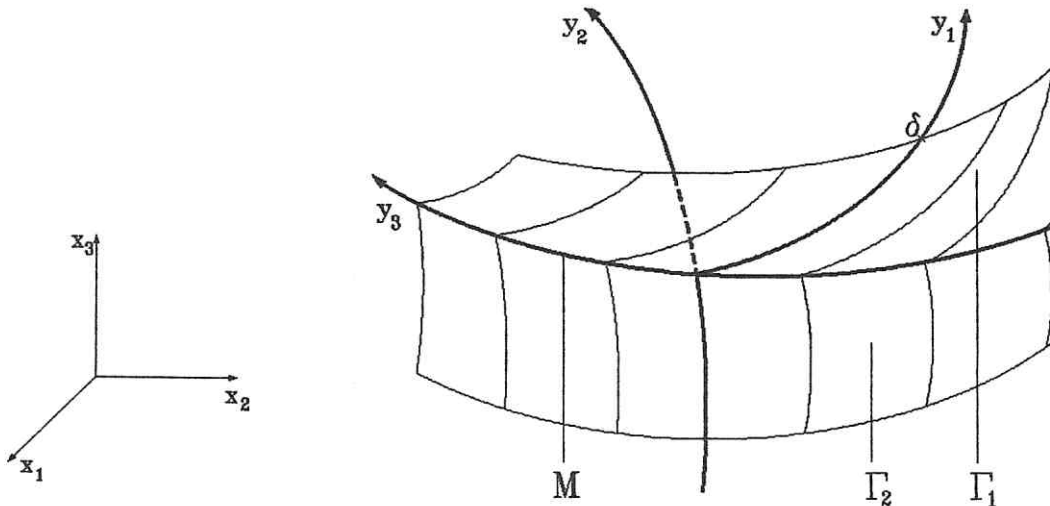
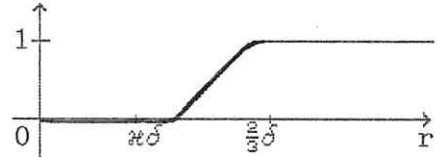


Abb. 2.1.: Ausschnitt aus einer gekrümmten Kante mit Angabe der Koordinaten.

(iii) Eigenschaften der Funktion Q. Sei δ ein Parameter. Dann gilt:

$$\begin{aligned} Q &\geq 0 && \text{in } \Omega \\ \exists \kappa \in (0, \frac{\pi}{3}): Q &= 0 && \text{in } K(\kappa\delta) \\ Q &= 1 && \text{in } \Omega \setminus K(\frac{2\pi}{3}\delta) \\ \frac{\partial Q}{\partial \mathcal{N}} &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$



$$\exists C = C(\delta): \left| \frac{\partial^2 Q}{\partial x_i \partial x_j} \right| < C \quad \text{fast überall in } \Omega$$

2.7.2. $b_0(\cdot)$. (i) Definition. Es werden auf Γ_1 Funktionen b_k , $k=0,1,2$, wie folgt definiert:

$$b_k(y_1, y_3) := \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}(x) \cos(\nu, e_{xi}) \frac{\partial y_k}{\partial x_j}, \quad k=1,2$$

$$b_0(y_1, y_3) := \frac{b_1(y_1, y_3)}{b_2(y_1, y_3)}$$

(ii) Lemma. Es gilt $b_0 \in L_\infty(\Gamma_1)$.

Beweis. Da $a_{ij} \in L_\infty(\Omega)$, sind die b_k beschränkt. Bleibt zu zeigen, daß eine Konstante C existiert, so daß

$$|b_2(y_1, y_3)| \geq C > 0 \quad \text{fast überall auf } \Gamma_1.$$

Seien $H_i = \left(\sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial x_j}{\partial y_i} \right)^2 \right)^{1/2}$ die Laméschen Koeffizienten. Aufgrund des Diffeomorphismus zwischen (x_1, x_2, x_3) und (y_1, y_2, y_3) gilt: $H_i \leq C < \infty$. Aus $e_{yi} = \frac{1}{H_i} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_j}{\partial y_i} e_{xj}$ (vgl. [Dreszer 1975, 11.2.9.])

und $\nu = e_{y1} \times e_{y3}$ auf Γ_1 folgt $\cos(\nu, e_{xi}) = \frac{1}{H_1 H_3} \begin{vmatrix} \frac{\partial x_{i+1}}{\partial y_1} & \frac{\partial x_{i+2}}{\partial y_1} \\ \frac{\partial x_{i+1}}{\partial y_3} & \frac{\partial x_{i+2}}{\partial y_3} \end{vmatrix}$

($i=1,2,3$, $x_4 := x_1$, $x_5 := x_2$). Andererseits gilt

$$\frac{\partial y_2}{\partial x_j} = \frac{\partial(y_2, x_{j+1}, x_{j+2})}{\partial(x_j, x_{j+1}, x_{j+2})} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial(y_2, x_{j+1}, x_{j+2})}{\partial(y_j, y_{j+1}, y_{j+2})} = -\frac{1}{H_1 H_2 H_3} \begin{vmatrix} \frac{\partial x_{j+1}}{\partial y_1} & \frac{\partial x_{j+2}}{\partial y_1} \\ \frac{\partial x_{j+1}}{\partial y_3} & \frac{\partial x_{j+2}}{\partial y_3} \end{vmatrix}$$

Folglich gilt $\frac{\partial y_2}{\partial x_j} = -\frac{1}{H_2} \cos(\nu, e_{xj})$. Indem dieses Ergebnis in die Definitionsgleichung für b_2 eingesetzt, H_2 mit dem Maximum aus der Summe gezogen, die positive Definitheit von $(a_{ij})_{i,j=1}^3$ ausgenutzt (vgl. 1.4.3. und 1.4.7.) und der räumliche Satz des Pythagoras angewandt wird, erhält man:

$$\begin{aligned} |b_2(y_1, y_3)| &= \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}(x) \cos(\nu, e_{xi}) \frac{1}{H_2} \cos(\nu, e_{xj}) \\ &\geq C \lambda_{\min}^0 \sum_{i=1}^3 \cos^2(\nu, e_{xi}) = C \lambda_{\min}^0 > 0 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2.7.3. $q(\cdot)$. (i) Definition. In $K(\delta)$ wird eine Funktion q wie folgt definiert:

$$q(y_1, y_2, y_3) := (y_1 - b_0(y_1, y_3) \cdot y_2)^2 + K y_2^2,$$

wobei K eine noch zu definierende Konstante ist.

(ii) Lemma. Es gilt $\frac{\partial q}{\partial \mathcal{N}} = 0$ auf Γ_1 .

Beweis. Durch Ausdifferenzieren und Einsetzen von $y_2=0$ erhält man auf Γ_1 :

$$\frac{\partial q}{\partial y_1} = 2y_1, \quad \frac{\partial q}{\partial y_2} = -2y_1 b_0(y_1, y_3), \quad \frac{\partial q}{\partial y_3} = 0 \quad \text{und somit} \quad \frac{\partial q}{\partial \mathcal{N}} = 2y_1 \sum_{k=1}^3 b_k(y_1, 0, y_3) \frac{\partial q}{\partial y_k} = 0$$

aufgrund der Definition von b_0 . ■

(iii) Lemma. Man kann ein hinreichend großes K wählen, so daß Konstanten C_1 und C_2 existieren mit

$$C_1^2(y_1^2 + y_2^2) \leq q(y_1, y_2, y_3) \leq C_2^2(y_1^2 + y_2^2)$$

Beweis. Da $(a-b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, gilt:

$$q(y) \leq 2y_1^2 + 2b_0^2 y_2^2 + Ky_2^2, \quad \text{folglich} \quad C_2^2 = \max\{2, 2\|b_0\|; L_\infty(\Gamma_1)\|^2 + K\}.$$

Aus $(a-2b)^2 \geq 0$ folgt $-2ab \geq -\frac{1}{2}a^2 - 2b^2$. Somit ist

$$q(y) = y_1^2 - 2b_0 y_1 y_2 + b_0^2 y_2^2 + Ky_2^2 \geq y_1^2 - \frac{1}{2}y_1^2 - 2b_0^2 y_2^2 + b_0^2 y_2^2 + Ky_2^2 = \frac{1}{2}y_1^2 + (K - b_0^2)y_2^2.$$

Man kann also $C_1^2 = \frac{1}{2}$ wählen, wenn $K \geq \frac{1}{2} + \|b_0\|; L_\infty(\Gamma_1)\|^2$. ■

2.7.4. (i) Definition $\psi(\cdot)$. $\psi(\eta)$ sei eine glatte Abschneidefunktion mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \psi(\eta) &\text{ ist definiert für } \eta \geq 0 \\ \psi(\eta) &\geq 0 \quad \text{für } \eta \geq 0 \\ \psi(\eta) &= 0 \quad \text{für } \eta \in [0, 1/9] \\ \psi(\eta) &= 1 \quad \text{für } \eta \geq 4/9 \end{aligned}$$

(ii) Definition $q_1(\cdot)$. Sei C_1 die Konstante aus 2.7.3.(iii). Dann wird in $K(\delta)$ die Funktion q_1 definiert durch

$$q_1(y) := \psi\left(\frac{q(y)}{C_1^2 \delta^2}\right).$$

(iii) Lemma. q_1 hat folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned} q_1 &\geq 0 \quad \text{in } K(\delta) \\ q_1 &= 0 \quad \text{in } K(\kappa\delta), \text{ wobei } \kappa = C_1/3C_2 \text{ (vgl. 2.7.3.(ii))} \\ q_1 &= 1 \quad \text{in } K(\delta) \setminus K(\frac{2}{3}\delta) \\ \frac{\partial q_1}{\partial \mathcal{N}} &= 0 \quad \text{auf } \Gamma_1 \end{aligned}$$

Beweis. Die ersten 3 Eigenschaften folgen sofort aus (i) und (ii) unter Beachtung von 2.7.3.(iii), denn

$$q(y) \leq C_2^2(y_1^2 + y_2^2) \leq C_2^2(\kappa\delta)^2 = \frac{1}{9}C_1^2\delta^2 \quad \text{in } K(\kappa\delta)$$

$$q(y) \geq C_1^2(y_1^2 + y_2^2) \geq C_1^2(\frac{2}{3}\delta)^2 = \frac{4}{9}C_1^2\delta^2 \quad \text{in } K(\delta) \setminus K(\frac{2}{3}\delta)$$

Die 4. Eigenschaft folgt aus 2.7.3.(ii).

(iv) Definition $q_2(\cdot)$. $q_2(y)$ sei eine in $K(\delta)$ definierte Funktion, die folgende Eigenschaften besitzt:

$$\begin{aligned} q_2 &\geq 0 && \text{in } K(\delta) \\ q_2 &= 0 && \text{in } K(x\delta) \\ q_2 &= 1 && \text{in } K(\delta) \setminus K(\frac{2}{3}\delta) \\ \frac{\partial q_2}{\partial \mathcal{N}} &= 0 && \text{auf } \Gamma_2 \end{aligned}$$

Die Konstruktion erfolgt analog der Funktion q_1 .

2.7.5. $Q(\cdot)$. (i) Definition. Sei ω der Kantenwinkel. Q sei wie folgt definiert:

$$Q = \begin{cases} q_1 \cos^2 \frac{\pi\varphi}{2\omega} + q_2 \sin^2 \frac{\pi\varphi}{2\omega} & \text{in } K(\delta) \\ 1 & \text{sonst in } \Omega \end{cases}$$

(ii) Lemma. Q besitzt die Eigenschaften 2.7.1.(ii).

Beweis. Die ersten 3 Eigenschaften folgen sofort aus 2.7.4.(iii) und 2.7.4.(iv). Weiterhin gilt für $x \in K(\delta)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial \mathcal{N}} &= \frac{\partial q_1}{\partial \mathcal{N}} \cos^2 \frac{\pi\varphi}{2\omega} - 2q_1 \cos \frac{\pi\varphi}{2\omega} \sin \frac{\pi\varphi}{2\omega} \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}} \left(\frac{\pi\varphi}{2\omega} \right) + \\ &\quad + \frac{\partial q_2}{\partial \mathcal{N}} \sin^2 \frac{\pi\varphi}{2\omega} + 2q_2 \sin \frac{\pi\varphi}{2\omega} \cos \frac{\pi\varphi}{2\omega} \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}} \left(\frac{\pi\varphi}{2\omega} \right) \end{aligned}$$

Für $\varphi=0$ gilt $\sin \frac{\pi\varphi}{2\omega} = 0$ und $\frac{\partial q_1}{\partial \mathcal{N}} = 0$, folglich $\frac{\partial Q}{\partial \mathcal{N}} = 0$.

Für $\varphi=\omega$ gilt $\cos \frac{\pi\varphi}{2\omega} = 0$ und $\frac{\partial q_2}{\partial \mathcal{N}} = 0$, folglich $\frac{\partial Q}{\partial \mathcal{N}} = 0$.

Für $x \in \Omega \setminus K(\delta)$ gilt $\frac{\partial Q}{\partial \mathcal{N}} = 0$, weil $Q \equiv 1$. ■

(iii) Lemma. Es existiert eine Konstante C , so daß

$$\|Q; L_\infty(\Omega)\| \leq C, \quad |Q; W^{1,00}(\Omega)| \leq C\delta^{-1} \quad \text{und} \quad |Q; W^{2,00}(\Omega)| \leq C\delta^{-2}.$$

Beweis. Aus 2.7.3.(iii) folgt, daß

$$\|q; L_\infty(K(\delta))\| \leq C\delta^2, \quad |q; W^{1,00}(K(\delta))| \leq C\delta \quad \text{und} \quad |q; W^{2,00}(K(\delta))| \leq C.$$

(C hängt von $\|a_{ij}; L_\infty(\Omega)\|$ und λ_{min}^0 ab.) Folglich

$$\|q_k; L_\infty(K(\delta))\| \leq C, \quad |q_k; W^{1,00}(K(\delta))| \leq C\delta^{-1} \quad \text{und} \quad |q_k; W^{2,00}(K(\delta))| \leq C\delta^{-2}$$

($k=1,2$). Somit folgt die Behauptung. ■

(iv) Bemerkung. Um exakt zu sein, hätte man in (i) zunächst Funktionen Q_i lokal in den einzelnen Überdeckungen U_i (vgl. 2.7.1.(ii)) definieren und diese dann mit Hilfe von Funktionen aus einer Zerlegung der Eins bezüglich der U_i zusammenfügen müssen (vgl. auch Bemerkung 2.2.1.(ii)).

3. Netze und Interpolationsfehler

3.1. Lokale Interpolationsfehlerabschätzungen

3.1.1. Einführung. Mit Hilfe des Lemmas von Ceá (vgl. 4.1.2.) wird die Abschätzung des Finite-Elemente-Fehlers auf ein Approximationsproblem zurückgeführt. Häufig wird dieses durch ein Interpolationsproblem vergrößernd ersetzt. Diese Fehlerabschätzungen sollen in Kapitel 3 behandelt werden.

Der Grundgedanke besteht darin, lokale Interpolationsfehlerabschätzungen über einzelnen Elementen in geeigneter Weise aufzusummieren, um globale Abschätzungen zu erhalten. Diesen lokalen Fehlern ist der erste Gliederungspunkt gewidmet.

Zunächst wird eine Auswahl finiter Elemente vorgestellt (3.1.2.). Unter der Voraussetzung der Quasiuniformität kann die Abschätzung des Interpolationsfehlers über einem solchen Element sofort der Literatur entnommen werden (3.1.3. bis 3.1.5.). Im Zusammenhang mit der Netzverfeinerung bei Kanten liegt jedoch der Wunsch nahe, auf die Quasiuniformität zu verzichten. Eine Zusammenstellung der Vielzahl der für solche Elemente bekannten und weiterer neuer Ergebnisse bilden dann den Schwerpunkt des Kapitels 3.1.

Klassische Resultate

3.1.2. Finite Elemente. (i) Ein finites Element wird charakterisiert durch ein Referenzelement $\hat{\Delta}$, einen Funktionenraum P (i.allg. Polynome) und eine Menge $\Sigma = \{\sigma_i\}_{i=1}^n$ stetiger linearer Funktionale $\sigma_i: C^k(\hat{\Delta}) \rightarrow \mathbb{R}$, $i=1..n$, für die gilt: Bei Vorgabe von n reellen Zahlen α_i wird durch das Gleichungssystem $\sigma_i(p) = \alpha_i$, $i=1..n$, genau eine Funktion $p \in P$ definiert.

(ii) Im weiteren sollen nur einige spezielle finite Elemente betrachtet werden. Dabei handelt es sich fast ausschließlich um die in (iii) und (iv) definierten Simplexelemente. Der Funktionenraum sei in diesem Fall der Raum der über $\hat{\Delta}$ (affin) linearen Funktionen. Als Funktionale werden diejenigen betrachtet, die einer stetigen Funktion den Wert in den Knoten, hier den Eckpunkten von $\hat{\Delta}$, zuweisen.

Als Basis $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ werden diejenigen Funktionen aus P gewählt, für die $\sigma_i(\psi_j) = \delta_{ij}$ (Kronecker-Symbol). Diese Funktionen werden auch als Formfunktionen bezeichnet.

(iii) **Dreieckselemente.** Das Referenzelement $\hat{\Delta}$ besitzt Knoten in den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$, die zugehörigen Formfunktionen sind $\psi_1(y) = 1 - y_1 - y_2$, $\psi_2(y) = y_1$ und $\psi_3(y) = y_2$.

(iv) Tetraederelemente. Das Referenzelement besitzt Knoten in den Eckpunkten $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(0,0,1)$; die zugehörigen Formfunktionen sind $\psi_1(\gamma) = 1 - \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3$, $\psi_2(\gamma) = \gamma_1$, $\psi_3(\gamma) = \gamma_2$ und $\psi_4(\gamma) = \gamma_3$.

3.1.3. Affin äquivalente Elemente [Ciarlet 1978, Kap. 3.1.].

(i) Definition. Δ und $\hat{\Delta}$ heißen affin äquivalent, wenn eine eindeutige affin-lineare Abbildung

$$x = F(\gamma) = B\gamma + \delta \in \mathbb{R}^N$$

($B \dots (N,N)$ -Matrix) existiert, so daß $\Delta = F(\hat{\Delta})$.

(ii) Lemma. Seien Δ und $\hat{\Delta}$ affin äquivalent. Wenn $\hat{v} \in W^{m,p}(\hat{\Delta})$, $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$, dann liegt v mit $v(x) = v(F(\gamma)) = \hat{v}(\gamma)$ im Raum $W^{m,p}(\Delta)$, und es existiert eine Konstante $C(m,N)$, so daß

$$\forall v \in W^{m,p}(\Delta) \quad |\hat{v}; W^{m,p}(\hat{\Delta})| \leq C \|B\|^m |\det B|^{-1/p} |v; W^{m,p}(\Delta)|$$

und $\forall \hat{v} \in W^{m,p}(\hat{\Delta}) \quad |v; W^{m,p}(\Delta)| \leq C \|B^{-1}\|^m |\det B|^{1/p} |\hat{v}; W^{m,p}(\hat{\Delta})|$.

(iii) Lemma. Seien Δ und $\hat{\Delta}$ affin äquivalent und $h, \hat{h}, \varrho, \hat{\varrho}$ Um- und Inkugeldurchmesser von Δ und $\hat{\Delta}$. Dann gilt:

$$\|B\| \leq h/\hat{\varrho}, \quad \|B^{-1}\| \leq \hat{h}/\varrho \quad \text{und} \quad |\det B| = \text{mes}\Delta / \text{mes}\hat{\Delta}.$$

3.1.4. Interpolation. (i) Definition. Sei $v \in C(\Delta)$, dann heißt die Funktion $\Pi v(x) := \sum_{i=1}^n v(x^{(i)}) \psi_i(F(\gamma))$ Interpolante von v . (Bezeichnungen siehe 3.1.2.(ii))

(ii) Satz (Klassische Interpolationsfehlerabschätzung auf dem Referenzelement). Seien $m \in \{0,1\}$, $p \in (\frac{3}{2}, \infty]$ und $q \in [1, \infty]$ Zahlen, so daß $W^{2,p}(\hat{\Delta}) \subset W^{m,q}(\hat{\Delta})$, und Π der in (i) eingeführte Interpolationsoperator. Dann gilt $\forall v \in W^{2,p}(\hat{\Delta})$

$$|v - \Pi v; W^{m,q}(\hat{\Delta})| \leq C(\hat{\Delta}) |v; W^{2,p}(\hat{\Delta})|.$$

Dieser Satz ist in noch allgemeinerer Form z.B. in der Monographie von Ciarlet [1978, Kap. 3.1.] bewiesen.

(iii) Folgerung. Seien $m \in \{0,1\}$ und $p, q \in [1, \infty]$ Zahlen, so daß $W^{2,p}(\hat{\Delta}) \subset W^{m,q}(\hat{\Delta})$. Seien außerdem Δ und $\hat{\Delta}$ affin äquivalente Elemente, ferner h, ϱ , der Um- bzw. Inkugeldurchmesser von Δ und Π der in (i) eingeführte Interpolationsoperator. Dann gilt $\forall v \in W^{2,p}(\hat{\Delta})$

$$|v - \Pi v; W^{m,q}(\Delta)| \leq C(\hat{\Delta}) (\text{mes}\Delta)^{1/q-1/p} h^2 \varrho^{-m} |v; W^{2,p}(\hat{\Delta})|.$$

Die Aussage ist unmittelbare Folgerung aus dem vorangegangenen Satz und den Lemmata in 3.1.3.

(iv) Bemerkung zum Beweis. Der Satz (ii) (oder (i)) wird von vielen Autoren mit Hilfe des Lemmas von Bramble und Hilbert (vgl. z.B. [Ciarlet 1978, Kap. 4.1.]), oder zumindest mit den gleichen Ideen, wie sie im Beweis des genannten Lemmas verwendet werden, bewiesen. In speziellen Fällen läßt sich der Beweis durch Ausnutzung der Poincaré-Ungleichung abkürzen, wie das z.B. in 3.1.10.(ii) vorgeführt wird.

Für $N=p=q=2$ existiert ein anderer, konstruktiver Beweis von Оганесян und Руховец [1979, §2.3] - vgl. auch 3.1.10.(iii).

(v) Die Konstante in der Interpolationsfehlerabschätzung. Einige Autoren setzen sich auch mit der Größe der Konstante auseinander (vgl. z.B. [Lehmann 1986a, 1986b, 1987], [Сиганевич 1988], [Dobrowolski 1989, 1990]). Darauf soll jedoch hier nicht näher eingegangen werden.

(vi) Interpolationsfehler in gewichteten Räumen. Auch für Funktionen aus gewichteten Räumen sind Interpolationsfehlerabschätzungen bekannt. Im folgenden soll ein Resultat von Grisvard [1985, Kap. 8.4.] angegeben werden.

Satz. Seien $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ ein Dreieck, a einer seiner Eckpunkte, $r = \text{dist}(x, a)$, $\mu \in [0, 1)$ eine reelle Zahl und

$$H^{2,\mu}(\Delta) = \left\{ v \in W^{1,2}(\Delta) : \|v; H^{2,\mu}(\Delta)\| := \left(\|v; W^{1,2}(\Delta)\|^2 + \sum_{|\alpha|=2} \|r^\mu D^\alpha v; L_2(\Delta)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\},$$

dann gilt $\forall v \in H^{2,\mu}(\Delta)$:

$$|v - \Pi v; W^{1,2}(\Delta)|^2 \leq C(\hat{\Delta}) h^4 e^{-2-2\mu} \sum_{|\alpha|=2} \|r^\mu D^\alpha v; L_2(\Delta)\|^2.$$

3.1.5. Quasiuniformität. (i) Definition. Für eine Familie von Vernetzungen \mathcal{T}_h mit dem gegen Null strebenden Parameter h (Schrittweite, vgl. dazu Kap 3.2.) werde die Funktion

$$g(h) = \max_{\Delta \in \mathcal{T}_h} \frac{\text{Umkugeldurchmesser von } \Delta}{\text{Inkugeldurchmesser von } \Delta}$$

betrachtet. Ist diese Funktion beschränkt, so heißt die Familie quasiuniform. Das bedeutet, daß In- und Umkugeldurchmesser der Elemente mit der gleichen Geschwindigkeit gegen Null streben.

(ii) Bemerkung. Für Dreieckselemente ist die Winkelbedingung von Zlámal hinreichend und notwendig für die Quasiuniformität:

$$\exists \theta_0 : \forall \Delta \theta_\Delta \geq \theta_0 > 0$$

(θ_Δ ist der kleinste Innenwinkel in Δ .) Dabei ist θ_0 nicht von h abhängig.

(iii) Folgerung. Unter den Voraussetzungen und mit den Bezeichnungen von Satz 3.1.4.(ii) gilt $\forall v \in W^{2,p}(\Delta)$

$$|v - \Pi v; W^{m,q}(\Delta)| \leq C(\hat{\Delta}) (\text{mes } \Delta)^{1/q-1/p} h^{2-m} |v; W^{2,p}(\Delta)|.$$

3.1.6. "Langgestreckte Elemente". (i) Quasiuniformität ist keine notwendige Bedingung für die Abschätzung 3.1.5.(iii). Elemente, deren Inkugeldurchmesser schneller als der Umkugeldurchmesser gegen Null geht, sollen in weiteren als "langgestreckte Elemente" bezeichnet werden. Für eine noch einzuschränkende Klasse langgestreckter Elemente kann ebenfalls eine Abschätzung wie in 3.1.5.(iii) gezeigt werden.

(ii) Satz [Jamet 1976b]. Sei $\Delta \subset \mathbb{R}^N$ ein N-Simplex (Dreieck oder Tetraeder für $N=2$ bzw. $N=3$) mit einem wie folgt definierten charakteristischen Winkel $\theta \in [0, \frac{1}{2}\pi]$:

Seien $\mathcal{z}^{(i)}$ ($i=1..N$) Vektoren, die zu N der $\frac{1}{2}N(N+1)$ Kanten von Δ parallel sind. Für einen beliebigen Vektor \mathcal{z} ist $\theta_i(\mathcal{z}) \in [0, \frac{1}{2}\pi]$ der Winkel zwischen \mathcal{z} und $\mathcal{z}^{(i)}$, $i=1..N$. Dann sei

$$\theta := \max_{\mathcal{z} \in \mathbb{R}^N} \min_{1 \leq i \leq N} \theta_i(\mathcal{z}).$$

Seien weiter Π der Interpolationsoperator über Δ mit dem Polynomgrad k . Dann gilt $\forall v \in W^{k+1,p}(\Delta)$

$$|v - \Pi v; W^{m,p}(\Delta)| \leq C(\hat{\Delta}) h^{k+1-m} (\cos \theta)^{-m} |v; W^{k+1,p}(\Delta)|,$$

falls $k, m \in \mathbb{N}$, $k \geq m$, $p \in [1, \infty]$ und $k+1-m \begin{cases} > N/p & \text{für } p < \infty \\ \geq 0 & \text{für } p = \infty \end{cases}$.

(iii) Folgerungen.

• Der Fall $m=0$ ist nicht interessant, er wird bereits in 3.1.4.(iii) erschlossen, d.h., in L_p -Räumen gilt $\forall v \in W^{2,p}(\Delta)$

$$\|v - \Pi v; L_q(\Delta)\| \leq C(\hat{\Delta}) h^2 (\text{mes} \Delta)^{1/p-1/q} |v; W^{2,p}(\Delta)|.$$

• Für $m=1$ gilt die in (ii) angegebene Abschätzung nur für $k > N/p$, d.h., im Falle linearer Ansatzfunktionen für $p > N$.

• Gilt für alle finiten Elemente einer Familie von Triangulationen $\theta \leq \theta_* < \frac{1}{2}\pi$, so kann man $(\cos \theta)^{-m}$ mit $(\cos \theta_*)^{-m}$ nach oben abschätzen und in die Konstante einbeziehen.

(iv) $\theta < \theta_*$. Es soll nun untersucht werden, für welche Triangulationen die Bedingung $\theta \leq \theta_*$ erfüllt ist.

Im zweidimensionalen Fall ist $\theta \leq \theta_*$ offenbar äquivalent zur folgenden Bedingung [Jamet 1976b]:

In jedem Dreieck kann man 2 Dreiecksseiten auswählen, für deren eingeschlossenen Winkel α gilt:

$$\alpha \geq \pi - 2\theta_* \quad \text{oder} \quad \alpha \leq 2\theta_*.$$

bzw. zu

Für den größten Innenwinkel α eines jeden Dreiecks der Triangulation gilt $\alpha \leq 2\theta_* < \pi$.

Damit ist z.B. eine Familie von Triangulationen, bei der der kleinste Innenwinkel der Dreiecke zwar gegen Null, die ande-

ren beiden für $h \rightarrow 0$ jedoch gegen $\frac{1}{2}\pi$ gehen, zugelassen. Nicht zugelassen ist der Fall, daß 2 Innenwinkel für $h \rightarrow 0$ gegen Null gehen.

Im dreidimensionalen Fall kann man folgende zu $\theta \leq \theta_*$ äquivalente Bedingung formulieren:

In jedem Tetraeder kann man 3 Kanten auswählen, für deren Winkel (jeweils paarweise betrachtet) gilt:

$$\alpha \geq \pi - 2\theta_* \quad \text{oder} \quad \alpha \leq 2\theta_*.$$

Damit sind z.B. alle Familien von Triangulationen zulässig, deren Tetraeder (mindestens) eine (Dreiecks-)Seitenfläche besitzen, für deren kleinsten Winkel $\alpha \geq \pi - 2\theta_*$ gilt. (Die 3 Seiten dieses Dreiecks kann man dann als die in der Bedingung genannten 3 Kanten wählen.)

(v) Der Fall $p=2$. Vielfach interessieren die Abschätzungen in den Sobolevräumen mit $p=2$. Dieser Fall setzt im Satz (ii) jedoch für $m \geq 1$ mindestens $k \geq 2$, d.h., quadratische Ansatzfunktionen voraus. Für lineare Ansatzfunktionen und $N=2$ findet man eine geeignete Abschätzung bei Krížek [1989]:

Satz. Sei Δ ein Dreieckselement, für dessen größten Innenwinkel α gilt: $\alpha \leq \alpha_0 < \pi$. Π sei der lineare Interpolationsoperator über Δ . Dann gilt $\forall v \in W^{2,2}(\Delta)$:

$$|v - \Pi v; W^{1,2}(\Delta)| \leq C(\hat{\Delta}, \alpha_0) h |v; W^{2,2}(\Delta)|.$$

In der gleichen Arbeit ist diese Abschätzung auch für $N=3$ formuliert, der Beweis ist jedoch fehlerhaft.

(vi) Die Winkelbedingung. Das folgende Beispiel zeigt die Notwendigkeit der Winkelbedingung $\alpha \leq \alpha_0 < \pi$ für die Interpolationsfehlerabschätzung in (v). Es erlaubt allerdings keine Aussage über den Finite-Elemente-Fehler bei Netzen, die diese Bedingung nicht erfüllen. (Die Interpolante ist nur ein willkürlich ausgewähltes Element aus V_h , es braucht nicht $\min_{v_h \in V_h} \|u - v_h; W^{1,2}(\Omega)\|$ zu realisieren, vgl. das Lemma von Ceá.)

Beispiel: Sei Δ das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(h,0)$ und $(\frac{1}{2}h, a)$. Die Interpolante für $v = x^2$ lautet $\Pi_h v = hx - \frac{1}{4}a^{-1}h^2 y$.

Da $|v - \Pi_h v; W^{1,2}(\Delta)|^2 = \int_{\Delta} [(2x-h)^2 + (4a)^{-2}h^4] dx dy \geq (4a^{-2}h^4) \text{mes}\Delta$ und $|v; W^{2,2}(\Delta)|^2 = \int_{\Delta} 4 dx dy = 4 \text{mes}\Delta$, folgt $|v - \Pi_h v; W^{1,2}(\Delta)| |v; W^{2,2}(\Delta)|^{-1} \geq h^2/8a$, d.h., wenn $a = o(h)$, konvergiert $|v - \Pi_h v; W^{1,2}(\Delta)|$ (wenn überhaupt) mit einer geringeren Ordnung als 1. Wenn a schneller als mit der Ordnung h^2 gegen Null geht, ist $|v - \Pi_h v; W^{1,2}(\Delta)|$ nicht mehr durch $|v; W^{2,2}(\Delta)|$ nach oben beschränkt.

Auswertung der Elementgröße in den einzelnen Richtungen

3.1.7. Vorbemerkungen. (i) Es liegt die Vermutung nahe, daß die Abschätzungen in 3.1.6. für langgestreckte Elemente nicht optimal sind. Wenn eine Triangulation in den einzelnen Koordinatenrichtungen mit verschiedenen Schrittweiten h_i , $i=1..N$, erfolgt, (die nicht mit der gleichen Ordnung gegen Null gehen müssen,) könnte man erwarten, daß auch die Interpolationsfehlerabschätzung dies berücksichtigt und nicht nur $h = \max_{1 \leq i \leq N} h_i$ verwendet wird. Die hierzu bekannten Resultate sollen im folgenden zusammengestellt werden.

(ii) Transformation der Ableitungen im zweidimensionalen Fall.

Seien $\hat{\Delta}$ das Referenzdreieck und Δ ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten zu den Koordinatenachsen parallel sind und die Längen h_1 und h_2 besitzen. Dann gilt für die Transformationsmatrix B (vgl. 3.1.3.) offenbar mit einer bestimmten Vorzeichenkonstellation $B = \text{diag}(\pm h_1, \pm h_2)$. Die Ableitungen transformieren sich wie folgt:

$$\left| \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \right| = h_1, \quad \frac{\partial x_1}{\partial y_2} = 0, \quad \frac{\partial x_2}{\partial y_1} = 0, \quad \left| \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \right| = h_2, \quad \left| \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \right| = h_1^{-1}, \quad \frac{\partial y_1}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = 0, \quad \left| \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \right| = h_2^{-1},$$

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right| = h_1^{-1} \left| \frac{\partial g}{\partial y_1} \right|, \quad \left| \frac{\partial g}{\partial x_2} \right| = h_2^{-1} \left| \frac{\partial g}{\partial y_2} \right|,$$

$$\left| \frac{\partial^2 g}{\partial y_1^2} \right| = h_1^2 \left| \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} \right|, \quad \left| \frac{\partial^2 g}{\partial y_1 \partial y_2} \right| = h_1 h_2 \left| \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2} \right|, \quad \left| \frac{\partial^2 g}{\partial y_2^2} \right| = h_2^2 \left| \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} \right|.$$

Es gelte nun $h_1 \leq \tau h_2$, $\tau < 1$. Dann beeinflusst eine kleine Abweichung der Dreieckslage von der Achsenparallelität die Abschätzungen nur wenig: Sei $B = \begin{pmatrix} \pm h_1 & z_1 \\ z_2 & \pm h_2 \end{pmatrix}$ mit $|z_1|, |z_2| \sim h_1$.

Dann gilt:

$$|\det B| \sim h_1 h_2, \quad \left| \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \right| = h_1, \quad \frac{\partial x_1}{\partial y_2} = z_1, \quad \frac{\partial x_2}{\partial y_1} = z_2, \quad \left| \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \right| = h_2,$$

$$\left| \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \right| = \left| \frac{h_2}{\det B} \right| \sim h_1^{-1}, \quad \left| \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \right| \sim h_2^{-1}, \quad \left| \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \right| \sim h_2^{-1}, \quad \left| \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \right| \sim h_2^{-1},$$

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right| \leq C \left(h_1^{-1} \left| \frac{\partial g}{\partial y_1} \right| + h_2^{-1} \left| \frac{\partial g}{\partial y_2} \right| \right), \quad \left| \frac{\partial g}{\partial x_2} \right| \leq C \left(h_2^{-1} \left| \frac{\partial g}{\partial y_1} \right| + h_2^{-1} \left| \frac{\partial g}{\partial y_2} \right| \right),$$

$$\left| \frac{\partial^2 g}{\partial y_1^2} \right| \leq h_1^2 \left| \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} \right| + 2h_1 |z_2| \left| \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2} \right| + z_2^2 \left| \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} \right| \leq C h_1^2 \sum_{i,j=1}^2 \left| \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \right|,$$

$$\left| \frac{\partial^2 g}{\partial y_1 \partial y_2} \right| \leq h_1 |z_1| \left| \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} \right| + (h_1 h_2 + |z_2 z_1|) \left| \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2} \right| + h_2 |z_2| \left| \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} \right|$$

$$\leq C \left(h_1^2 \left| \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} \right| + h_1 h_2 \left(\left| \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2} \right| + \left| \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} \right| \right) \right),$$

$$\left| \frac{\partial^2 g}{\partial y_2^2} \right| \leq z_1^2 \left| \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} \right| + 2h_2 |z_1| \left| \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2} \right| + h_2^2 \left| \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} \right| \leq C \left(h_1^2 \left| \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} \right| + h_1 h_2 \left| \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2} \right| + h_2^2 \left| \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} \right| \right).$$

(iii) Transformation der Ableitungen im dreidimensionalen Fall. Seien $\hat{\Delta} \subset \mathbb{R}^3$ ein Referenzelement und Δ ein affin äquivalentes Element, das durch Verschiebung und Stauchung in den Koordinatenrichtungen aus $\hat{\Delta}$ hervorgeht, d.h., für die Transformationsmatrix (vgl. 3.1.3.) gilt mit einer bestimmten Vorzeichenkonstellation $B = \text{diag}(\pm h_1, \pm h_2, \pm h_3)$. Analog zu (ii) erhält man:

$$\frac{\partial g}{\partial y_i} = \pm h_i \frac{\partial g}{\partial x_i}, \quad i=1..3, \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y_i \partial y_j} = \pm h_i h_j \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i, j=1..3.$$

Auch im dreidimensionalen Fall können zu (ii) analoge Abschätzungen angegeben werden, wenn Δ nur wenig von der Achsenparallelität abweicht.

Bemerkung. Im dreidimensionalen Fall kann der Raum nicht mit der oben betrachteten Menge von Tetraedern ausgefüllt werden. Man muß dann mehrere (eine von h unabhängige endliche Anzahl) Referenzelemente verwenden. Alle im weiteren für das in 3.1.2.(iv) eingeführte "Einheitstetraeder" getroffenen Aussagen können entsprechend auf andere Referenzelemente mit drei achsenparallelen Kanten übertragen werden.

3.1.8. Verallgemeinerung der Poincaré-Ungleichung. (i) Satz [Michlin 1978, §4.5]. Sei $G \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet, das als Vereinigung einer endlichen Anzahl von Teilgebieten dargestellt werden kann, die bezüglich je einer Kugel sternförmig sind. Sei weiterhin $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$, und n bezeichne die Anzahl der verschiedenen Monome der Ordnung $\leq k-1$. Es seien ferner l_i , $i=1..n$, in $W^{k,p}(G)$ beschränkte lineare Funktionale, die außer auf der Null nicht alle gleichzeitig auf einem Polynom vom Grad $\leq k-1$ verschwinden. Weiterhin sei $f(t_1, \dots, t_n)$ eine über \mathbb{R}^n definierte Funktion, für die gilt:

- a) $f(t_1, \dots, t_n) \geq 0$
 $f(t_1, \dots, t_n) = 0$ genau dann, wenn $t_1 = \dots = t_n = 0$
- b) $f(\lambda t_1, \dots, \lambda t_n) = |\lambda| f(t_1, \dots, t_n)$
- c) $f(t_1 + \tau_1, \dots, t_n + \tau_n) \leq f(t_1, \dots, t_n) + f(\tau_1, \dots, \tau_n)$

Dann existiert eine Konstante C , so daß $\forall v \in W^{k,p}(G)$

$$\|v; W^{k,p}(G)\| \leq C f(l_1 v, \dots, l_n v) + C |v; W^{k,p}(G)|.$$

(ii) Folgerung. Sei l ein in $W^{1,p}(\hat{\Delta})$ beschränktes lineares Funktional mit $l(1) \neq 0$. Dann existiert eine Konstante C , so daß $\forall v \in W^{1,p}(\hat{\Delta})$

$$\|v; W^{1,p}(\hat{\Delta})\| \leq C |l(v)| + C |v; W^{1,p}(\hat{\Delta})|.$$

Diese Aussage folgt unmittelbar aus (i) für $k=1$ und $f(t) = |t|$.

(iii) Die bekannte Poincaré-Ungleichung folgt aus (ii) mit

$$l(v) = \int_{G_T} v \, dx + \int_{\Gamma_T} v \, d\Gamma,$$

wobei G_T ein N -dimensionales Teilgebiet von G und Γ_T ein $(N-1)$ -dimensionales Teilgebiet von ∂G ist, so daß $\text{mes} G_T + \text{mes} \Gamma_T > 0$.

3.1.9. L_p -Norm-Abschätzungen. (i) Satz. Seien $p, q \geq 1$ reelle Zahlen, so daß $W^{2,p}(\Delta) \subset L_q(\Delta)$. Seien außerdem Δ und $\hat{\Delta}$ affin äquivalente Elemente, die durch Verschiebung und Streckung/Stauchung in den Koordinatenrichtungen auseinander hervorgehen (vgl. 3.1.7.(ii),(iii)), h_i , $i=1..N$, die Ausdehnung von Δ in Richtung der Achsen und Π der in 3.1.4.(i) eingeführte Interpolationsoperator. Dann gilt $\forall v \in W^{2,p}(\Delta)$:

$$\|v - \Pi v; L_q(\Delta)\| \leq C(\hat{\Delta}) (h_1 h_2 h_3)^{1/q-1/p} \sum_{i,j=1}^N h_i h_j \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}; L_p(\Delta) \right\|.$$

Die Aussage ist unmittelbare Folgerung aus 3.1.4.(ii) und 3.1.7.(ii),(iii).

(ii) Bemerkung. Die Voraussetzung $W^{2,p}(\Delta) \subset L_q(\Delta)$ ist laut 2.1.3.(iii) für $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ für beliebige p und q erfüllt. Im dreidimensionalen Fall benötigt man zusätzlich eine der beiden Bedingungen

$$p \geq \frac{3}{2} \quad \text{oder} \quad p < \frac{3}{2} \quad \text{und} \quad q \leq 1 + 2p / (3 - 2p).$$

(iii) Bemerkung. Für $N=p=q=2$ kann der Beweis konstruktiv geführt werden (vgl. [Оганесян/Руховец 1979, Kap 2.3.2.] und 3.1.10.(iii)).

3.1.10. $W^{1,p}$ -Norm-Abschätzungen, $N=2$. (i) Satz. Sei $\hat{\Delta}$ das Referenzdreieck (vgl. 3.1.2.(iii)) und $p \geq 1$. Π sei der in 3.1.4.(i) eingeführte Interpolationsoperator. Dann gilt für $v \in W^{2,p}(\hat{\Delta})$:

$$\left\| \frac{\partial}{\partial y_i} (v - \Pi v); L_p(\hat{\Delta}) \right\| \leq C(\hat{\Delta}) \left| \frac{\partial v}{\partial y_i}; W^{1,p}(\hat{\Delta}) \right|, \quad i=1,2.$$

Beweis. Sei $i=1$ und $w = \frac{\partial}{\partial y_1} (v - \Pi v)$. Offenbar gilt $l(w) := \int_0^1 w(\xi, 0) d\xi = (v - \Pi v)(1, 0) - (v - \Pi v)(0, 0) = 0$ und $\left| \int_0^1 w(\xi, 0) d\xi \right| \leq C \|w; W^{1,p}(\hat{\Delta})\|$ laut Spursatz 2.1.6. Folglich gilt mit 3.1.8.(ii)

$$\|w; L_p(\hat{\Delta})\| \leq \|w; W^{1,p}(\hat{\Delta})\| \leq C |w; W^{1,p}(\hat{\Delta})|. \quad (*)$$

Da $\frac{\partial w}{\partial y_j} = \frac{\partial^2 v}{\partial y_1 \partial y_j} + \frac{\partial^2 \Pi v}{\partial y_1 \partial y_j} = \frac{\partial^2 v}{\partial y_1 \partial y_j}$, $j=1,2$, (Πv ist linear), ist (*) äquivalent zur Behauptung. Für $i=2$ zeigt man die Behauptung analog. ■

(ii) Folgerung: Seien $\hat{\Delta}$ das Referenzdreieck und Δ ein Dreieck, das den Voraussetzungen in 3.1.7.(ii) genügt. Seien weiter $p \geq 1$ und Π der in 3.1.4.(i) eingeführte Interpolationsoperator. Dann gilt $\forall v \in W^{2,p}(\Delta)$

$$\|v - \Pi v; W^{1,p}(\Delta)\| \leq C(\hat{\Delta}) \sum_{i,j=1}^N h_j \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}; L_p(\Delta) \right\|.$$

Beweis. Die Transformation der Ungleichung in (i) auf Δ mit Hilfe von 3.1.7.(ii) liefert:

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} \left| \frac{\partial}{\partial x_1} (v - \Pi v) \right|^p dx &\leq C \frac{\text{mes} \hat{\Delta}}{\text{mes} \Delta} \left[h_1^{-p} \int_{\Delta} \left| \frac{\partial}{\partial y_1} (v - \Pi v) \right|^p dy + h_2^{-p} \int_{\Delta} \left| \frac{\partial}{\partial y_2} (v - \Pi v) \right|^p dy \right] \\ &\leq C \frac{\text{mes} \hat{\Delta}}{\text{mes} \Delta} \left[h_1^{-p} \int_{\Delta} \left(\left| \frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2} \right|^p + \left| \frac{\partial^2 v}{\partial y_1 \partial y_2} \right|^p \right) dy + h_2^{-p} \int_{\Delta} \left(\left| \frac{\partial^2 v}{\partial y_1 \partial y_2} \right|^p + \left| \frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2} \right|^p \right) dy \right] \\ &\leq C (h_1^p + h_1^{2p} h_2^{-p}) \int_{\Delta} \left| \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right|^p dx + C (h_1^p + h_2^p) \int_{\Delta} \left(\left| \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \right|^p + \left| \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right|^p \right) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Analog ist } \int_{\Delta} \left| \frac{\partial}{\partial x_2} (v - \Pi v) \right|^p dx &\leq C \frac{\text{mes} \hat{\Delta}}{\text{mes} \Delta} \left[h_2^{-p} \sum_{i=1}^2 \int_{\Delta} \left| \frac{\partial}{\partial y_i} (v - \Pi v) \right|^p dy \right] \\ &\leq C \frac{\text{mes} \hat{\Delta}}{\text{mes} \Delta} \left[h_2^{-p} \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Delta} \left| \frac{\partial^2 v}{\partial y_i \partial y_j} \right|^p dy \right] \\ &\leq C h_1^{2p} h_2^{-p} \int_{\Delta} \left| \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right|^p dx + C (h_1^{2p} h_2^{-p} + h_1^p) \int_{\Delta} \left| \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \right|^p dx + C (h_1^{2p} h_2^{-p} + h_1^p + h_2^p) \int_{\Delta} \left| \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right|^p dx \end{aligned}$$

Durch Aufsummieren folgt mit $h_1 \leq Ch_2^\tau$, $\tau < 1$, die Behauptung. ■

(iii) **Konstruktiver Beweis.** Für $p=2$ ist eine zu (i) ähnliche Ungleichung in der Monographie von Оганесян und Руховец [1979, Kap. 2.3.2.] konstruktiv bewiesen. Diese hat jedoch den Nachteil, daß auf der rechten Seite die Norm über dem Quadrat $Q=(0,1) \times (0,1)$ steht. Es ist jedoch möglich, den Beweis zu verbessern und die Ungleichung in der in (i) angegebenen Form zu beweisen.

Der Einfachheit halber seien die Koordinaten hier mit x und y bezeichnet, statt mit y_1 und y_2 .

Lemma. Sei $\hat{\Delta}$ das Referenzdreieck, $v \in W^{2,2}(\hat{\Delta})$ und Π der in 3.1.4.(i) eingeführte Interpolationsoperator. Dann existiert eine Konstante C , so daß

$$\int_{\hat{\Delta}} \left[\frac{\partial}{\partial x} (v - \Pi v) \right]^2 dx dy \leq C \int_{\hat{\Delta}} \left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

Beweis. Sei $w = v - \Pi v$, d.h., $\int_0^1 \frac{\partial w(\xi, 0)}{\partial \xi} d\xi = 0$. Es werden nun einige Umformungen und Abschätzungen angegeben, die dann am Ende des Beweises zusammengefügt werden. Sei $(x, y) \in \hat{\Delta}$.

$$\begin{aligned} \text{(a) Offenbar gilt } \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} &= \int_0^1 \left[\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial w(\xi, 0)}{\partial \xi} \right] d\xi = \\ &= \int_0^x \left[\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial w(\xi, 0)}{\partial \xi} \right] d\xi + \int_x^1 \left[\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial w(\xi, 0)}{\partial \xi} \right] d\xi = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

In I_1 gilt $0 < \xi < x$, während $x < \xi < 1$ in I_2 gilt. Diese beiden Fälle werden nun einzeln untersucht.

Sei $0 < \xi < x$.

(b) Der Punkt (ξ, y) liegt in $\hat{\Delta}$. Offenbar gilt dann:

$$\begin{aligned} \int_0^x \left[\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial w(\xi, 0)}{\partial \xi} \right] d\xi &= \int_0^x \left[\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial w(\xi, y)}{\partial \xi} + \frac{\partial w(\xi, y)}{\partial \xi} - \frac{\partial w(\xi, 0)}{\partial \xi} \right] d\xi \\ &= \iint_{0\xi}^{xx} \frac{\partial^2 w(\mu, y)}{\partial \mu^2} d\mu d\xi + \iint_{00}^{xy} \frac{\partial^2 w(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} d\eta d\xi. \end{aligned}$$

(c) Durch Abschätzen mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und Erweitern der Integrationsgrenzen mit Hilfe der Ungleichungen $0 < \xi < x < 1 - y < 1$ erhält man:

$$\begin{aligned} \int_{\hat{\Delta}} \left[\iint_{0\xi}^{xx} \frac{\partial^2 w(\mu, y)}{\partial \mu^2} d\mu d\xi \right]^2 dx dy &\leq \int_{\hat{\Delta}} \left[\iint_{0\xi}^{xx} d\mu d\xi \iint_{0\xi}^{xx} \left(\frac{\partial^2 w(\mu, y)}{\partial \mu^2} \right)^2 d\mu d\xi \right] dx dy \\ &\leq \int_0^1 \int_0^{1-y} \iint_{0\xi}^{xx} \left(\frac{\partial^2 w(\mu, y)}{\partial \mu^2} \right)^2 d\mu d\xi dx dy \leq \int_{000}^{111} \int_0^{1-y} \left(\frac{\partial^2 w(\mu, y)}{\partial \mu^2} \right)^2 d\mu d\xi dx dy \\ &= \int_{\hat{\Delta}} \left(\frac{\partial^2 w(\mu, y)}{\partial \mu^2} \right)^2 d\mu dy \end{aligned}$$

(d) Analog durch Abschätzen mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und den Ungleichungen $y < 1 - x < 1 - \xi$, $0 < x < 1$ und $xy < x(1 - x) < \frac{1}{4}$ erhält man:

$$\begin{aligned} \int_{\hat{\Delta}} \left[\iint_{00}^{xy} \frac{\partial^2 w(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} d\eta d\xi \right]^2 dx dy &\leq \int_{\hat{\Delta}} \left[\iint_{00}^{xy} d\eta d\xi \iint_{00}^{xy} \left(\frac{\partial^2 w(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} \right)^2 d\eta d\xi \right] dx dy \\ &\leq \frac{1}{4} \int_{\hat{\Delta}} \int_0^{1-\xi} \int_0^{1-\xi} \left(\frac{\partial^2 w(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} \right)^2 d\eta d\xi dx dy = \frac{1}{8} \int_{\hat{\Delta}} \left(\frac{\partial^2 w(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} \right)^2 d\eta d\xi. \end{aligned}$$

Sei nun $x < \xi < 1$.

(e) In diesem Fall liegt der Punkt $(x, 1 - \xi)$ innerhalb von $\hat{\Delta}$, und es gilt:

$$\begin{aligned} \int_x^1 \left[\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial w(\xi, 0)}{\partial \xi} \right] d\xi &= \\ &= \int_x^1 \left[\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial w(x, 1 - \xi)}{\partial x} + \frac{\partial w(x, 1 - \xi)}{\partial x} - \frac{\partial w(\xi, 1 - \xi)}{\partial \xi} + \frac{\partial w(\xi, 1 - \xi)}{\partial \xi} - \frac{\partial w(\xi, 0)}{\partial \xi} \right] d\xi \\ &= \int_x^1 \int_{1-\xi}^y \frac{\partial^2 w(x, \eta)}{\partial x \partial \eta} d\eta d\xi + \int_x^1 \int_{x\xi}^x \frac{\partial^2 w(\mu, 1 - \xi)}{\partial \mu^2} d\mu d\xi + \int_x^1 \int_0^{1-\xi} \frac{\partial^2 w(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} d\eta d\xi \end{aligned}$$

(f) Durch Abschätzen mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und Erweitern der Integrationsgrenzen mit Hilfe der Ungleichungen $0 < x < 1$, $0 < 1 - \xi < 1 - x < 1$ und $0 < y < 1 - x < 1$ erhält man:

$$\begin{aligned} \int_{\hat{\Delta}} \left| \int_x^1 \int_{1-\xi}^y \frac{\partial^2 w(x, \eta)}{\partial x \partial \eta} d\eta d\xi \right|^2 dx dy &\leq \int_{\hat{\Delta}} \left| \int_x^1 \int_{1-\xi}^y d\mu d\xi \right| \left| \int_x^1 \int_{1-\xi}^y \left(\frac{\partial^2 w(x, \eta)}{\partial x \partial \eta} \right)^2 d\eta d\xi \right| dx dy \\ &\leq \int_0^1 \int_0^{1-x} \left| \int_x^1 \int_{1-\xi}^y \left(\frac{\partial^2 w(x, \eta)}{\partial x \partial \eta} \right)^2 d\eta d\xi \right| dy dx \leq \int_{000}^{111} \int_0^{1-x} \left(\frac{\partial^2 w(\mu, y)}{\partial x \partial \eta} \right)^2 d\eta d\xi dy dx \\ &= \int_{\hat{\Delta}} \left(\frac{\partial^2 w(x, \eta)}{\partial x \partial \eta} \right)^2 d\eta dx \end{aligned}$$

(g) Durch Vertauschen der Grenzen, Anwenden der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, Erweitern der Grenzen mit Hilfe der Ungleichungen $0 < x < \xi < 1$ und Substituieren von $\xi = 1 - \zeta$ erhält man:

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} \left[\int_{x\xi}^1 \frac{\partial^2 w(\mu, 1-\xi)}{\partial \mu^2} d\mu d\xi \right]^2 dx dy &\leq \int_{\Delta} \left[\int_{xx}^1 d\mu d\xi \int_{xx}^1 \left(\frac{\partial^2 w(\mu, 1-\xi)}{\partial \mu^2} \right)^2 d\mu d\xi \right] dx dy \\ &\leq \int_{\Delta} \int_x^1 \int_x^{1-\zeta} \left(\frac{\partial^2 w(\mu, \zeta)}{\partial \mu^2} \right)^2 d\mu d\zeta dx dy \leq \frac{1}{2} \int_{\Delta} \left(\frac{\partial^2 w(\mu, \zeta)}{\partial \mu^2} \right)^2 d\mu d\zeta \end{aligned}$$

(h) Durch Abschätzen mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und Erweitern der Integralgrenzen mit Hilfe der Ungleichung $0 < x < 1$ erhält man:

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} \left[\int_x^1 \int_0^{1-\xi} \frac{\partial^2 w(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} d\eta d\xi \right]^2 dx dy &\leq \int_{\Delta} \left[\int_x^1 \int_0^{1-\xi} d\eta d\xi \int_x^1 \int_0^{1-\xi} \left(\frac{\partial^2 w(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} \right)^2 d\eta d\xi \right] dx dy \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_{\Delta} \left(\frac{\partial^2 w(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} \right)^2 d\eta d\xi. \end{aligned}$$

Es werden nun alle Abschätzungen zusammengefügt. Mit (a), (b) und (e) gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} &= \int_{0\xi}^{xx} \frac{\partial^2 w(\mu, y)}{\partial \mu^2} d\mu d\xi + \int_{00}^{xy} \frac{\partial^2 w(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} d\eta d\xi + \\ &+ \int_x^1 \int_{1-\xi}^y \frac{\partial^2 w(x, \eta)}{\partial x \partial \eta} d\eta d\xi + \int_{x\xi}^1 \frac{\partial^2 w(\mu, 1-\xi)}{\partial \mu^2} d\mu d\xi + \int_x^1 \int_0^{1-\xi} \frac{\partial^2 w(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} d\eta d\xi \end{aligned}$$

Durch Quadrieren dieser Gleichung, Abschätzen der rechten Seite mit $\left(\sum_{i=1}^5 a_i \right)^2 \leq 5 \sum_{i=1}^5 a_i^2$, Integrieren über $\hat{\Delta}$ und Abschätzen der rechten Seite mit (c), (d), (f), (g) und (h) erhält man:

$$\int_{\Delta} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy \leq 5 \left(\left(1 + \frac{1}{2}\right) \int_{\Delta} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx dy + \left(\frac{1}{8} + 1 + \frac{1}{4}\right) \int_{\Delta} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy \right).$$

Mit $w = v - \Pi v$ und $\frac{\partial^2 \Pi v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Pi v}{\partial x \partial y} = 0$ folgt die Behauptung. ■

3.1.11. $W^{1,p}$ -Norm-Abschätzungen, $N=3$. (i) Satz [Dobrowolski 1990b]. Sei $\hat{\Delta}$ das Referenztetraeder 3.1.2.(iv) und $p > 2$. Π sei der in 3.1.4.(i) eingeführte Interpolationsoperator. Dann gilt für $v \in W^{2,p}(\hat{\Delta})$:

$$\left\| \frac{\partial}{\partial y_i} (v - \Pi v); L_p(\hat{\Delta}) \right\| \leq C(\hat{\Delta}) \left| \frac{\partial v}{\partial y_i}; W^{1,p}(\hat{\Delta}) \right|, \quad i=1..3.$$

Beweis. Der von Dobrowolski angegebene Beweis benutzt nicht die verallgemeinerte Poincaré-Ungleichung 3.1.8. Mit deren Hilfe kann der Beweis jedoch völlig analog 3.1.10.(i) geführt werden.

Das Funktional l wird hier als Integral über eine Kante definiert. Zum Beweis der Beschränktheit ist die Einschränkung $p > 2$ notwendig. ■

(ii) Folgerung. Seien $\hat{\Delta}$ das Referenztetraeder und Δ ein Tetraeder, das den Voraussetzungen 3.1.7.(iii) genügt. Seien weiter $p > 2$ und Π der in 3.1.4.(i) eingeführte Interpolationsoperator. Dann gilt $\forall v \in W^{2,p}(\Delta)$

$$|v - \Pi v; W^{1,p}(\Delta)| \leq C(\hat{\Delta}) \sum_{i,j=1}^N h_j \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}; L_p(\Delta) \right\|.$$

Der Beweis erfolgt analog 3.1.10.(ii) durch Transformation der Abschätzung (i) von $\hat{\Delta}$ auf Δ und Summation über i .

(iii) Gegenbeispiel für $p=2$ [Dobrowolski 1990b]. Sei

$$w_\varepsilon(r) = 1 - \min\{1, \varepsilon \ln|\ln(r/e)|\} = \begin{cases} 0 & \text{für } r \leq a \\ 1 - \varepsilon \ln|\ln(r/e)| & \text{für } r > a \end{cases},$$

$r = (y_1^2 + y_2^2)^{1/2}$, $a = e^{1-\varepsilon}$. Für $v_\varepsilon(y) = y_3 w_\varepsilon$ gilt:

$$\begin{aligned} & \cdot v_\varepsilon \in W^{2,2}(\hat{\Delta}) \\ & \cdot \left\| \frac{\partial}{\partial y_3} (v_\varepsilon - \Pi v_\varepsilon); L_2(\hat{\Delta}) \right\| = \|w_\varepsilon; L_2(\hat{\Delta})\| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} (\text{mes } \hat{\Delta})^{1/2} \\ & \cdot \left| \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y_3}; W^{1,2}(\hat{\Delta}) \right| = |w_\varepsilon; W^{1,2}(\hat{\Delta})| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

Folglich existiert keine (von ε unabhängige) Konstante C , so daß $\forall v \in W^{2,2}(\Delta)$ $\left\| \frac{\partial}{\partial y_3} (v - \Pi v); L_2(\hat{\Delta}) \right\| \leq C \left| \frac{\partial v}{\partial y_3}; W^{1,2}(\hat{\Delta}) \right|$.

Beweis. Da das Beispiel bei Dobrowolski nur stichpunktartig vorgerechnet wurde, soll der Beweis hier ausführlich angegeben werden.

(j) Da v_ε nicht vom Polarwinkel φ abhängt, gilt:

$$\begin{aligned} |v_\varepsilon; W^{2,2}(\hat{\Delta})| &= \int_{\hat{\Delta}} \left[\left(\frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial r^2} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial r \partial y_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial y_3^2} \right)^2 \right] dy \\ &= \int_{\hat{\Delta}} \left[y_3^2 \left(\left(\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial r^2} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial r} \right)^2 \right) + 2 \left(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial r} \right)^2 \right] dy \end{aligned}$$

Es ist weiter $\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial r} = \frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial r^2} = 0$ für $r < a$, während für $r > a$ gilt:

$$\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial r} = \varepsilon \varepsilon (r \ln(r/e))^{-1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial r^2} = -\varepsilon r^{-2} [(\ln(r/e))^{-1} + (\ln(r/e))^{-2}].$$

Diese Ableitungen sind für jedes feste ε beschränkt, folglich ist $v_\varepsilon \in W^{2,2}(\hat{\Delta})$. \square

(jj) Da $y_3 = 0$ in $(0,0,0)$, $(1,0,0)$ und $(0,1,0)$ und $w_\varepsilon = 0$ in $(0,0,1)$, ist $\Pi v_\varepsilon = 0$. Folglich gilt $\frac{\partial}{\partial y_3} (v_\varepsilon - \Pi v_\varepsilon) = w_\varepsilon$. Da weiterhin punktweise $w_\varepsilon \rightarrow 1$ für $\varepsilon \rightarrow 0$, gilt die 2. Teilbehauptung. \square

(jjj) Offenbar erhält man durch Vergrößern des Integrationsgebiets, Berechnen der Ableitung (vgl.(j)), Ausführen der Integration und Einsetzen von a :

$$\begin{aligned}
|w_\varepsilon; W^{1,2}(\hat{\Delta})|^2 &= \int_{\hat{\Delta}} \left(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial r} \right)^2 dy \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^1 e^2 \varepsilon^2 r^{-2} (\ln(r/e))^{-2} r dr \\
&= \frac{1}{2\pi} e^2 \varepsilon^2 \left| \ln(r/e) \right|^{-1} \Big|_{\alpha}^1 = \frac{1}{2\pi} e^2 \varepsilon^2 (1 - e^{-1/\varepsilon}) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.
\end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt. ■

(iv) Das Gegenbeispiel zeigt, daß die Abschätzung

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_i} (v - \Pi v); L_2(\Delta) \right\|^2 \leq C \sum_{j=1}^3 h_j^2 \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}; L_2(\Delta) \right\|^2, \quad i=1..3,$$

auch für Tetraeder mit 3 achsenparallelen Kanten i.allg. nicht gilt. Die Vermutung, daß man aber vielleicht

$$|v - \Pi v; W^{1,2}(\Delta)|^2 = \sum_{i=1}^3 \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} (v - \Pi v); L_2(\Delta) \right\|^2 \leq C \sum_{i,j=1}^3 h_j^2 \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}; L_2(\Delta) \right\|^2$$

zeigen kann, ist nicht richtig. Transformiert man diese Ungleichung auf das Referenzelement, erhält man

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^3 h_i^{-2} \left\| \frac{\partial}{\partial y_i} (v - \Pi v); L_2(\hat{\Delta}) \right\|^2 &\leq C \sum_{i,j=1}^3 h_i^{-2} \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial y_i \partial y_j}; L_2(\hat{\Delta}) \right\|^2 \\
&= C \sum_{i=1}^3 h_i^{-2} \left| \frac{\partial v}{\partial y_i}; W^{1,2}(\Delta) \right|^2.
\end{aligned}$$

Sei o.B.d.A. $h_1 = o(h_2)$ und $h_2 = o(h_3)$, dann erhält man durch Multiplikation mit h_1 und im Grenzwert kleiner werdender Schrittweite

$$\left\| \frac{\partial}{\partial y_1} (v - \Pi v); L_2(\hat{\Delta}) \right\|^2 \leq C \left| \frac{\partial v}{\partial y_1}; W^{1,2}(\Delta) \right|^2.$$

Diese Abschätzung ist jedoch entsprechend (iii) nicht gültig.

(v) Funktionen aus $W^{3,p}(\Delta)$. Die Einschränkung $p > 2$ wurde in (i) notwendig, weil $l(w) = \int_0^1 w(\xi, 0, 0) d\xi$ in $W^{1,p}(\hat{\Delta})$, $p \leq 2$, nicht beschränkt ist. Dieses Funktional ist jedoch in $W^{2,p}(\hat{\Delta})$ für alle $p \geq 1$ beschränkt. Man kann folgenden Satz beweisen:

Satz: Mit den Bezeichnungen von (ii) und $p \geq 1$ gilt $\forall v \in W^{3,p}(\Delta)$:

$$\begin{aligned}
|v - \Pi v; W^{1,p}(\Delta)| &\leq \\
&\leq C(\hat{\Delta}) \sum_{i,j=1}^3 h_j \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}; L_p(\Delta) \right\| + \sum_{i,j,k=1}^3 h_j h_k \left\| \frac{\partial^3 v}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}; L_p(\Delta) \right\|
\end{aligned}$$

Beweis. Man wählt in Satz 3.1.8.(i) $f(t_1, t_2, t_3, t_4) = \sum_{i=1}^4 |t_i|$,

$l_i(w) = \int_{\hat{\Delta}} \frac{\partial w}{\partial y_i} dy$, $i=1..3$, und $l_4(w) = \int_0^1 w(\xi, 0, 0) d\xi$. Für $w \in W^{2,p}(\hat{\Delta})$

und mit $l_4(w) = 0$ gilt folglich

$$\|w; L_p(\hat{\Delta})\| \leq \|w; W^{2,p}(\hat{\Delta})\| \leq C(\hat{\Delta}) (|w; W^{1,p}(\hat{\Delta})| + |w; W^{2,p}(\hat{\Delta})|).$$

Setzt man nun $w = \frac{\partial}{\partial y_1}(v - \Pi v)$ ein und transformiert auf Δ , so erhält man:

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_1}(v - \Pi v); L_p(\Delta) \right\| \leq \left[\sum_{j=1}^3 h_j \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_j}; L_p(\Delta) \right\| + \sum_{j,k=1}^3 h_j h_k \left\| \frac{\partial^3 v}{\partial x_1 \partial x_j \partial x_k}; L_p(\Delta) \right\| \right]$$

Diese Ungleichung zeigt man analog für $i=2$ und $i=3$. Durch Aufsummieren erhält man die Behauptung. ■

Bemerkung: Bei quadratischer Interpolation über einem 10-Knoten-Tetraeder (das Referenztetraeder 3.1.2.(iv) mit Seitenmittenknoten) kann man $l_1(w) = \int_0^{1/2} w(\xi, 0, 0) d\xi$, $l_2(w) = \int_{1/2}^1 w(\xi, 0, 0) d\xi$, $l_3(w) = \int_0^{1/2} w(\xi, \frac{1}{2}, 0) d\xi$ und $l_4(w) = \int_0^{1/2} w(\xi, 0, \frac{1}{2}) d\xi$ wählen und analog $\forall p \geq 1$ und $\forall v \in W^{3,p}(\Delta)$ zeigen:

$$\left| (v - \Pi v); W^{1,p}(\Delta) \right| \leq \sum_{i,j,k=1}^3 h_j h_k \left\| \frac{\partial^3 v}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}; L_p(\Delta) \right\|.$$

3.2. Vernetzung und Interpolation

3.2.1. Vorbemerkungen. (i) Die erste Etappe bei der Lösung einer Randwertaufgabe mit der Finite-Elemente-Methode besteht in der Diskretisierung des betrachteten Gebiets und der Festlegung des zugehörigen Raumes V_h (bzw. V_{0h}) der Ansatz- und Testfunktionen.

Es sollen nur Tetraedervernetzungen des Gebiets Ω mit der üblichen Voraussetzung zugelassen werden, daß zwei beliebige Tetraeder (als abgeschlossene Mengen des \mathbb{R}^3 betrachtet) entweder eine Seitenfläche, eine Kante oder einen Eckpunkt gemeinsam haben oder durchschnittsfremd sind.

Weiterhin sollen nur quasiuniforme Vernetzungen (vgl. 3.1.5.) betrachtet werden. Die in 3.1. angegebenen Abschätzungen für "langgestreckte Elemente" konnten noch nicht zur globalen Interpolationsfehlerabschätzung für Funktionen u mit den Eigenschaften 1.4.8. genutzt werden, auch wenn die numerischen Tests mit solchen Elementen gute Resultate brachten (vgl. 5.).

(ii) Wenn der Durchmesser aller Elemente einer Vernetzung von der gleichen Größenordnung h ist, so wird diese Triangulation als unverfeinert bezeichnet. Im Mittelpunkt der Betrachtungen stehen jedoch Netze, deren Elementdurchmesser in der Nähe der Kante (Ecke) klein gegen h ist. Diese Netze heißen verfeinert.

Die im folgenden beschriebenen Triangulationen besitzen einen Parameter μ ; für $\mu=1$ entsteht ein unverfeinertes Netz, mit kleiner werdendem μ wird das Netz zur Kante hin immer stärker verfeinert.

(iii) Die in diesem Kapitel definierten Vernetzungen beziehen sich zunächst auf Aufgaben in Gebieten mit Kanten ohne Polyederecken. Die notwendigen Modifikationen für Polyedergebiete werden in 3.5. angegeben.

3.2.2. Bezeichnungen. (i) Es bezeichnen $h \in (0,1)$ und $\mu \in (0,1]$ die Parameter der Vernetzung (vgl. auch 3.2.1.(ii)) sowie $n = n(h)$ eine natürliche Zahl in der Größenordnung h^{-1} . Weiterhin seien definiert: $r_i := b(ih)^{1/\mu}$, $i=0..n$, $h_i := r_i - r_{i-1}$, $i=1..n$, $d_i := \{x \in \bar{\Omega} : r_{i-1} \leq \text{dist}(x, M) < r_i\}$, $i=1..n$, und $\mathcal{D} := \bigcup_{i=1}^n d_i$. Die Konstante b sei so gewählt, daß $r_n < \varrho_1$ (ϱ_1 vgl. 1.1.2.), d.h., der singuläre Anteil der Lösung verschwindet außerhalb \mathcal{D} .

(ii) **Lemma.** Mit den in (i) festgelegten Bezeichnungen gelten folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} b^\mu h r_i^{1-\mu} &\leq h_i \leq (1/\mu) b^\mu h r_i^{1-\mu}, & i=1..n \\ r_{i-1} &< r_i \leq 2^{1/\mu} r_{i-1}, & i=2..n \\ h_{i-1} &\leq h_i \leq (1/\mu) 2^{1/\mu-1} h_{i-1}, & i=2..n \end{aligned}$$

Beweis. Es gilt laut Definition $h_i = r_i - r_{i-1} = b(ih)^{1/\mu} - b((i-1)h)^{1/\mu} = bh(ih)^{1/\mu-1} \left[i - (i-1) \left(\frac{i-1}{i} \right)^{1/\mu} \right]$. Indem Minimum und Maximum der Funktion $g(x) = x - x \left(\frac{x-1}{x} \right)^{1/\mu}$, $x > 0$, bestimmt wird, erhält man $1 \leq i - (i-1) \left(\frac{i-1}{i} \right)^{1/\mu} \leq \frac{1}{\mu} \quad \forall i \in \mathbb{N}$ und somit die erste Ungleichung.

Da $\frac{r_i}{r_{i-1}} = \left(\frac{i}{i-1} \right)^{1/\mu}$ für $i \geq 2$ gilt, folgt mit $1 < \frac{i}{i-1} \leq 2$ unmittelbar die zweite Ungleichung.

Aus den ersten beiden Ungleichungen folgt: $h_i \leq (1/\mu) b^\mu h r_i^{1-\mu} \leq 2^{1/\mu-1} (1/\mu) b^\mu h r_{i-1}^{1-\mu} \leq 2^{1/\mu-1} (1/\mu) h_{i-1}$. Die Feststellung, daß $h_{i-1} = h_i$ für $\mu=1$ und $h_{i-1} < h_i$ für $\mu < 1$ infolge der Konvexität von $g(x) = x^{1/\mu}$, vervollständigt den Beweis. ■

(iii) Nachdem Ω vernetzt ist (vgl. 3.2.3.), wird mit d_i^h die Vereinigung aller derjenigen Tetraeder bezeichnet, deren Abstand zur Mannigfaltigkeit M in Intervall $[r_{i-1}, r_i)$ liegt, $i=1..n$. Weiterhin werden \mathcal{D}^h als die Vereinigung der d_i^h , $i=1..n$, das Ω approximierende Gebiet Ω^h als Vereinigung aller Tetraeder der Vernetzung und Γ^h als Rand von Ω^h definiert. Knotenpunkte, die auf Γ^h liegen, werden als Randpunkte bezeichnet, alle anderen sind innere Knoten.

3.2.3. Vernetzung. Unter Beachtung von 3.2.1.(i) wird die Vernetzung \mathcal{T}_h so gewählt, daß folgende Forderungen erfüllt sind:

(i) Der Durchmesser aller Tetraeder, die durchschnittsfremd mit \mathcal{D} sind, liegt in der Größenordnung h , während der Durch-

messer aller Tetraeder, die einen nichtleeren Durchschnitt mit d_i haben, in der Größenordnung h_i liegt. (Daß Tetraeder mit zwei benachbarten d_i gemeinsame Punkte haben können, stört nicht, da h_i und h_{i-1} in der gleichen Größenordnung liegen, vgl. 3.2.2.(ii).)

(ii) Alle Randknoten K , die zu d_i^h gehören, haben einen Abstand $\text{dist}(K, \Gamma) \leq Ch_i^2$ zu $\Gamma = \partial\Omega$. Alle anderen Randknoten K haben einen Abstand $\text{dist}(K, \Gamma) \leq Ch^2$ zu Γ .

(iii) Beim Dirichlet-Problem gelte $\Omega^h \subset \bar{\Omega}$, während bei Problemen mit natürlichen Randbedingungen $\bar{\Omega} \subset \Omega^h$ gefordert wird.

3.2.4. Konstruktion verfeinerter Netze. Mit der Frage der Existenz und Konstruktionsmöglichkeiten solcher Netze haben sich bereits mehrere Autoren beschäftigt.

(i) Fritzsche [1989] beschreibt einen Algorithmus zu dyadischen Gitterzerlegung und untersucht, in welchen Fällen dieser Algorithmus endlich ist. Die in 3.2.2./3.2.3. beschriebene Klasse von Netzen gehört dazu.

Der Grundgedanke besteht darin, von einer Anfangsvernetzung ausgehend, die Elemente so lange zu unterteilen, bis die Verfeinerungsbedingungen (vgl. 3.2.3.) erfüllt sind.

(ii) In der Monographie von Шафаров [1989, §2.6, §2.7] sind Algorithmen und auch eine gute Bibliographie zur Triangulation dreidimensionaler Gebiete angegeben. Zur Netzverfeinerung in der Umgebung ausgewählter Punkte und Linien werden zwei Strategien vorgeschlagen:

(a) Verwenden einer nichteuklidischen Metrik in herkömmlichen Vernetzungsalgorithmen

(b) Transformation von Ω auf ein Gebiet Ω' , Vernetzung von Ω' (ohne Verfeinerung) und Rücktransformation

Die Schwierigkeit wird auf das Finden einer geeigneten Metrik bzw. Abbildungsvorschrift verlagert. In der genannten Literaturstelle wird diese diskutiert, bis zu einer Realisierung für dreidimensionale Aufgaben sind jedoch noch weitere Untersuchungen notwendig. Eine Realisierung von (a) wäre dann jedoch sehr elegant.

3.2.5. Lemma. Die Anzahl der Elemente bei Vernetzungen, die den Bedingungen 3.2.3. genügen, liegt in der Größenordnung $h^{-1/\mu}$ für $\mu < \frac{1}{3}$, $h^{-3} |\ln h|$ für $\mu = \frac{1}{3}$ und h^{-3} für $\mu > \frac{1}{3}$, d.h., für $\mu > \frac{1}{3}$ liegt die Elementanzahl bei verfeinerten Netzen in der gleichen Ordnung wie bei nicht verfeinerten Netzen.

Beweis. (i) Das Volumen V_i von d_i^h liegt in der Größenordnung $r_i^2 - r_{i-1}^2$. Folglich gilt mit 3.2.2.(i) $V_i \sim (ih)^{2/\mu} - ((i-1)h)^{2/\mu} \sim i^{2/\mu-1} h^{2/\mu}$.

(ii) Für die Anzahl der Volumenelemente in d_i^h gilt $\nu_i \sim V_i h_i^{-3}$ und mit (i) und 3.2.2.(ii) $\nu_i \sim V_i (hr_i^{1-\mu})^{-3} \sim i^{2/\mu-1} h^{2/\mu} h^{-3} (ih)^{-3(1-\mu)/\mu} = h^{-1/\mu} i^{2-1/\mu}$. Folglich gilt für die Gesamtanzahl der Volumenelemente $\nu = \sum_{i=1}^n \nu_i \sim h^{-1/\mu} \sum_{i=1}^n i^{2-1/\mu}$. Durch Abschätzung der Summe nach oben und unten analog zum Integralkriterium für Reihen folgt mit $n \sim h^{-1}$ die Behauptung. Dabei müssen die Fälle $\mu < \frac{1}{3}$, $\mu = \frac{1}{3}$, $\frac{1}{3} < \mu < \frac{1}{2}$, $\mu = \frac{1}{2}$ und $\mu > \frac{1}{2}$ unterschieden werden. Das soll an dieser Stelle nicht vorgeführt werden. ■

3.2.6. Die Räume V_h und V_{0h} . (i) Der Raum V_h ist mit einer Vernetzung \mathcal{T}_h , für die $\bar{\Omega} \subset \Omega^h$ gilt, assoziiert. Er besteht aus allen über Ω^h stetigen Funktionen v_h , deren Einschränkung auf ein beliebiges Tetraeder $\Delta \in \mathcal{T}_h$ eine (affin) lineare Funktion ist: $\exists a_i, i=0..3: v_h|_{\Delta} = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$.

Als Basis in V_h wird die Menge der Funktionen aus V_h betrachtet, die in je einem Knoten den Wert Eins und in allen anderen Knoten den Wert Null annehmen.

Die Funktionen aus V_h sind offenbar auf $\bar{\Omega}$ definiert, und es gilt $V_h \subset V = W^{1,2}(\Omega)$. (Dabei wird die Menge der auf Ω eingeschränkten Funktionen aus V_h mit V_h identifiziert.)

(ii) Der Raum V_{0h} ist mit einer Vernetzung \mathcal{T}_h , für die $\Omega^h \subset \bar{\Omega}$ gilt, assoziiert. Er besteht aus allen über $\bar{\Omega}$ stetigen Funktionen v_h , deren Einschränkung auf ein beliebiges Tetraeder $\Delta \in \mathcal{T}_h$ eine (affin) lineare Funktion und deren Einschränkung auf $\bar{\Omega} \setminus \text{int}(\Omega^h)$ identisch Null ist. (Funktionen aus V_{0h} nehmen folglich auf Γ_h den Wert Null an.)

Als Basis in V_{0h} wird die Menge der Funktionen aus V_{0h} betrachtet, die in je einem inneren Knoten den Wert Eins und in allen anderen Knoten den Wert Null annehmen.

Die Funktionen aus V_{0h} sind offenbar auf $\bar{\Omega}$ definiert und auf $\partial\Omega$ gleich Null. Es gilt $V_{0h} \subset V_0 = \{v \in W^{1,2}(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0\}$.

3.2.7. Interpolation. (i) **Definition.** Sei $v(x)$ eine stetige Funktion. Dann wird die Interpolante $\Pi_h v \in V_h$ (bzw. $\Pi_h v \in V_{0h}$) als Linearkombination der in 3.2.6. erklärten Basisfunktionen definiert, wobei die Koeffizienten gleich den Werten von $v(x)$ in den entsprechenden Knotenpunkten sind.

(ii) **Bemerkung.** Im Falle $\Omega^h \setminus \bar{\Omega} \neq \emptyset$ muß die zu interpolierende Funktion zunächst auf Ω^h fortgesetzt werden. Die Einschränkung der in (i) definierten "globalen" Interpolante auf ein Tetraeder $\Delta \in \mathcal{T}_h$ stimmt mit der in 3.1.4. definierten "lokalen" Interpolante überein.

(iii) Bemerkung. In Falle $\bar{\Omega} \setminus \Omega^h \neq \emptyset$ stimmt die Einschränkung der in (i) definierten globalen Interpolante auf ein Tetraeder $\Delta \in \mathcal{T}_h$ mit der lokalen Interpolante nur dann überein, wenn alle Randknoten auf $\partial\Omega$ liegen. (Die globale Interpolante, wie sie in (i) definiert ist, gehört zu V_{0h} und nimmt somit in Randknoten den Wert Null an. Damit unterscheidet sie sich dort i.allg. vom Funktionswert von u .) Da das nicht vorausgesetzt werden kann, ist es für die Interpolationsfehlerabschätzung in 3.4. notwendig, einen weiteren Operator Π'_h zu betrachten, der wie folgt definiert wird:

- Es gilt $\Pi'_h u = u$ in allen Knotenpunkten.
- Die Einschränkung von $\Pi'_h u$ auf ein Tetraeder $\Delta \in \mathcal{T}_h$ ist eine (affin) lineare Funktion.

3.2.8. Satz (Inverse Ungleichung). Sei \mathcal{F} eine Familie quasi-uniformer Vernetzungen \mathcal{T}_h und $\Delta \in \mathcal{T}_h \in \mathcal{F}$ ein zu $\hat{\Delta}$ affin äquivalentes Tetraederelement mit dem Umkugeldurchmesser h . Dann gilt für alle über Δ (affin) linearen Funktionen v_h :

$$|v_h; W^{1,2}(\Delta)| \leq C(\hat{\Delta}) h^{-1} \|v_h; L_2(\Delta)\|.$$

Zum Beweis vgl. [Ciarlet 1978, Theorem 3.2.6.]. Dort ist eine wesentlich allgemeinere Aussage unter stärkeren Forderungen gezeigt. Die hier formulierte Behauptung findet man im ersten Teil des Beweises.

3.3. Globale Interpolationsfehlerabschätzung

- natürliche Randbedingungen -

3.3.1. Vorbemerkungen. (i) Für die Abschätzung des Interpolationsfehlers bei stückweise linearen Ansatzfunktionen wird i.allg. vorausgesetzt, daß die zu interpolierende Funktion aus dem Raum $W^{2,2}(\Omega)$ ist. Die Lösung u des betrachteten Randwertproblems 1.4.8. besitzt diese Eigenschaft nicht.

Deshalb wird zum singulären Anteil u_s der Lösung u zunächst eine regularisierte Funktion bestimmt, die in gewissem Sinne nahe bei u_s liegt. Dazu eignet sich die Steklovsche Mittelung (vgl. 2.5.). Es ist nun die Differenz zwischen dem singulären Anteil u_s der Lösung u und der Interpolante der gemittelten Funktion $\Pi_h u_s^\ell$ abzuschätzen. Mit Hilfe der Dreiecksungleichung kann das Problem in zwei Teilprobleme zerlegt werden, wobei das zweite ein Interpolationsproblem bezüglich der $W^{2,2}$ -Funktion u_s^ℓ ist:

$$\|u_s - \Pi_h u_s^\ell\| \leq \|u_s - u_s^\ell\| + \|u_s^\ell - \Pi_h u_s^\ell\|.$$

Die Abschätzung des Interpolationsfehlers für den regulären Anteil erfolgt wie gewohnt.

(ii) Sowohl für die Mittelung als auch für die Interpolation (i.allg. ist $\Omega^h \setminus \bar{\Omega} \neq \emptyset$) ist es notwendig, u zunächst über den Rand hinaus fortzusetzen (vgl. 2.4.). Die fortgesetzte Funktion Fu wird der Einfachheit halber wieder mit u bezeichnet, da keine Mißverständnisse entstehen können.

(iii) Im folgenden werden zunächst vier Lemmata bewiesen, die Ergebnisse werden dann in Satz 3.3.6. zusammengefaßt. Eine Diskussion des Resultats erfolgt dann in 3.6.

Es gelten die in 3.2.2. eingeführten Bezeichnungen.

3.3.2. Lemma. Sei $\mathcal{D}_+ = \{x \in \mathbb{R}^3 : \text{dist}(x, M) < \varrho_1\} = \{x \in \mathbb{R}^3 : \xi(r) > 0\}$ (ϱ_1 vgl. 1.1.2.). Die Funktion $u_s = \xi(r)r^\lambda \Phi(\varphi) \chi(x)$ werde entsprechend 2.4.10. auf \mathcal{D}_+ fortgesetzt. Weiterhin seien Π_h der in 3.2.7. eingeführte Interpolationsoperator und u_s^e die Steklov-Mittelung von u_s , wobei $\varrho = h_1/5$. Unter der Voraussetzung $\mu < \lambda$ gilt für die Interpolante $\Pi_h u_s^e$:

$$|u_s - \Pi_h u_s^e; W^{1,2}(\mathcal{D})| \leq Ch \|\chi; W_\lambda^{2,2}(\mathcal{D})\|.$$

Beweis. (i) Mit Hilfe von $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}^h$, der Dreiecksungleichung, der Ungleichung $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, Lemma 2.5.8. und Folgerung 3.1.5.(iii) erhält man:

$$\begin{aligned} |u_s - \Pi_h u_s^e; W^{1,2}(\mathcal{D})|^2 &\leq 2 |u_s - u_s^e; W^{1,2}(\mathcal{D}^h)|^2 + 2 |u_s^e - \Pi_h u_s^e; W^{1,2}(\mathcal{D}^h)|^2 \\ &= 2 |u_s - u_s^e; W^{1,2}(d_1^h)|^2 + 2 |u_s - u_s^e; W^{1,2}(\mathcal{D}^h \setminus d_1^h)|^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{\Delta \in d_i^h} |u_s^e - \Pi_h u_s^e; W^{1,2}(\Delta)|^2 \\ &\leq C\omega^2(u_s, \sqrt{3}\varrho; W^{1,2}(d_1^h)) + C\omega^2(u_s, \sqrt{3}\varrho; W^{1,2}(\mathcal{D}^h \setminus d_1^h)) + C \sum_{i=1}^n h_i^2 |u_s^e; W^{2,2}(d_i^h)|^2 \end{aligned}$$

Diese Summanden werden nun einzeln abgeschätzt:

(ii) Mit Hilfe von 2.5.3., 2.4.11. und $h_1 = 5\varrho$ erhält man $\forall \varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} \omega^2(u_s, \sqrt{3}\varrho; W^{1,2}(d_1^h)) &\leq C(\lambda) e^{2(\lambda-\varepsilon)} \|u_s; W^{1+\lambda-\varepsilon, 2}(\mathcal{D}_+)\|^2 \\ &\leq Ch_1^{2(\lambda-\varepsilon)} \|\chi; W_\lambda^{2,2}(\mathcal{D})\|^2 \end{aligned}$$

(iii) Sei $\mathcal{D}_\varrho = \{x \in \mathcal{D}_+ : \text{dist}(x, M) > \varrho\}$. Da $u_s = 0$ außerhalb von \mathcal{D}_+ , gilt mit Hilfe von 2.5.3.:

$$\omega^2(u_s, \sqrt{3}\varrho; W^{1,2}(\mathcal{D}^h \setminus d_1^h)) \leq 3\varrho^2 \|u_s; W^{2,2}(\mathcal{D}_\varrho)\|^2$$

Man kann nun $\varrho^{2(1-\lambda+\varepsilon)} < r^{2(1-\lambda+\varepsilon)}$ in \mathcal{D}_ϱ ausnutzen, um zu einer gewichteten Norm überzugehen, die dann mit 2.4.11. weiter nach oben abgeschätzt werden kann. Mit $h_1 = 5\varrho$ erhält man $\forall \varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} \omega^2(u_s, \sqrt{3}\varrho; W^{1,2}(\mathcal{D}^h \setminus d_1^h)) &\leq 3\varrho^{2(\lambda-\varepsilon)} \|u_s; W_{1-\lambda+\varepsilon}^{2,2}(\mathcal{D}_\varrho)\|^2 \\ &\leq Ch_1^{2(\lambda-\varepsilon)} \|\chi; W_\lambda^{2,2}(\mathcal{D})\|^2 \end{aligned}$$

(iv) Mit Hilfe von Lemma 2.5.9., $h_1 = 5\varrho$ und (ii) erhält man $\forall \varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} h_1^2 |u_s^e; W^{2,2}(d_1^h)|^2 &\leq h_1^2 \cdot 9\varrho^{-2} \omega^2(u_s, \sqrt{3}\varrho; W^{1,2}(d_1^h)) \\ &\leq Ch_1^{2(\lambda-\varepsilon)} \|\chi; W_\lambda^{2,2}(\mathcal{D})\|^2 \end{aligned}$$

(v) Mit Hilfe von 3.2.2.(ii) erhält man für $\varepsilon \in (0, \lambda - \mu)$
 $h_2 \leq \text{Chr}_2^{1-\mu} \leq \text{Chr}_1^{1-\mu} \leq \text{Ch}(3r_1/5)^{1-\mu} = \text{Ch}(r_1 - 2\varrho)^{1-\mu} \leq \text{Ch}(r_1 - 2\varrho)^{1-\lambda+\varepsilon}$
 bzw. $h_i \leq \text{Chr}_{i-2}^{1-\mu} \leq \text{Ch}(r_{i-1} - 2\varrho)^{1-\mu} \leq \text{Ch}(r_{i-1} - 2\varrho)^{1-\lambda+\varepsilon}$, $i=3..n$.

Folglich gilt:

$$\sum_{i=2}^n h_i^2 |u_s^\varrho; W^{2,2}(d_i^h)|^2 \leq \text{Ch}^2 \sum_{i=1}^n (r_{i-1} - 2\varrho)^{2(1-\lambda+\varepsilon)} |u_s^\varrho; W^{2,2}(d_i^h)|^2.$$

Nun werden die Eigenschaften der Mittelung ausgenutzt. Mit Hilfe von 2.5.3. und 2.5.4. gilt:

$$\frac{\partial^2 u_s^\varrho}{\partial x_k \partial x_j} = \left(\frac{\partial^2 u_s}{\partial x_k \partial x_j} \right)^\varrho = \frac{1}{8\varrho^3} \int_{\mathbb{Q}_\varrho} \frac{\partial^2 u_s(x+z)}{\partial x_k \partial x_j} dz, \quad j, k=1..3.$$

Da außerdem $r_{i-1} - 2\varrho < r(x+z)$ für $x \in d_i^h$, $z \in \mathbb{Q}_\varrho$, $i=2..n$, folgt:

$$\begin{aligned} (r_{i-1} - 2\varrho)^{2(1-\lambda+\varepsilon)} \int_{d_i^h} \left(\frac{\partial^2 u_s^\varrho}{\partial x_k \partial x_j} \right)^2 dx &= \left(\frac{1}{8\varrho^3} \right)^2 \int_{d_i^h} \left| \int_{\mathbb{Q}_\varrho} (r_{i-1} - 2\varrho)^{2(1-\lambda+\varepsilon)} \frac{\partial^2 u_s(x+z)}{\partial x_k \partial x_j} dz \right|^2 dx \\ &\leq \left(\frac{1}{8\varrho^3} \right)^2 \int_{d_i^h} \left| \int_{\mathbb{Q}_\varrho} r(x+z)^{2(1-\lambda+\varepsilon)} \frac{\partial^2 u_s(x+z)}{\partial x_k \partial x_j} dz \right|^2 dx \end{aligned}$$

Durch Aufsummieren und Anwenden der verallgemeinerten Minkowski-Ungleichung 2.5.6. erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^n h_i^2 |u_s^\varrho; W^{2,2}(d_i^h)|^2 &\leq \text{Ch}^2 \varrho^{-6} \sum_{j,k=1}^3 \int_{\mathcal{D}^h \setminus d_1^h} \left| \int_{\mathbb{Q}_\varrho} r(x+z)^{2(1-\lambda+\varepsilon)} \frac{\partial^2 u_s(x+z)}{\partial x_k \partial x_j} dz \right|^2 dx \\ &\leq \text{Ch}^2 \varrho^{-6} \sum_{j,k=1}^3 \left\{ \int_{\mathbb{Q}_\varrho} \left[\int_{\mathcal{D}^h \setminus d_1^h} \left| r(x+z)^{2(1-\lambda+\varepsilon)} \frac{\partial^2 u_s(x+z)}{\partial x_k \partial x_j} \right|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} dz \right\}^2 \end{aligned}$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer läßt sich mit $\|u_s; W_{1-\lambda+\varepsilon}^{2,2}(\mathcal{D}_+)\|$ grob nach oben abschätzen und aus dem Integral über z ziehen. Anschließend verwendet man noch Satz 2.4.11.:

$$\sum_{i=2}^n h_i^2 |u_s^\varrho; W^{2,2}(d_i^h)|^2 \leq \text{Ch}^2 \|u_s; W_{1-\lambda+\varepsilon}^{2,2}(\mathcal{D}_+)\|^2 \leq \text{Ch}^2 \|\chi; W_\lambda^{2,2}(\mathcal{D})\|^2.$$

Setzt man die Abschätzungen (ii) bis (v) in (i) ein, so erhält man

$$|u_s - \Pi_h u_s^\varrho; W^{1,2}(\mathcal{D})|^2 \leq C(h_1^{2(\lambda-\varepsilon)} + h^2) \|\chi; W_\lambda^{2,2}(\mathcal{D})\|^2$$

und mit $h_1 = ah^{1/\mu}$ für $\varepsilon < \lambda - \mu$ die Behauptung. ■

3.3.3. Lemma. Unter den Voraussetzungen von Lemma 3.3.2. und $\mu \geq \lambda$ gilt $\forall \varepsilon > 0$:

$$|u_s - \Pi_h u_s^\varrho; W^{1,2}(\mathcal{D})| \leq \text{Ch}^{(\lambda-\varepsilon)/\mu} \|\chi; W_\lambda^{2,2}(\mathcal{D})\|.$$

Beweis. Der Beweis läuft völlig analog zum Beweis von 3.3.2. Lediglich in (v) muß man h_i , $i=2..n$, anders abschätzen:

$$h_i = h_i^{(\lambda-\varepsilon)/\mu} h_i^{1-(\lambda-\varepsilon)/\mu} \leq C[h(r_{i-1} - 2\varrho)^{1-\mu}]^{(\lambda-\varepsilon)/\mu} h_i^{1-(\lambda-\varepsilon)/\mu} \quad (\text{vgl. 3.3.2.(v)})$$

Da $h_i \leq C(r_{i-1} - 2\varrho)$, $i=2..n$, folgt wegen $1-(\lambda-\varepsilon)/\mu > 0$

$$h_i \leq \text{Ch}^{(\lambda-\varepsilon)/\mu} (r_{i-1} - 2\varrho)^{(1-\mu)(\lambda-\varepsilon)/\mu + 1 - (\lambda-\varepsilon)/\mu} = \text{Ch}^{(\lambda-\varepsilon)/\mu} (r_{i-1} - 2\varrho)^{1-\lambda+\varepsilon}$$

3.3.4. Lemma. Unter den Voraussetzungen von Lemma 3.3.2. gilt für $\mu < (1+\lambda)/2$:

$$\|u_s - \Pi_h u_s^e; L_2(\mathcal{D})\| \leq Ch^2 \|\chi; W_\lambda^{2,2}(\mathcal{D})\|.$$

Beweis. Analog 3.3.2.(i) zeigt man

$$\begin{aligned} \|u_s - \Pi_h u_s^e; L_2(\mathcal{D})\| &\leq C\varrho^2 \omega^2(u_s, \sqrt{3}\varrho; W^{1,2}(d_1^h)) + \\ &+ C\varrho^2 \omega^2(u_s, \sqrt{3}\varrho; W^{1,2}(\mathcal{D}^h \setminus d_1^h)) + C \sum_{i=1}^n h_i^4 |u_s^e; W^{2,2}(d_i^h)|^2. \end{aligned}$$

3.3.2.(ii) bis (v) gelten auch hier, lediglich bei der Abschätzung von h_i in (v) erhält man:

$$h_i \leq Ch(r_{i-1} - 2\varrho)^{1-\mu} \leq Ch(r_{i-1} - 2\varrho)^{(1-\lambda+\varepsilon)/2},$$

so daß man, indem man den Faktor $\varrho^2 = Ch_1^2$ vor dem Steigkeitsmodul grob mit Ch^2 abschätzt, wie in 3.3.2. die Behauptung erhält. ■

3.3.5. Lemma. Unter den Voraussetzungen von Lemma 3.3.2. und und $\mu \geq (1+\lambda)/2$ gilt $\forall \varepsilon > 0$:

$$\|u_s - \Pi_h u_s^e; L_2(\mathcal{D})\| \leq Ch^{(1+\lambda-\varepsilon)/\mu} \|\chi; W_\lambda^{2,2}(\mathcal{D})\|.$$

Beweis. Der Beweis verläuft analog den vorhergehenden Beweisen. Die Abschätzung für h_i ist hier:

$$h_i \leq Ch^{(1+\lambda-\varepsilon)/2\mu} (r_{i-1} - 2\varrho)^{(1-\lambda+\varepsilon)/2}$$

3.3.6. Satz. Sei $u = u_s + w$ die Funktion mit den Eigenschaften 1.4.8., fortgesetzt auf $\Omega_+ := \bigcup_{\mathcal{F}} \Omega_h \cup \mathcal{D}_+$ entsprechend 2.4.10. (\mathcal{F} ist eine Familie von Triangulationen). Weiterhin seien u_s^e die Steklov-Mittelung von u_s mit $\varrho = h_1/5$ und Π_h der in 3.2.7. eingeführte Interpolationsoperator. Für die Funktion $U_h := \Pi_h u_s^e + \Pi_h w$ gilt:

$$\begin{aligned} |u - U_h; W^{1,2}(\Omega)| &\leq \begin{cases} Ch \|f; L_2(\Omega)\|, & \text{wenn } \mu < \lambda \\ Ch^{(\lambda-\varepsilon)/\mu} \|f; L_2(\Omega)\|, & \text{wenn } \mu \geq \lambda \end{cases} \\ \|u - U_h; L_2(\Omega)\| &\leq \begin{cases} Ch^2 \|f; L_2(\Omega)\|, & \text{wenn } \mu < (1+\lambda)/2 \\ Ch^{(1+\lambda-\varepsilon)/\mu} \|f; L_2(\Omega)\|, & \text{wenn } \mu \geq (1+\lambda)/2 \end{cases} \end{aligned}$$

D.h., bei ausreichender Verfeinerung kann die optimale Approximationsordnung erreicht werden.

Beweis. Als direkte Folgerung aus 3.1.5.(iii), $h_i \leq Ch$ und der beschränkten Fortsetzung von w gilt:

$$\begin{aligned} |w - \Pi_h w; W^{1,2}(\Omega)| &\leq Ch |w; W^{2,2}(\Omega_h)| \leq Ch \|w; W^{2,2}(\Omega)\| \\ \text{und } \|w - \Pi_h w; L_2(\Omega)\| &\leq Ch^2 |w; W^{2,2}(\Omega_h)| \leq Ch^2 \|w; W^{2,2}(\Omega)\|. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung für $u - U_h = (u_s - \Pi_h u_s^e) + (w - \Pi_h w)$, den Lemmata 3.3.2. bis 3.3.5. und der Ungleichung in 1.4.8. folgt die Behauptung. ■

3.4. Globale Interpolationsfehlerabschätzung

- wesentliche Randbedingungen -

3.4.1. Vorbemerkungen. (i) Zunächst sei festgestellt, daß die Lösung u des Randwertproblems 1.4.4. aus $W^{1+\lambda-\varepsilon,2}(\Omega)$ und somit infolge $\lambda > \frac{1}{2}$ stetig ist. (Entsprechend 2.1.3.(iv) ist $V_{1-\lambda+\varepsilon}^{2,2}(\Omega) \subset W_{1-\lambda+\varepsilon}^{2,2}(\Omega) \subset W_0^{1+\lambda-\varepsilon,2}(\Omega) = W^{1+\lambda-\varepsilon,2}(\Omega)$.) Es ist also möglich, die Interpolante zu bilden.

(ii) Die besonderen Schwierigkeiten bei der Untersuchung des Interpolationsfehlers $u - \Pi_h u$ resultieren aus der Unmöglichkeit einer exakten Vernetzung von Ω . Zum einen muß man sich mit einem Randstreifen $\Omega \setminus \Omega^h$ auseinandersetzen, zum anderen ist entsprechend der Definition von $\Pi_h u$ in 3.2.7. $\Pi_h u \neq u$ in Randknoten, die nicht auf $\partial\Omega$ liegen (vgl. 3.2.7.(iii)).

(iii) Zum Beweis der Interpolationsfehlerabschätzung wird ein anderer Weg als in 3.3. gegangen. Die Idee geht auf Fritsch [1989] zurück. Dort wurde jedoch von exakter Vernetzbarkeit ausgegangen.

Es werden zunächst drei Lemmata bewiesen, aus denen unmittelbar Satz 3.4.5. folgt. Eine Diskussion des Resultats erfolgt dann in 3.6.

3.4.2. Lemma. Seien Π_h der in 3.2.7. eingeführte Interpolationsoperator und $d_1^+ = d_1 \cup d_1^h$. Die Funktion u besitze die in 1.4.2. beschriebenen Eigenschaften. Dann gilt:

$$\|u - \Pi_h u; L_2(d_1^+)\| \leq Ch_1^{1+\lambda-\varepsilon} \|f; L_2(\Omega)\|$$

$$\text{und} \quad |u - \Pi_h u; W^{1,2}(d_1^+)| \leq Ch_1^{\lambda-\varepsilon} \|f; L_2(\Omega)\|.$$

Beweis. (i) Da $r \leq Ch_1$ in d_1^+ gilt, folgt für $\tau \leq k$:

$$\|u; L_2(d_1^+)\|^2 \leq Ch_1^{2(k-\tau)} \int_{d_1^+} r^{2(\tau-k)} u^2 dx \leq Ch_1^{2(k-\tau)} \|u; V_\tau^{k,2}(d_1^+)\|^2 \quad \text{und}$$

$$|u; W^{1,2}(d_1^+)|^2 \leq Ch_1^{2(k-1-\tau)} \int_{d_1^+} r^{2(\tau-k+1)} \sum_{|\alpha|=1} (D^\alpha u)^2 dx \leq Ch_1^{2(k-1-\tau)} \|u; V_\tau^{k,2}(d_1^+)\|^2.$$

(ii) Es gilt $\|\Pi_h u; L_2(d_1^+)\| = \left(\sum_{\Delta \subset d_1^h} \|\Pi_h u; L_2(\Delta)\|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{\Delta \subset d_1^h} \text{mes} \Delta \left(\max_{x \in \Delta} \Pi_h u \right)^2 \right)^{1/2}$.

Das Maximum über einem Tetraeder Δ nimmt $\Pi_h u$ in einem der vier Knoten an, dieser werde mit K_Δ bezeichnet. Es ist zu bemerken, daß K_Δ ein innerer Knoten ist, da in allen Randknoten $\Pi_h u = 0$ ist. (Falls ein Tetraeder nur Randknoten besitzt, so ist dort $\Pi_h u = 0$, und es braucht nicht in die Summation einbezogen werden.) Es gilt also $R_\Delta := \text{dist}(K_\Delta, M) > 0$. Bezeichne nun B_Δ die Kugel um K_Δ mit dem Radius $\frac{1}{2}R_\Delta$, dann folgt aus der eingangs aufgestellten Ungleichung mit Hilfe von Lemma 2.1.4.(iii):

$$\|\Pi_h u; L_2(d_1^+)\| \leq Ch_1^{3/2} \left(\sum_{\Delta \subset d_1^h} R_\Delta^{2(k-\tau)-3} \|u; V_\tau^{k,2}(B_\Delta)\|^2 \right)^{1/2}.$$

Die Feststellungen, daß R_Δ in der Größenordnung h_1 liegt und daß sich nur eine beschränkte, von h unabhängige Anzahl der Kugeln B_Δ überschneiden können, erlauben die Schlußfolgerung:

$$\|\Pi_h u; L_2(d_1^+)\| \leq Ch_1^{k-\tau} \|u; V_\tau^{k,2}(\Omega)\|.$$

(iii) Mit Hilfe der inversen Ungleichung 3.2.8. folgt aus (ii):

$$\|\Pi_h u; W^{1,2}(d_1^+)\| \leq Ch_1^{k-1-\tau} \|u; V_\tau^{k,2}(\Omega)\|.$$

(iv) Mit Hilfe der Dreiecksungleichung und der Ungleichung in 1.4.2. folgt aus (i) und (ii) bzw. (i) und (iii) die Behauptung. ■

3.4.3. Lemma. Seien Π_h der in 3.2.7. eingeführte Interpolationsoperator, $d_i^+ = d_i \cup d_i^+$, $i=1..n$, und $\Omega_- := \Omega \setminus d_1^+$. Dann gilt mit den Bezeichnungen aus 1.4.2. und 3.2.2.:

$$\|u - \Pi_h u; L_2(\Omega_-)\| \leq \begin{cases} Ch^2 \|f; L_2(\Omega)\|, & \text{wenn } \mu < (1+\lambda)/2 \\ Ch^{(1+\lambda-\varepsilon)/\mu} \|f; L_2(\Omega)\|, & \text{wenn } \mu \geq (1+\lambda)/2 \end{cases}$$

Beweis. (i) Sei $\Omega_-^h := \Omega^h \setminus d_1^+ = \Omega^h \setminus d_1^h$. Dann gilt offenbar:

$$\begin{aligned} \|u - \Pi_h u; L_2(\Omega_-)\|^2 &= \|u - \Pi_h u; L_2(\Omega_-^h)\|^2 + \|u; L_2(\Omega_- \setminus \Omega_-^h)\|^2 \\ &\leq 2\|u - \Pi_h' u; L_2(\Omega_-^h)\|^2 + 2\|\Pi_h' u - \Pi_h u; L_2(\Omega_-^h)\|^2 + \|u; L_2(\Omega_- \setminus \Omega_-^h)\|^2. \end{aligned}$$

(Π_h' wurde in 3.2.7.(iii) eingeführt.) Diese Summanden sollen nun abgeschätzt werden.

(ii) Da $u \in W^{2,2}(\Omega_-^h)$, gilt mit 3.1.5.(iii):

$$\|u - \Pi_h' u; L_2(\Omega_-^h)\|^2 \leq C \sum_{i=2}^n h_i^4 |u; W^{2,2}(d_i^h)|^2 + Ch^4 |u; W^{2,2}(\Omega^h \setminus \mathcal{D}^h)|^2.$$

(iii) Mit Hilfe der Abschätzungen 2.6.2. in Randstreifen folgt:

$$\begin{aligned} \|u; L_2(\Omega_- \setminus \Omega_-^h)\|^2 &= \sum_{i=2}^n \|u; L_2(d_i \setminus \Omega^h)\|^2 + \|u; L_2(\Omega \setminus \Omega^h \setminus \mathcal{D})\|^2 \\ &\leq C \sum_{i=2}^n h_i^4 \|u; W^{2,2}(d_i)\|^2 + Ch^4 \|u; W^{2,2}(\Omega \setminus \mathcal{D})\|^2 \end{aligned}$$

(iv) $\Pi_h' u - \Pi_h u$ ist eine Funktion, die in allen Tetraedern linear ist, in den Randknoten mit u übereinstimmt und in den inneren Knoten Null ist. Im folgenden sollen nur solche Tetraeder Δ betrachtet werden, in denen $\Pi_h' u - \Pi_h u$ nicht verschwindet, d.h., Δ besitzt mindestens einen Randknoten. Es gilt folglich:

$$\|\Pi_h' u - \Pi_h u; L_2(\Delta)\|^2 \leq \text{mes} \Delta \|u; C(\Delta)\|^2.$$

Nun wird Δ auf das Referenztetraeder $\hat{\Delta}$ transformiert, die Einbettung $W^{2,2}(\hat{\Delta}) \hookrightarrow C(\hat{\Delta})$ verwendet und rücktransformiert. Man erhält (vgl. 3.1.3.)

$$\text{mes}\Delta \|u; C(\Delta)\|^2 \leq C(\hat{\Delta}) \sum_{l=0}^2 h_i^{2l} |u; W^{l,2}(\Delta)|^2, \text{ falls } \Delta \subset d_i^h, i=2..n,$$

$$\text{bzw. } \text{mes}\Delta \|u; C(\Delta)\|^2 \leq C(\hat{\Delta}) \sum_{l=0}^2 h^{2l} |u; W^{l,2}(\Delta)|^2, \text{ falls } \Delta \subset \Omega^h \setminus \mathcal{D}^h.$$

Diese Abschätzungen werden nun aufsummiert. Dabei wird ausgenutzt, daß alle betreffenden Tetraeder in Randstreifen liegen, für die die Abschätzungen 2.6.2. gelten. Man erhält:

$$\|\Pi'_h u - \Pi_h u; L_2(\Omega^h)\|^2 \leq C \sum_{i=2}^n h_i^4 \|u; W^{2,2}(d_i)\|^2 + Ch^4 \|u; W^{2,2}(\Omega \setminus \mathcal{D})\|^2 \quad (*)$$

(Exakter: Sei d_i die Vereinigung aller d_j , die einen nicht-leeren Durchschnitt mit d_i^h besitzen, so daß $d_i^h \subset d_i$, $i=2..n$. Gegebenenfalls wird auch $\Omega \setminus \mathcal{D}$ in die Vereinigung einbezogen. (I.allg. wird sein: $d_i = d_i \cup d_{i+1}$, $i=2..n-1$, $d_n = d_n \cup (\Omega \setminus \mathcal{D})$.) Es wird nun in d_i ein Randstreifen S_i (Definition vgl. 2.6.2.) mit einer Breite in der Größenordnung h_i , $i=2..n$, betrachtet. Offenbar liegen alle Tetraeder $\Delta \subset d_i^h$, in denen $\Pi'_h u \setminus \Pi_h u$ nicht verschwindet, in diesem Randstreifen. Für S_i gilt jedoch entsprechend 2.6.2.:

$$\|u; L_2(S_i)\| \leq Ch_i^2 \|u; W^{2,2}(d_i)\| \quad \text{und} \quad |u; W^{1,2}(S_i)| \leq Ch_i \|u; W^{2,2}(d_i)\|.$$

Mit Hilfe analoger Betrachtungen für die Tetraeder aus $\Omega^h \setminus \mathcal{D}^h$, die in einem Randstreifen von $\Omega \setminus \mathcal{D}$ der Breite Ch liegen, und durch geeignetes Aufsummieren aller in diesem Abschnitt erhaltenen Abschätzungen folgt:

$$\|\Pi'_h u - \Pi_h u; L_2(\Omega^h)\|^2 \leq C \sum_{i=2}^n h_i^4 \|u; W^{2,2}(d_i)\|^2 + Ch^4 \|u; W^{2,2}(\Omega \setminus \mathcal{D})\|^2.$$

Die Bemerkung, daß sich nur eine von der Art der Vernetzung, jedoch nicht von der Schrittweite abhängige, endliche Anzahl der Bereiche d_i überschneiden, liefert die Ungleichung (*).

(v) Um zur gewünschten gewichteten Norm zu gelangen, formt man h_i wie folgt mit Hilfe von 3.2.2.(ii) um.

Falls $\mu < \frac{1}{2}(1+\lambda)$, dann gilt für $\varepsilon \in (0, 1+\lambda-2\mu)$ und $i=2..n$:

$$h_i^4 \leq Ch^4 (r_{i-1})^{1-\mu} \leq Ch^4 r_{i-1}^{2(1-\lambda+\varepsilon)} \leq Ch^4 r^{2(1-\lambda+\varepsilon)} \quad \text{in } d_i \text{ bzw. } d_i^h.$$

Falls hingegen $\mu \geq \frac{1}{2}(1+\lambda)$ (folglich $4-2(1+\lambda-\varepsilon)/\mu \geq 0$), schätzt man wie folgt ab ($i=2..n$, $\varepsilon \in (0, 1-\lambda)$):

$$\begin{aligned} h_i^4 &= h_i^{2(1+\lambda-\varepsilon)/\mu} h_i^{4-2(1+\lambda-\varepsilon)/\mu} \leq Ch^{2(1+\lambda-\varepsilon)/\mu} (r_{i-1})^{1-\mu} r_{i-1}^{4-2(1+\lambda-\varepsilon)/\mu} \\ &= Ch^{2(1+\lambda-\varepsilon)/\mu} r_{i-1}^{2(1+\lambda-\varepsilon)} \leq Ch^{2(1+\lambda-\varepsilon)/\mu} r^{2(1+\lambda-\varepsilon)} \quad \text{in } d_i \text{ bzw. } d_i^h. \end{aligned}$$

(vi) Setzt man nun die in (ii), (iii) und (iv) erhaltenen Abschätzungen in (i) ein und verwendet (v) zur Abschätzung der h_i , so erhält man:

$$\|u - \Pi_{\tilde{h}} u; L_2(\Omega_-)\|^2 \leq Ch^4 \|u; W_{1-\lambda+\varepsilon}^{2,2}(\Omega)\|^2 + Ch^4 \|u; W^{2,2}(\Omega \setminus \mathcal{D})\|^2 \quad (\mu < \frac{1}{2}(1+\lambda)) \text{ bzw.}$$

$$\|u - \Pi_{\tilde{h}} u; L_2(\Omega_-)\|^2 \leq Ch^{2(1+\lambda-\varepsilon)/\mu} \|u; W_{1-\lambda+\varepsilon}^{2,2}(\Omega)\|^2 + Ch^4 \|u; W^{2,2}(\Omega \setminus \mathcal{D})\|^2 \quad (\mu \geq \frac{1}{2}(1+\lambda)).$$

Die Einbettung $V_{1-\lambda+\varepsilon}^{2,2}(\Omega) \hookrightarrow W_{1-\lambda+\varepsilon}^{2,2}(\Omega)$ sowie die Feststellung, daß die Normen in $W^{2,2}(\Omega \setminus \mathcal{D})$ und $V_{1-\lambda+\varepsilon}^{2,2}(\Omega \setminus \mathcal{D})$ äquivalent sind, führen zu den folgenden Abschätzungen:

$$\|u - \Pi_{\tilde{h}} u; L_2(\Omega_-)\| \leq Ch^2 \|u; V_{1-\lambda+\varepsilon}^{2,2}(\Omega)\| \quad (\mu < \frac{1}{2}(1+\lambda)) \text{ bzw.}$$

$$\|u - \Pi_{\tilde{h}} u; L_2(\Omega_-)\| \leq Ch^{(1+\lambda-\varepsilon)/\mu} \|u; V_{1-\lambda+\varepsilon}^{2,2}(\Omega)\| \quad (\mu \geq \frac{1}{2}(1+\lambda)).$$

Die Ungleichung aus 1.4.2. vervollständigt den Beweis. ■

3.4.4. Lemma. Unter den Voraussetzungen von Lemma 3.4.3. gilt:

$$|u - \Pi_{\tilde{h}} u; W^{1,2}(\Omega_-)| \leq \begin{cases} Ch \|f; L_2(\Omega)\|, & \text{wenn } \mu < \lambda \\ Ch^{(\lambda-\varepsilon)/\mu} \|f; L_2(\Omega)\|. & \text{wenn } \mu \geq \lambda \end{cases}$$

Beweis. Analog 3.4.2.(i), (ii) und (iii) zeigt man:

$$|u - \Pi_{\tilde{h}} u; W^{1,2}(\Omega_-)|^2 \leq 2 |u - \Pi_{\tilde{h}}' u; W^{1,2}(\Omega_-^h)|^2 + 2 |\Pi_{\tilde{h}}' u - \Pi_{\tilde{h}} u; W^{1,2}(\Omega_-^h)|^2 + |u; W^{1,2}(\Omega_- \setminus \Omega_-^h)|^2$$

$$|u - \Pi_{\tilde{h}}' u; W^{1,2}(\Omega_-^h)|^2 \leq C \sum_{i=2}^n h_i^2 |u; W^{2,2}(d_i^h)|^2 + Ch^2 |u; W^{2,2}(\Omega_-^h \setminus \mathcal{D}^h)|^2$$

$$|u; W^{1,2}(\Omega_- \setminus \Omega_-^h)|^2 \leq C \sum_{i=2}^n h_i^2 \|u; W^{2,2}(d_i)\|^2 + Ch^2 \|u; W^{2,2}(\Omega \setminus \mathcal{D})\|^2$$

Analog 3.4.3.(iv), jedoch unter zusätzlicher Verwendung der inversen Ungleichung 3.2.8. zeigt man:

$$|\Pi_{\tilde{h}}' u - \Pi_{\tilde{h}} u; W^{1,2}(\Omega_-^h)|^2 \leq C \sum_{i=2}^n h_i^2 \|u; W^{2,2}(d_i)\|^2 + Ch^2 \|u; W^{2,2}(\Omega \setminus \mathcal{D})\|^2.$$

Mit den gleichen Gedanken wie in 3.4.3.(v) schätzt man h_i^2 in d_i bzw. d_i^h ab, $i=2..n$:

$$\text{Falls } \mu < \lambda, \varepsilon \in (0, \lambda - \mu), \text{ gilt } h_i \leq Ch r^{1-\lambda+\varepsilon}.$$

$$\text{Falls } \mu \geq \lambda, \varepsilon \in (0, 1 - \lambda), \text{ gilt } h_i \leq Ch^{(\lambda-\varepsilon)/\mu} r^{1-\lambda+\varepsilon}.$$

Mit diesen Abschätzungen erhält man analog 3.4.3.(vi) die Behauptung. ■

3.4.5. Satz. Seien u die Funktion mit den Eigenschaften 1.4.2. und $\Pi_{\tilde{h}}$ der in 3.2.7. eingeführte Interpolationsoperator. Dann gilt:

$$\|u - \Pi_{\tilde{h}} u; L_2(\Omega)\| \leq \begin{cases} Ch^2 \|f; L_2(\Omega)\|, & \text{wenn } \mu < (1+\lambda)/2 \\ Ch^{(1+\lambda-\varepsilon)/\mu} \|f; L_2(\Omega)\|, & \text{wenn } \mu \geq (1+\lambda)/2 \end{cases}$$

$$|u - \Pi_{\tilde{h}} u; W^{1,2}(\Omega)| \leq \begin{cases} Ch \|f; L_2(\Omega)\|, & \text{wenn } \mu < \lambda \\ Ch^{(\lambda-\varepsilon)/\mu} \|f; L_2(\Omega)\|, & \text{wenn } \mu \geq \lambda \end{cases}$$

Der Satz ist eine Folgerung aus den Lemmata 3.4.2. und 3.4.3. bzw. 3.4.2. und 3.4.4. unter Verwendung der Beziehung $h_1 = Ch^{1/\mu}$.

3.5. Polyedergebiete

3.5.1. Vorbemerkungen. (i) Ein Polyeder besitzt neben Kanten auch Ecken. Ziel dieses Abschnitts ist es, zu zeigen, daß die vorgeschlagenen Netzverfeinerungsstrategien auch hier anwendbar sind und eine entsprechende Abschätzung des Interpolationsfehlers erlauben.

Betrachtet werden dabei die Randwertaufgaben 1.4.11. und 1.4.12. Nach der Einführung der verwendeten Bezeichnungen und einer Bemerkung zum Funktionenraum $V_{\alpha, \beta}^{k,p}(\Omega)$ wird in 3.5.4. die Vernetzung beschrieben und in den Sätzen 3.5.6. und 3.5.7. der Interpolationsfehler abgeschätzt.

(ii) Ungeachtet dessen, daß durch die Polyederecken im Vergleich zu den Kantenproblemen eine neue Qualität in die Aufgabe hineingetragen wird, kann die Fehlerabschätzung analog zu 3.4. bewiesen werden. Sie vereinfacht sich sogar in der Hinsicht, daß die Randfehlerabschätzung entfällt, weil Polyeder exakt mit Tetraedern vernetzbar sind.

(iii) Als Schwierigkeit für konkrete Probleme kann sich die Bestimmung der optimalen Gewichte für die Sobolevräume erweisen, in denen die Lösung liegt. Dies soll hier jedoch nicht behandelt werden, vgl. dazu z.B. [Мазья/Пламеневский 1983a,b], [von Petersdorff/Stephan 1988], [Stephan/Whiteman 1988] und die dort zitierte Literatur.

3.5.2. Bezeichnungen. (i) Wie bei der Definition des Raumes $V_{\alpha, \beta}^{k,p}(\Omega)$ in 2.1.2.(iii) bezeichne \mathcal{E} die Menge der Eckpunkte (corners), \mathcal{E} die Menge der Kanten (edges) und M die Vereinigungsmenge aller Ecken und Kanten. Weiterhin seien $r_e = \text{dist}(x, e)$, $e \in \mathcal{E}$, $q_q = \text{dist}(x, q)$, $q \in \mathcal{E}$ und $r = \text{dist}(x, M)$.

(ii) Weiterhin wird in diesem Kapitel eine endliche Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von Ω mit offenen Mengen betrachtet, die folgende Eigenschaften hat:

- (a) Zu jeder Menge gehört höchstens ein Eckpunkt.
- (b) Durch Mengen, die keinen Eckpunkt enthalten geht höchstens eine Kante.

Dieser Überdeckung wird eine Zerlegung der Eins zugeordnet: $1 = \sum_{i \in I} \chi_i(x)$, wobei $\chi_i(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$ und $\text{supp} \chi_i \subset U_i$.

3.5.3. Bemerkung zum Funktionenraum. Die folgende Definition des Raumes $V_{\alpha, \beta}^{k,p}(\Omega)$ ist auch der Arbeit von Мазья und Пламеневский [1983a] entnommen und äquivalent zu der in 2.1.2.(iii) angegebenen Definition.

Jedem Eckpunkt $q \in \mathcal{E}$ wird eine reelle Zahl a_q und jeder Kante $e \in \mathcal{E}$ eine Zahl b_e zugeordnet. $V_{\alpha, \mathcal{E}}^{k,p}(\Omega)$ wird nun mit Hilfe der Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ und der untergeordneten Zerlegung der Eins wie folgt definiert:

(i) Gilt für ein gewisses $i \in I$ die Beziehung $\overline{U_i} \cap M = \emptyset$, dann ist die Norm im Raum $V_{\alpha, \mathcal{E}}^{k,p}(\Omega)$ für Funktionen mit einem in U_i enthaltenen Träger äquivalent zur Norm in $W^{k,p}(\Omega)$.

(ii) Im Falle, daß $U_i \cap e \neq \emptyset$ für ein $e \in \mathcal{E}$ und $\overline{U_i} \cap \mathcal{E} = \emptyset$ erfüllt ist, ist die Norm in $V_{\alpha, \mathcal{E}}^{k,p}(\Omega)$ für Funktionen v mit $\text{supp } v \subset U_i$ zur Norm $\|r_e^{b_e} v; V_0^{k,p}(\Omega)\|$ äquivalent.

(iii) Wenn jedoch $q \in U_i$ für $q \in \mathcal{E}$ und $\text{supp } v \subset U_i$, dann ist $\|v; V_{\alpha, \mathcal{E}}^{k,p}(\Omega)\|$ äquivalent zu $\|\varrho_q^{a_q} \prod_{\{e: q \in \mathcal{E}\}} r_e^{b_e} v; V_0^{k,p}(\Omega)\|$.

3.5.4. Vernetzung. (i) **Beschreibung.** In diesem Abschnitt soll eine Vernetzung im Sinne der allgemeinen Voraussetzungen 3.2.1.(i),(ii) beschrieben werden. Im Gegensatz zu 3.2. wird jedoch mehr als ein Netzverfeinerungsparameter betrachtet: Jeder Kante $e \in \mathcal{E}$ wird ein Parameter $\mu_e \in (0,1]$ und jedem Eckpunkt $q \in \mathcal{E}$ eine Zahl $\nu_q \in (0,1]$ zugeordnet. Das Polyeder wird nun mit Hilfe von Tetraedern derart vernetzt, daß für den Durchmesser h_Δ eines Tetraeders Δ gilt:

$$\begin{aligned} \forall e \in \mathcal{E}: h_\Delta \sim h[\text{dist}(\Delta, e)]^{1-\mu_e}, & \quad \text{falls } \text{dist}(\Delta, e) > 0 \\ h_\Delta \sim h^{1/\mu_e}, & \quad \text{falls } \text{dist}(\Delta, e) = 0 \\ \forall q \in \mathcal{E}: h_\Delta \sim h[\text{dist}(\Delta, q)]^{1-\nu_q}, & \quad \text{falls } \text{dist}(\Delta, q) > 0 \\ h_\Delta \sim h^{1/\nu_q}, & \quad \text{falls } \text{dist}(\Delta, q) = 0 \end{aligned}$$

Dabei ist h die die Elementgröße global charakterisierende Vernetzungsparameter (vgl. 3.2.2.(i),(ii) und 3.2.3.(i)).

(ii) **Bemerkung.** Wie in 3.2.5. kann man zeigen, daß die Anzahl der zur Vernetzung benötigten Tetraederelemente in der Größenordnung h^{-3} liegt, wenn nur $\mu_e > \frac{1}{3} \forall e \in \mathcal{E}$. (Analog zum Beweis in 3.2.5. rechnet man nach, daß die Größe von ν_q , $q \in \mathcal{E}$, keinen Einfluß hat.)

3.5.5. Interpolation. (i) Der Raum V_{0h} wird analog zu 3.2.6.(ii) bezüglich der in 3.5.4. beschriebenen Vernetzung definiert. Weiterhin wird der Interpolationsoperator Π_h wie in 3.2.7.(i) definiert.

(ii) **Bemerkung.** Die Stetigkeit von u wurde in 1.4.11. postuliert; man könnte jedoch untersuchen, inwiefern es notwendig ist. Z.B. zeigen von Petersdorff und Stephan [1988] für den Laplace-Operator, daß stets $u \in W^{s,2}(\Omega)$, $s > \frac{3}{2}$, gilt, falls das Polyedergebiet Ω keine Risse besitzt. In diesem Fall kann man die Stetigkeit aus einem Einbettungssatz folgern.

3.5.6. Satz. Seien u die Lösung des Problems 1.4.11. und Π_h der in 3.5.5. definierte Interpolationsoperator. Dann gilt:

$$\|u - \Pi_h u; L_2(\Omega)\| \leq Ch^2 \|f; L_2(\Omega)\|,$$

wenn die Parameter μ_e , $e \in \mathcal{E}$, und ν_q , $q \in \mathcal{C}$, so gewählt sind, daß

$$\frac{b_e}{1-\mu_e} \leq 2 \quad \forall e \in \mathcal{E} \quad \text{und} \quad \frac{a_q}{1-\nu_q} + \sum_{\{e: q \in \bar{e}\}} \frac{b_e}{1-\mu_e} \leq 2 \quad \forall q \in \mathcal{C}, \quad \text{und}$$

$$\|u - \Pi_h u; L_2(\Omega)\| \leq Ch^\tau \|f; L_2(\Omega)\|, \quad \tau = \min_{e \in \mathcal{E}, q \in \mathcal{C}} \{2 - b_e, 2 - a_q - \sum_{\{e: q \in \bar{e}\}} b_e\},$$

wenn das Netz nicht verfeinert ist.

Beweis. (i) Mit Hilfe der in 3.5.2.(ii) eingeführten Überdeckung und der Zerlegung der Eins kann das Problem in Teilprobleme zerlegt werden, die separat untersucht werden können: Es gilt mit $u_i := \chi_i u$

$$u - \Pi_h u = \sum_{i \in I} u_i - \Pi_h \left(\sum_{i \in I} u_i \right) = \sum_{i \in I} (u_i - \Pi_h u_i).$$

(ii) Sei U_i eine Überdeckungsmenge, für die $\overline{U_i} \cap M = \emptyset$ gilt. Da folglich $u_i \in W^{2,2}(\Omega)$ erfüllt ist, erhält man mit Hilfe der Folgerung 3.1.5.(iii)

$$\|u_i - \Pi_h u_i; L_2(\Omega)\| \leq Ch^2 \|u_i; W^{2,2}(U_i)\|,$$

denn $h_\Delta \leq Ch$. Unter Ausnutzung von 3.5.3.(i) und der Ungleichung in 1.4.11. folgt daraus:

$$\|u_i - \Pi_h u_i; L_2(\Omega)\| \leq Ch^2 \|f; L_2(\Omega)\|.$$

(iii) Sei nun U_i eine Überdeckungsmenge, die einen nichtleeren Durchschnitt mit einer Kante $e \in \mathcal{E}$ besitzt, aber keine Ecke enthält: $U_i \cap e \neq \emptyset$, $\overline{U_i} \cap \mathcal{E} = \emptyset$. Sei weiter U_i^M die Vereinigung aller Tetraeder Δ mit $\text{dist}(\Delta, e) = 0$. Dann kann man analog zu 3.4.2. zeigen:

$$\|u_i - \Pi_h u_i; L_2(U_i^M)\| \leq C(h^{1/\mu_e})^{2-b_e} \|r^{b_e} u_i; V_0^{2,2}(\Omega)\|.$$

Für die Tetraeder Δ mit $r_\Delta := \text{dist}(\Delta, e) > 0$ gilt $u_i \in W^{2,2}(\Delta)$ und folglich analog zu 3.4.3.:

$$\begin{aligned} \|u_i - \Pi_h u_i; L_2(\Delta)\| &\leq Ch_\Delta^2 |u_i; W^{2,2}(\Delta)| \leq Ch^2 r_\Delta^{2(1-\mu_e)} |u_i; W^{2,2}(\Delta)| \\ &\leq Ch^2 \|r^{b_e} u_i; V_0^{2,2}(\Delta)\|, \quad \text{falls } b_e \leq 2(1-\mu_e) \text{ bzw.} \end{aligned}$$

$$\|u_i - \Pi_h u_i; L_2(\Delta)\| \leq Ch^{2-b_e} \|r^{b_e} u_i; V_0^{2,2}(\Delta)\| \quad \text{im unverfeinerten Netz.}$$

Durch Summation der erhaltenen Ungleichungen folgt unter Ausnutzung von 3.5.3.(ii) und der Ungleichung in 1.4.11.:

$$\|u_i - \Pi_h u_i; L_2(\Omega)\| \leq \begin{cases} Ch^2 \|f; L_2(\Omega)\|, & \text{falls } \mu_e \leq 1 - \frac{1}{2} b_e \\ Ch^{2-b_e} \|f; L_2(\Omega)\| & \text{falls } \mu_e = 1. \end{cases}$$

(iv) Sei schließlich U_i eine Überdeckungsmenge, die einen Eckpunkt $q \in \mathcal{C}$ enthält. Wiederum bezeichne U_i^M die Vereinigung aller Tetraeder Δ mit $\text{dist}(\Delta, M) = 0$. Analog zu 3.4.2. kann man zeigen:

$$\begin{aligned} \|u_i - \Pi_{\lambda} u_i; L_2(U_i^M)\| &\leq C(h^{1/\nu_q})^{2-t_q} \|r^{t_q} u_i; V_0^{2,2}(\Omega)\| \\ &\leq C(h^{1/\nu_q})^{2-t_q} \|\varrho_q^{\alpha_q} \prod_{\{e: q \in \bar{e}\}} r_e^{b_e} u_i; V_0^{2,2}(\Omega)\|, \end{aligned}$$

wobei $t_q := a_q + \sum_{\{e: q \in \bar{e}\}} b_e$. Für die Tetraeder Δ mit $\text{dist}(\Delta, M) > 0$

gilt im Fall $\tau_q := \frac{a_q}{1-\nu_q} + \sum_{\{e: q \in \bar{e}\}} \frac{b_e}{1-\mu_e} \leq 2$ analog zu (iii):

$$\begin{aligned} h_{\Delta}^2 &= h_{\Delta}^{2-\tau_q} h_{\Delta}^{\alpha_q/(1-\nu_q)} \prod_{\{e: q \in \bar{e}\}} h_{\Delta}^{b_e/(1-\mu_e)} \\ &\leq h^{2-\tau_q} (h \varrho_q^{1-\nu_q})^{\alpha_q/(1-\nu_q)} \prod_{\{e: q \in \bar{e}\}} (hr_e^{1-\mu_e})^{b_e/(1-\mu_e)} = h^2 \varrho_q^{\alpha_q} \prod_{\{e: q \in \bar{e}\}} r_e^{b_e}. \end{aligned}$$

Folglich erhält man unter Ausnutzung von $u_i \in W^{2,2}(\Delta)$:

$$\|u_i - \Pi_{\lambda} u_i; L_2(\Delta)\| \leq Ch_{\Delta}^2 |u_i; W^{2,2}(\Delta)| \leq Ch^2 \|\varrho_q^{\alpha_q} \prod_{\{e: q \in \bar{e}\}} r_e^{b_e} u_i; V_0^{2,2}(\Delta)\|.$$

Im unverfeinerten Netz zeigt man analog

$$\|u_i - \Pi_{\lambda} u_i; L_2(\Delta)\| \leq Ch^2 |u_i; W^{2,2}(\Delta)| \leq Ch^{2-t_q} \|\varrho_q^{\alpha_q} \prod_{\{e: q \in \bar{e}\}} r_e^{b_e} u_i; V_0^{2,2}(\Delta)\|,$$

$t_q := a_q + \sum_{\{e: q \in \bar{e}\}} b_e$. Durch Summation der erhaltenen Ungleichungen folgt unter Ausnutzung von 3.5.3.(iii) und der Ungleichung in 1.4.11.

$$\|u_i - \Pi_{\lambda} u_i; L_2(\Omega)\| \leq \begin{cases} Ch^2 \|f; L_2(\Omega)\|, & \text{falls } \frac{a_q}{1-\nu_q} + \sum_{\{e: q \in \bar{e}\}} \frac{b_e}{1-\mu_e} \leq 2 \\ Ch^{2-t_q} \|f; L_2(\Omega)\| & \text{falls } \nu_q = b_e = 1 \quad \forall e: q \in \bar{e} \end{cases}.$$

(v) Aus (i) bis (iv) erhält man die Behauptung. ■

3.5.7. Satz. Seien u die Lösung des Problems 1.4.11. und Π_{λ} der in 3.5.5. definierte Interpolationsoperator. Dann gilt:

$$|u - \Pi_{\lambda} u; W^{1,2}(\Omega)| \leq Ch \|f; L_2(\Omega)\|,$$

wenn die Parameter μ_e , $e \in \mathcal{E}$, und ν_q , $q \in \mathcal{E}$, so gewählt sind, daß

$$\frac{b_e}{1-\mu_e} \leq 1 \quad \forall e \in \mathcal{E} \quad \text{und} \quad \frac{a_q}{1-\nu_q} + \sum_{\{e: q \in \bar{e}\}} \frac{b_e}{1-\mu_e} \leq 1 \quad \forall q \in \mathcal{E} \quad \text{und}$$

$$|u - \Pi_{\lambda} u; W^{1,2}(\Omega)| \leq Ch^{\tau} \|f; L_2(\Omega)\|, \quad \tau = \min_{e \in \mathcal{E}, q \in \mathcal{E}} \{1 - b_e, 1 - a_q - \sum_{\{e: q \in \bar{e}\}} b_e\},$$

wenn das Netz nicht verfeinert ist.

Der Satz wird völlig analog zu Satz 3.5.6. bewiesen.

3.5.8. Bemerkungen. (i) Ziel der analytischen Untersuchung der Lösungseigenschaften wird es sein, die Gewichte a und β zu minimieren, um möglichst hohe Konvergenzordnungen begründen zu können.

(ii) I.allg. wird das Polyeder auch Kanten bzw. Ecken besitzen, in deren Umgebung die Lösung regulär ist. In diesem Fall verwende man $b_e = 0$ bzw. $a_q + \sum_{\{e: q \in \bar{e}\}} b_e = 0$. (Es wäre aber auch möglich, die betreffenden U_i im Beweis gesondert zu betrachten.)

3.6. Bemerkungen und Ergänzungen

3.6.1. In den Kapiteln 3.2. bis 3.5. wurden für drei Aufgabenstellungen (vgl. 1.4.) verfeinerte Netze vorgeschlagen und die Konvergenzordnung des Interpolationsfehlers abgeschätzt. (Die approximierende Funktion in 3.3. werde hier auch als Interpolante bezeichnet, da sie ebenfalls mit Hilfe des Interpolationsoperators definiert wurde.) Das Hauptergebnis ist, daß bei geeigneter Netzverfeinerung trotz Lösungssingularität Funktionen v_h aus dem Raum V_h bzw. V_{0h} angegeben werden können, für die gilt

$$\begin{aligned} \|u-v_h; W^{1,2}(\Omega)\| &\leq Ch \|f; L_2(\Omega)\|, \\ \|u-v_h; L_2(\Omega)\| &\leq Ch^2 \|f; L_2(\Omega)\|. \end{aligned}$$

Die Klasse der Aufgaben, für die diese Abschätzungen gelten, kann erweitert werden. Die Ergebnisse aus 3.3. und 3.4. behalten ihre Gültigkeit auch in Polyedergebieten, in denen alle Eckensingularitäten schwächer als die Kantensingularitäten sind.

Abbildung 3.1. zeigt ein Beispiel eines solchen Gebiets. Sowohl das Dirichletproblem für den Laplaceoperator als auch das gemischte Randwertproblem mit Neumannbedingungen an den (schraffierten) Stirnflächen besitzen nur Kantensingularitäten [Stephan/ Whiteman 1988].

Bei der Aufgabe mit natürlichen Randbedingungen muß in einem solchen Fall für die Fehleranalyse nach 3.3. zusätzlich die Fortsetzung von Funktionen in der Umgebung der Polyederecken betrachtet werden. Für Ecken, in denen genau drei Kanten zusammenstoßen, ist die Fortsetzbarkeit in 2.4.8. bewiesen.

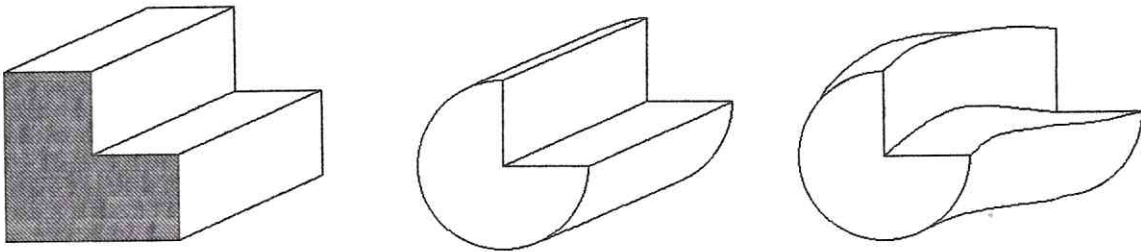


Abb. 3.1., 3.2. und 3.3.: Beispielgebiete

Ändert man ein solches Gebiet dahingehend ab, daß (glatte) gekrümmte Randflächen Γ_i außerhalb der Kante auftreten ($\overline{\Gamma_i} \cap \overline{\Omega} = \emptyset$), vgl. z.B. Abbildung 3.2., so bleibt das ohne Einfluß auf das Lösungsverhalten und damit bei o.g. Aufgaben auf die Fehlerabschätzungen. Deshalb ist auch das Vorgehen in Kapitel 5. zulässig; dort werden Aufgaben über einem Gebiet wie in Abbildung 3.2. als Test zu Kantensingularitäten betrachtet.

Die Gebiete können darüber hinaus weiter verzerrt sein, solange sich das Lösungsverhalten nicht ändert, vgl. z.B. Abbildung 3.3. mit einer gekrümmten Kante. Gleiches gilt (für die 2./3. Randwertaufgabe zunächst mit der Einschränkung, daß in jeder Ecke genau 3 Kanten zusammenstoßen) für die Abschätzungen in 3.5., falls Polyedergebiete mit gekrümmten Randflächen betrachtet werden.

3.6.2. Variabler Kantenwinkel. Zur Untersuchung der Lösungseigenschaften bei Aufgaben in Gebieten mit sich entlang der Kante änderndem Kantenwinkel $\omega = \omega(\xi)$ werden gewöhnlich Räume mit Gewicht vom Potenztyp, bei denen sich der Exponent entlang der Kante ändert, betrachtet. Es genügt aber auch, einen umfassenderen Raum mit konstantem Exponent in der Gewichtsfunktion zu finden (vgl. z.B. [Sändig 1990, 2.4.]).

Falls die auf der Kante definierte Funktion $\omega(\xi)$, die als Wert den Innenwinkel besitzt, glatt ist und nirgends den Wert π annimmt, sind solche Aufgaben in den in 1.4. definierten Problemstellungen nicht ausgeschlossen, im Falle der 1. Randwertaufgabe sogar enthalten. Bei der Aufgabe mit natürlichen Randbedingungen stört i.allg., daß λ als konstant vorausgesetzt wird. Es ist anzunehmen, daß sich die Konvergenzaussagen für variables $\lambda = \lambda(\xi)$ analog zeigen lassen, wenn der Netzsteuerparameter in Abhängigkeit von $\min_{\xi} \lambda(\xi)$ gewählt wird.

Vermutlich ist jedoch eine solche Vernetzung (vom theoretischen Standpunkt aus gesehen) nicht optimal. Zu überlegen wäre, ob man auch entlang der Kante variable Netzsteuerparameter einführen sollte. Die Konvergenzaussagen müßten dann entsprechend formuliert und die Beweise verallgemeinert werden.

3.6.3. Logarithmische Terme. Es ist möglich, daß in der Lösungsdarstellung (vgl. 1.4.8.(ii)) Summanden auftreten, die den Term $\ln r$ enthalten. Vermutlich kann die Interpolationsfehlerabschätzung auch für Lösungen solcher Aufgaben bewiesen werden, indem man ausnutzt, daß für $r < r_0$ die Ungleichung $|\ln r| \leq C(\varepsilon) r^{-\varepsilon} \quad \forall \varepsilon > 0$ gilt. Diese Funktionen wurden jedoch nicht weiter untersucht.

3.6.4. Gemischte Randbedingungen. Die Lösungen von Randwertproblemen mit gemischten Randbedingungen besitzen die gleiche Struktur wie die der hier behandelten Aufgaben. Um entsprechende Fehlerabschätzungen zu beweisen, sind folgende Schwierigkeiten zu bewältigen:

(i) Wie soll das Gebiet vernetzt werden, falls eine exakte Triangulation nicht möglich ist? Man muß gegebenenfalls auf krummlinige Elemente oder nichtkonforme Methoden ausweichen,

da die Forderung, daß Teilflächen des Randes mit wesentlichen Randbedingungen außerhalb und Teilflächen mit natürlichen Randbedingungen innerhalb von Ω^h liegen, mit Simplizes i. allg. nicht umsetzbar ist.

(ii) Randwertaufgaben mit gemischten Randbedingungen können, durch Kanten oder Ecken bedingt, zu Lösungen führen, die nicht im Sobolevraum $W^{\frac{3}{2},2}(\Omega)$ enthalten sind. Aus den Einbettungssätzen kann somit nicht deren Stetigkeit, die Voraussetzung für die Anwendung des Interpolationsoperators Π_h , gefolgert werden.

In diesem Fall ist der in 3.3. beschriebene Zugang vorteilhaft, bei dem die Lösung zunächst gemittelt und damit in ihren Glattheitseigenschaften verbessert wird. Das Problem besteht nun aber darin, daß die gemittelte Funktion i. allg. die wesentlichen Randbedingungen nicht mehr erfüllt, so daß ein zusätzlicher Fehlerterm abzuschätzen ist.

3.6.5. Konische Punkte. Aufgaben mit konischen Ecken wurden nicht bearbeitet. Die Ursachen liegen jedoch nicht in einer besonderen Schwierigkeit dieser Aufgaben, im Gegenteil, vermutlich sind diese Aufgaben einfacher zu behandeln, als die hier betrachteten, da die Spannungsintensitätskoeffizienten wie beim zweidimensionalen Eckenproblem Konstanten sind [Kufner/Sändig 1987, Kap.I].

3.6.6. Andere Elementtypen. (i) Die Ausführungen in dieser Arbeit beziehen sich fast ausschließlich auf Simplexelemente (Tetraeder) mit linearen Ansatzfunktionen. Diese ermöglichen alle aufgeführten Abschätzungen.

(ii) Vermutlich können alle Abschätzungen in Kapitel 3. auch bewiesen werden, wenn das Gebiet mit Hexaeder- bzw. Pentaederelementen (Dreiecksprismen) vernetzt wird und trilineare Ansatzfunktionen verwendet werden. Allerdings muß man dann die Kapitel 4.2. und 4.3. neu überdenken, da dort die Eigenschaft ausgenutzt wurde, daß die zweiten Ableitungen der Funktionen aus V_h in jedem Element verschwinden.

(iii) Ansatzfunktionen höheren Grades, wie sie z.B. bei Fritzsche [1989] betrachtet werden, erlauben nur bei Lösungsfunktionen aus Räumen mit entsprechend hohem Differentiationsgrad eine Fehlerabschätzung mit besserer Konvergenzordnung als bei linearen Elementen. Dann müßten die Aufgaben jedoch glattere rechte Seiten besitzen. Derartige Betrachtungen würden jedoch den Rahmen dieser Arbeit sprengen.

(iv) Es liegt der Wunsch nahe, in der Umgebung der Kanten anisotrop zu verfeinern, d.h., es wird nur senkrecht zur Kante

die Schrittweite verringert, während entlang der Kante die Elementlänge in der globalen Größenordnung h liegt. Der Vorteil liegt vor allem in einer leichteren Konstruierbarkeit solcher Netze, einer praktischen Verringerung der Elementanzahl und dem Wegfall der Beschränkung $\mu > \frac{1}{3}$ für eine asymptotisch gleichbleibende Größenordnung der Anzahl der Elemente (vgl. 3.2.5.).

Für Randwertaufgaben, deren rechte Seite f in $L_p(\Omega)$ mit $p > 2$ liegt, ist die Interpolationsfehlerabschätzung in der $L_p(\Omega)$ - bzw. $W^{1,p}(\Omega)$ -Norm wahrscheinlich analog zu den hier aufgeführten Beweisen möglich. Die Regularitätstheorie für solche Lösungen ist wohlbekannt [Kufner/Sändig 1987] [Sändig 1990], die lokalen Interpolationsfehlerabschätzungen sind in 3.1.11. (ii) angegeben.

Für die Abschätzung des Finite-Elemente-Fehlers in der $W^{1,2}$ - bzw. $L_2(\Omega)$ -Norm sollte man jedoch den globalen Interpolationsfehler auch in der $W^{1,2}(\Omega)$ -Norm untersuchen.

4. FEM-Strategien und Approximationsfehlerabschätzungen

4.1. FEM mit und ohne Netzverfeinerung

4.1.1. Betrachtet werden die approximierenden Probleme 1.4.6., 1.4.10. und 1.4.12. Nachdem in Folgerung 2.3.3. die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung u_h gezeigt wurde, interessieren nun Abschätzungen für den Fehler $u - u_h$. Mit Hilfe des Lemmas von Ceá (4.1.2.) kann dieses Problem in der energetischen Norm auf ein Approximationsproblem zurückgeführt werden, so daß die Aussagen in Kapitel 3. unmittelbar verwendet werden können. Die Abschätzungen in der L_2 -Norm beruhen auf der bekannten Idee von Nitsche.

Die Fehlerabschätzungen werden in den Sätzen 4.1.3. bis 4.1.6. hergeleitet, in 4.1.7. erfolgt eine kurze Diskussion der Resultate.

4.1.2. Lemma (Ceá). Seien H ein Hilbertraum, f ein Element des dualen Raums H^* und $a(.,.): H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ eine Bilinearform, für die gilt:

$$\begin{aligned} |a(v, w)| &\leq C_1 \|v; H\| \|w; H\| && \forall v, w \in H && \text{(Beschränktheit)} \\ a(v, v) &\geq C_2 \|v; H\|^2 && \forall v \in H && \text{(Elliptizität)} \end{aligned}$$

Sei weiter $H_h \subset H$ ein abgeschlossener Unterraum von H und gelte für ein $v \in H$ $a(v, w) = (f, w) \quad \forall w \in H$
und für ein $v_h \in H_h$ $a(v_h, w_h) = (f, w_h) \quad \forall w_h \in H_h$.

Dann gilt $\|v - v_h; H\| \leq (C_1/C_2) \inf_{w_h \in H_h} \|v - w_h; H\|$.

Das Lemma ist z.B. in [Ciarlet 1978, 2.4.] bewiesen.

4.1.3. Satz. Sei u die Lösung des Problems 1.4.4. (bzw. 1.4.8.). Entsprechend 3.2.3. und 3.2.6. werde Ω vernetzt und ein Raum V_{0h} (bzw. V_h) definiert. Weiterhin bezeichnet u_h die Lösung des FEM-Problems 1.4.6. (bzw. 1.4.10.). Für den Approximationsfehler gilt ($\varepsilon > 0$ beliebig):

$$\|u - u_h; W^{1,2}(\Omega)\| \leq \begin{cases} Ch \|f; L_2(\Omega)\| & \text{wenn } \mu < \lambda \\ Ch^{(\lambda - \varepsilon)/\mu} \|f; L_2(\Omega)\| & \text{wenn } \mu \geq \lambda \end{cases}$$

Dabei ist λ in 1.4.2. (bzw. 1.4.8.) definiert, und μ bezeichne den Netzgraduierungsparameter (vgl. 3.2.2.).

Beweis. Die Voraussetzungen des Lemmas 4.1.2. sind mit $H = W^{1,2}(\Omega)$ erfüllt (vgl. auch den Beweis in 2.3.2.), so daß die Existenz einer Funktion aus $H_h = V_{0h}$ (bzw. V_h) zu zeigen bleibt, die die in der Behauptung genannten Abschätzungen realisiert. Die Sätze 3.4.5. und 3.3.6. vervollständigen somit den Beweis. ■

4.1.4. Satz. Sei u die Lösung des Problems 1.4.11. Entsprechend 3.5.4./3.5.5. werde Ω vernetzt und der Raum V_{0h} definiert. Weiterhin bezeichnet u_h die Lösung des FEM-Problems 1.4.12. Bei entsprechender Verfeinerung (so daß

$\frac{b_e}{1-\mu_e} \leq 1 \quad \forall e \in \mathcal{E}$ und $\frac{a_q}{1-\nu_q} + \sum_{\{e: q \in \bar{e}\}} \frac{b_e}{1-\mu_e} \leq 1 \quad \forall q \in \mathcal{E}$, Bezeichnungen vgl. 3.5.2. bis 3.5.4.) gilt für den Approximationsfehler

$$\|u - u_h; W^{1,2}(\Omega)\| \leq Ch \|f; L_2(\Omega)\|,$$

während bei einer Vernetzung ohne Verfeinerung nur

$$\|u - u_h; W^{1,2}(\Omega)\| \leq Ch^\tau \|f; L_2(\Omega)\|,$$

$\tau = \min_{e \in \mathcal{E}, q \in \mathcal{E}} \{1 - b_e, 1 - a_q - \sum_{\{e: q \in \bar{e}\}} b_e\}$, gezeigt werden kann.

Der Beweis erfolgt mit Hilfe von Satz 3.5.7. analog zum Beweis des vorhergehenden Satzes.

4.1.5. Satz. Unter den Voraussetzungen von Satz 4.1.3. gilt:

$$\|u - u_h; L_2(\Omega)\| \leq \begin{cases} Ch^2 \|f; L_2(\Omega)\| & \text{wenn } \mu < \lambda \\ Ch^{2(\lambda - \varepsilon)/\mu} \|f; L_2(\Omega)\| & \text{wenn } \mu \geq \lambda \end{cases}$$

($\varepsilon > 0$ beliebig).

Beweis. Zunächst wird das Dirichletproblem betrachtet.

(i) Entsprechend der Definition von u und u_h in 1.4.4. bzw. 1.4.6. gilt für alle Funktionen $v_h \in V_{0h}$:

$$a(u, v_h) = (f, v_h) \quad \text{und} \quad a(u_h, v_h) = (f, v_h),$$

folglich auch: $a(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_{0h}$

bzw. $a(u - u_h, w - v_h) = a(u - u_h, w) \quad \forall v_h \in V_{0h}, \forall w \in V_0.$

(ii) Sei nun w speziell dasjenige Element aus V_0 , für das gilt:

$$a(w, v) = (u - u_h, v) \quad \forall v \in V_0.$$

Da $u - u_h \in L_2(\Omega)$ ist, existiert eine solche Funktion w infolge des Satzes 2.3.1. (Lax/Milgram).

(iii) Aus (ii) folgt wegen $u - u_h \in V_0$

$$a(w, u - u_h) = (u - u_h, u - u_h) = \|u - u_h; L_2(\Omega)\|^2.$$

Da $a(\cdot, \cdot)$ symmetrisch ist, kann man diese Gleichung in (i) einsetzen und erhält

$$a(u - u_h, w - v_h) = \|u - u_h; L_2(\Omega)\|^2 \quad \forall v_h \in V_{0h}.$$

Setzt man nun speziell $v_h = \Pi_h w$ und verwendet die Beschränktheit der Bilinearform, so folgt:

$$\|u - u_h; L_2(\Omega)\|^2 \leq C \|u - u_h; W^{1,2}(\Omega)\| \|w - \Pi_h w; W^{1,2}(\Omega)\|.$$

(iv) Sei $\mu < \lambda$, dann gilt laut Satz 4.1.3. $\|u - u_h; W^{1,2}(\Omega)\| \leq Ch \|f; L_2(\Omega)\|$. Aufgrund der Wahl von w in (ii) gilt laut Satz 3.4.5. $\|w - \Pi_h w; W^{1,2}(\Omega)\| \leq Ch \|u - u_h; L_2(\Omega)\|$. Diese beiden Ungleichungen in (iii) eingesetzt, ergibt

$$\|u - u_h; L_2(\Omega)\|^2 \leq Ch^2 \|f; L_2(\Omega)\| \|u - u_h; L_2(\Omega)\|$$

und damit die Behauptung. Der Beweis für $\mu \geq \lambda$ erfolgt analog. \square

(v) Für das Problem mit natürlichen Randbedingungen zeigt man die Behauptung in gleicher Weise. Man muß hier lediglich v_h entsprechend U_h in Satz 3.3.6. wählen. ■

(vi) Bemerkung. Im Beweis wurde vorausgesetzt, daß w die gleichen Eigenschaften wie u besitzt, vgl. 1.4.2. bzw. 1.4.8., mit deren Hilfe ja der Interpolationsfehler abgeschätzt wurde. Diese Voraussetzung ist statthaft, da sich die Probleme, deren Lösung u bzw. w sind, nur durch die rechte Seite, nicht aber durch Gebiet bzw. Differentialoperator (Bilinearform) unterscheiden.

4.1.6. Satz. Es seien die Voraussetzungen von Satz 4.1.4. erfüllt. Dann gilt für den Approximationsfehler bei entsprechend verfeinerter Vernetzung

$$\|u - u_h; L_2(\Omega)\| \leq Ch^2 \|f; L_2(\Omega)\|,$$

während bei einer Vernetzung ohne Verfeinerung nur

$$\|u - u_h; L_2(\Omega)\| \leq Ch^{2\tau} \|f; L_2(\Omega)\|,$$

τ wie in Satz 4.1.4., gilt.

Der Satz kann analog dem vorangegangenen bewiesen werden.

4.1.7. Bemerkungen. (i) Die in diesem Kapitel bewiesenen Sätze zeigen, daß eine entsprechend 3.2.3. bzw. 3.5.4. durchgeführte Netzverfeinerung geeignet ist, die Approximationsordnung der Finite-Elemente-Methoden bei Aufgaben mit Kanten und Ecken zu verbessern und sogar die gleiche Ordnung wie bei Aufgaben mit regulären ($W^{2,2}(\Omega)$ -)Lösungen zu erreichen.

(ii) Bei Kantenproblemen wird die Abhängigkeit der Fehlerordnung vom Netzsteuerparameter μ betrachtet, das nicht verfeinerte Netz ist als Spezialfall $\mu=1$ enthalten. Hier werden die gleichen Resultate wie bei Sändig [1990] erhalten; in dieser Arbeit wird der Finite-Elemente-Fehler für allgemeiner gestellte Aufgaben, jedoch ohne Netzverfeinerung und unter der Voraussetzung der exakten Vernetzbarkeit des Gebiets Ω , untersucht.

(iii) Insbesondere für das unverfeinerte Netz entsteht die Frage nach der Optimalität der Abschätzungen. Das Beispiel (iv) zeigt, daß keine wesentliche Verbesserung der Fehlerordnung erreicht werden kann. Es ist jedoch ungeklärt, ob das ε in der Abschätzung bei Kantenproblemen notwendig ist oder nur beweistechnisch bedingt ist.

Im zweidimensionalen Fall liefern die hier vorgestellten Beweisstrategien ebenfalls nur eine Konvergenzordnung $\lambda - \varepsilon$, während in der Monographie von Оганесян und Руховец [1979,

§6.4.] die Ordnung λ gezeigt wird. Der dort angeführte Beweis läßt sich jedoch nicht auf den dreidimensionalen Fall übertragen, da die Voraussetzung, daß der Spannungsintensitätskoeffizient γ im Zweidimensionalen eine Konstante ist, eine wesentliche Rolle spielt.

(iv) Beispiel für die Optimalität der Abschätzungen. Es seien $\omega \in (\pi, 2\pi)$ eine reelle Zahl und $\Omega = \{x = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, \xi) \in \mathbb{R}^3 : r < 1, 0 < \varphi < \omega, -1 < \xi < 1\}$. Gesucht ist die schwache Lösung von $-\Delta u = f$ in Ω , $u = 0$ auf $\partial\Omega$, wobei f so gewählt wird, daß $u = \xi(x) r^\lambda \sin \lambda \varphi$. Dabei sind $\lambda = \pi/\omega$ und $\xi(x)$ eine glatte Abschneidefunktion, für die gilt: $\xi(x) = 1 \quad \forall x : |x| < \frac{1}{2}$ und $\xi(x) = 0 \quad \forall x : |x| > \frac{3}{4}$. Durch Nachrechnen bestätigt man, daß $f \in L_2(\Omega)$ ist.

Es wird nun eine Familie $\mathcal{F} = \{\mathcal{T}_h, h = (4n)^{-1}\}_{n=1}^{\infty}$ von Triangulationen \mathcal{T}_h betrachtet. Diese seien so realisiert, daß man jeweils $3n$ Tetraeder finden kann, deren Vereinigung gleich dem Pentaedergebiet P mit den Eckpunkten $(0,0,0)$, $(h,0,0)$, $(0,h,0)$, $(0,0,\frac{1}{4})$, $(h,0,\frac{1}{4})$ und $(0,h,\frac{1}{4})$ ist, nämlich die Tetraeder mit den Eckpunkten

$(0,0,kh)$, $(h,0,kh)$, $(0,0,(k+1)h)$ und $(0,h,kh)$,
 $(0,0,(k+1)h)$, $(h,0,(k+1)h)$, $(h,0,kh)$ und $(0,h,kh)$,
 $(0,0,(k+1)h)$, $(h,0,(k+1)h)$, $(0,h,kh)$ und $(0,h,(k+1)h)$,
 $k=0..(n-1)$.

Sei nun u_h die FEM-Lösung der o.g. Randwertaufgabe über einer Vernetzung $\mathcal{T}_h \in \mathcal{F}$. Da u_h die Randbedingung erfüllt, gilt $u_h = 0$ in den ersten beiden Knoten aller oben aufgeführten Tetraeder und folglich $\frac{\partial u_h}{\partial x_1} = 0$ in P . Daraus folgt:

$$\|u - u_h; W^{1,2}(\Omega)\| \geq \left\| \frac{\partial(u - u_h)}{\partial x_1}; L_2(P) \right\| = \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1}; L_2(P) \right\|$$

Durch Nachrechnen zeigt man die Ungleichung $\left\| \frac{\partial u}{\partial x_1}; L_2(P) \right\| \geq Ch^\lambda$, wobei C eine Konstante ist, die nur von ω abhängt. Es gilt:

$u = r^\lambda \sin \lambda \varphi$ in P , folglich $\frac{\partial u}{\partial x_1} = \lambda r^{\lambda-1} \sin(\lambda-1)\varphi$ und somit

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1}; L_2(P) \right\|^2 &\geq \lambda^2 \int_0^{\frac{1}{4}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}h} (r^{\lambda-1} \sin(\lambda-1)\varphi)^2 r dr d\varphi d\xi \\ &= \lambda^2 \frac{1}{4} (2\lambda)^{-1} (\frac{1}{2}\sqrt{2}h)^{2\lambda} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2(\lambda-1)\varphi d\varphi. \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, daß man für eine Klasse von Randwertaufgaben, die die hier angeführte enthält, über einer nicht verfeinerten Vernetzung in der $W^{1,2}(\Omega)$ -Norm keine bessere FEM-Fehlerordnung als λ nachweisen kann.

4.2. Abschätzungen im Subgebiet

4.2.1. (i) Anliegen. In diesem Abschnitt sollen Kantenprobleme über nicht verfeinerten Tetraedernetzen betrachtet werden. Wie in Satz 4.1.3. gezeigt wurde, konvergiert die Finite-Elemente-Lösung in Abhängigkeit von der Stärke der Singularität nur mit einer geringeren Ordnung als Eins:

$$\|u - u_h; W^{1,2}(\Omega)\| \leq Ch^{\lambda - \varepsilon} \|f; L_2(\Omega)\|, \quad \lambda < 1, \varepsilon > 0.$$

Man kann jedoch zeigen, daß die Näherungslösung in einem Subgebiet $\Omega_- \subset \Omega$, das einen positiven Abstand zur Kante hat, mit der Ordnung Eins gegen die exakte Lösung konvergiert, falls der Singularitätenexponent $\lambda \geq \frac{1}{2}$ ist:

$$\|u - u_h; W^{1,2}(\Omega_-)\| \leq Ch \|f; L_2(\Omega)\|.$$

(Die Konstante hängt natürlich vom Abstand R der Kante M zum Subgebiet Ω_- ab.) Das heißt, die verminderte Konvergenzordnung im Gesamtgebiet ist nur durch die Singularität der Lösung in der Umgebung der Kante begründet.

(ii) **Beweisidee.** Man sieht leicht ein, daß man den Interpolationsfehler im Subgebiet ohne Probleme abschätzen kann. Jedoch kann man nicht wie üblich auf den Finite-Elemente-Fehler schließen, da eine Voraussetzung des Lemmas von Céa nicht erfüllt ist: u_h ist i.allg. nicht Lösung des FEM-Problems über dem Subgebiet.

Es gelingt jedoch mit Hilfe der in 2.7. konstruierten Abschneidefunktion Q , den Fehler zwischen u und u_h abzuschätzen. Die Funktion Qu ist in Ω definiert, stimmt in Ω_- mit u überein, besitzt jedoch keine Singularität. Die Vorgehensweise wurde für zweidimensionale Gebiete mit in der Umgebung der Ecke nichtgekrümmten Rand von Оганесян und Руховец [1979, §6.6] demonstriert.

Der Beweis wird hier für die Probleme 1.4.8./1.4.10. (2./3. Randwertaufgabe) geführt. Zunächst werden vier Lemmata 4.2.3. bis 4.2.6. bewiesen; die eigentliche Aussage wird in Satz 4.2.7. formuliert und ist dann nur noch eine einfache Schlußfolgerung aus den Lemmata.

4.2.2. Bezeichnungen. (i) Es bezeichnen wieder a_{ij} , a_0 und σ die Koeffizienten in der Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ (vgl. 1.4.7.), Π_h den Interpolationsoperator über einem unverfeinerten Netz (vgl. Kap 3.2.), $U_h := \Pi_h u_s^e + \Pi_h w$ die Funktion, für die in 3.3. der Fehler $u - U_h$ abgeschätzt wurde und u_h die Näherungslösung (vgl. 1.4.10.). Ferner sei $w_h := u_h - U_h \in V_h$ hier lokal neu definiert.

(ii) Bezeichne weiterhin $\Omega_- := \{x \in \Omega : \text{dist}(x, M) > R\}$ das Teilgebiet von Ω , in dem der Finite-Elemente-Fehler abgeschätzt werden soll, und Q die in 2.7. definierte Abschneidefunktion,

wobei R die Rolle des Parameters in 2.7.1.(iii) übernimmt. Ferner sei \varkappa die in 2.7. eingeführte Zahl ($\varkappa \in (0, \frac{2}{3})$) und $\Omega_{\varkappa} := \{\varkappa \in \Omega : \text{dist}(\varkappa, M) > \frac{1}{2}\varkappa R\}$.

Entsprechend 2.7.1.(iii) gilt also:

$$Q \geq 0 \text{ in } \Omega, \quad Q = 0 \text{ in } \Omega \setminus \Omega_{\varkappa}, \quad Q = 1 \text{ in } \Omega_- \text{ und } \frac{\partial Q}{\partial \mathcal{N}} = 0 \text{ auf } \partial \Omega.$$

Für genügend kleines h gilt für alle Funktionen $v \in \mathbf{C}(\bar{\Omega})$ sogar:

$$\Pi_{\tilde{h}}(Qv) = 0 \text{ in } \Omega \setminus \Omega_{\varkappa} \text{ und } \Pi_{\tilde{h}}(Qv) = \Pi_{\tilde{h}}v \text{ in } \Omega_-.$$

Schließlich gilt (vgl. Lemma 2.7.5.(iii)):

$$\|Q; L_{\infty}(\Omega)\| \leq C, \quad \|Q; W^{1,00}(\Omega)\| \leq CR^{-1} \text{ und } \|Q; W^{2,00}(\Omega)\| \leq CR^{-2}.$$

4.2.3. Lemma. Es gelten folgende Abschätzungen ($\delta > 0$ beliebig):

- (i) $|w_{\tilde{h}}; W^{1,2}(\Omega)| \leq Ch^{\lambda-\delta} \|f; L_2(\Omega)\|$
- (ii) $\|w_{\tilde{h}}; L_2(\Omega)\| \leq Ch^{2(\lambda-\delta)} \|f; L_2(\Omega)\|$
- (iii) $|u - U_{\tilde{h}}; W^{1,2}(\Omega_{\varkappa})| \leq CR^{\lambda-1-\delta} h \|f; L_2(\Omega)\|$
- (iv) $\|u - U_{\tilde{h}}; L_2(\Omega_{\varkappa})\| \leq CR^{\lambda-1-\delta} h^2 \|f; L_2(\Omega)\|$

Beweis. (a) Die Abschätzungen (i) und (ii) sind unmittelbare Folgerungen aus 3.3.6. und 4.1.3. (bzw. 4.1.5.) mit Hilfe der Dreiecksungleichung:

$$\|w_{\tilde{h}}\| = \|u_{\tilde{h}} - U_{\tilde{h}}\| \leq \|u - u_{\tilde{h}}\| + \|u - U_{\tilde{h}}\|. \quad \square$$

(b) Sei $\Omega_{\varkappa}^{\tilde{h}}$ die Vereinigung aller Tetraeder, die einen nichtleeren Durchschnitt mit Ω_{\varkappa} haben. (Es gilt also $\Omega_{\varkappa} \subset \Omega_{\varkappa}^{\tilde{h}}$, trotzdem aber für hinreichend kleine h $\text{dist}(\Omega_{\varkappa}^{\tilde{h}}, M) \geq CR$, $C > 0$.) Da $u = u_s + w$ und $U_{\tilde{h}} = \Pi_{\tilde{h}}u_s^{\tilde{e}} + \Pi_{\tilde{h}}w$ ist, folgt:

$$|u - U_{\tilde{h}}; W^{1,2}(\Omega_{\varkappa}^{\tilde{h}})| \leq |u_s - u_s^{\tilde{e}}; W^{1,2}(\Omega_{\varkappa}^{\tilde{e}})| + |u_s^{\tilde{e}} - \Pi_{\tilde{h}}u_s^{\tilde{e}}; W^{1,2}(\Omega_{\varkappa}^{\tilde{h}})| + |w - \Pi_{\tilde{h}}w; W^{1,2}(\Omega_{\varkappa}^{\tilde{h}})|$$

und $\|u - U_{\tilde{h}}; L_2(\Omega_{\varkappa}^{\tilde{h}})\| \leq \|u_s - u_s^{\tilde{e}}; L_2(\Omega_{\varkappa}^{\tilde{e}})\| + \|u_s^{\tilde{e}} - \Pi_{\tilde{h}}u_s^{\tilde{e}}; L_2(\Omega_{\varkappa}^{\tilde{h}})\| + \|w - \Pi_{\tilde{h}}w; L_2(\Omega_{\varkappa}^{\tilde{h}})\|$

(c) Mit Hilfe der Lemmata 2.5.8. und 2.5.3. erhält man

$$|u_s - u_s^{\tilde{e}}; W^{1,2}(\Omega_{\varkappa}^{\tilde{e}})| \leq C\omega(u_s, \sqrt{3}\varrho; W^{1,2}(\Omega_{\varkappa}^{\tilde{e}})) \leq C\varrho \|u_s; W^{2,2}(\Omega_{\varkappa}^{\tilde{e}+})\|$$

und $\|u_s - u_s^{\tilde{e}}; L_2(\Omega_{\varkappa}^{\tilde{e}})\| \leq C\varrho\omega(u_s, \sqrt{3}\varrho; W^{1,2}(\Omega_{\varkappa}^{\tilde{e}})) \leq C\varrho^2 \|u_s; W^{2,2}(\Omega_{\varkappa}^{\tilde{e}+})\|$,

wobei $\Omega_{\varkappa}^{\tilde{e}+} \supset \Omega_{\varkappa}^{\tilde{h}}$ ein Gebiet mit $\text{dist}(\partial\Omega_{\varkappa}^{\tilde{e}+}, \partial\Omega_{\varkappa}^{\tilde{h}}) \geq \sqrt{3}\varrho$ und $\text{dist}(\partial\Omega_{\varkappa}^{\tilde{e}+}, M) \geq CR$, $C > 0$, sei.

(d) Mit Hilfe der lokalen Interpolationsfehlerabschätzung 3.1.5.(iii) und einer Überlegung analog zu 2.5.7.(i) ergibt sich:

$$|u_s^{\tilde{e}} - \Pi_{\tilde{h}}u_s^{\tilde{e}}; W^{1,2}(\Omega_{\varkappa}^{\tilde{h}})| \leq Ch |u_s^{\tilde{e}}; W^{2,2}(\Omega_{\varkappa}^{\tilde{h}})| \leq Ch |u_s; W^{2,2}(\Omega_{\varkappa}^{\tilde{e}+})|,$$

$$\|u_s^{\tilde{e}} - \Pi_{\tilde{h}}u_s^{\tilde{e}}; L_2(\Omega_{\varkappa}^{\tilde{h}})\| \leq Ch^2 |u_s^{\tilde{e}}; W^{2,2}(\Omega_{\varkappa}^{\tilde{h}})| \leq Ch^2 |u_s; W^{2,2}(\Omega_{\varkappa}^{\tilde{e}+})|,$$

$$|w - \Pi_{\tilde{h}}w; W^{1,2}(\Omega_{\varkappa}^{\tilde{h}})| \leq Ch |w; W^{2,2}(\Omega_{\varkappa}^{\tilde{h}})|$$

und $\|w - \Pi_{\tilde{h}}w; L_2(\Omega_{\varkappa}^{\tilde{h}})\| \leq Ch^2 |w; W^{2,2}(\Omega_{\varkappa}^{\tilde{h}})|.$

(e) Da $\text{dist}(\partial\Omega_{\#}^+, M) \geq CR$ ist, gilt mit Hilfe von Satz 2.4.11.:

$$\|u_{\mathcal{S}}; W^{2,2}(\Omega_{\#}^+)\| \leq CR^{\lambda-1-\varepsilon} \|u_{\mathcal{S}}; W_{1-\lambda+\varepsilon}^{2,2}(\Omega_{\#}^+)\| \leq CR^{\lambda-1-\varepsilon} \|\chi; W_{\lambda}^{2,2}(\Omega)\|.$$

(Man beachte, daß hier wie in 3.3. stets die Funktionen $u_{\mathcal{S}}$ und w entsprechend 2.4.10. über den Rand von Ω hinaus fortgesetzt werden müssen.)

(f) Es werden nun die Abschätzungen (b) bis (e) zusammengefügt und die Beziehung $\varrho = Ch$ (Das Netz ist nicht verfeinert, folglich ist $h_1 = h$.), die Beschränktheit der Fortsetzung von w sowie die Ungleichung in 1.4.8.(ii) ausgenutzt:

$$\begin{aligned} |u - U_h; W^{1,2}(\Omega_{\#})| &\leq Ch \|u_{\mathcal{S}}; W^{2,2}(\Omega_{\#}^+)\| + Ch \|w; W^{2,2}(\Omega_{\#}^+)\| \\ &\leq Ch (R^{\lambda-1-\varepsilon} \|\chi; W^{2,2}(\Omega)\| + \|w; W^{2,2}(\Omega)\|) \leq Ch R^{\lambda-1-\varepsilon} \|f; L_2(\Omega)\| \\ \|u - U_h; L_2(\Omega_{\#})\| &\leq Ch^2 R^{\lambda-1-\varepsilon} \|f; L_2(\Omega)\|. \end{aligned}$$

(Es sind $R < 1$ und $\lambda < 1$.)

4.2.4. Lemma. Es gilt:
$$\int_{\Omega} Q \left[\sum_{i,j=1}^3 a_{ij} \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \frac{\partial w_h}{\partial x_j} + a_0 w_h^2 \right] dx + \int_{\partial\Omega} Q \sigma w_h^2 d\Gamma =$$

$$= a(w_h, Qw_h - \Pi_h(Qw_h)) + a(u - U_h, \Pi_h(Qw_h) - Qw_h) + a(u - U_h, Qw_h) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} w_h^2 \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial Q}{\partial x_j} \right) dx.$$

Beweis. (i) Entsprechend der Definition von u , u_h und w_h gilt für alle $v_h \in V_h$:

$$\begin{aligned} a(w_h, v_h) &= a(u_h - U_h, v_h) = a(u - U_h, v_h) - a(u - u_h, v_h) = a(u - U_h, v_h), \\ \text{da } a(u - u_h, v_h) &= a(u, v_h) - a(u_h, v_h) = (f, v_h) - (f, v_h) = 0. \end{aligned}$$

Indem man in dieser Gleichung speziell $v_h = \Pi_h(Qw_h)$ einsetzt, erhält man

$$a(w_h, \Pi_h(Qw_h)) = a(u - U_h, \Pi_h(Qw_h)).$$

(ii) Durch äquivalentes Umformen und Einsetzen von (i) erhält man:

$$\begin{aligned} a(w_h, Qw_h) &= a(w_h, Qw_h - \Pi_h(Qw_h)) + a(w_h, \Pi_h(Qw_h)) \\ &= a(w_h, Qw_h - \Pi_h(Qw_h)) + a(u - U_h, \Pi_h(Qw_h)) \\ &= a(w_h, Qw_h - \Pi_h(Qw_h)) + a(u - U_h, \Pi_h(Qw_h) - Qw_h) + a(u - U_h, Qw_h). \end{aligned}$$

(iii) Andererseits erhält man aus der Definition der Bilinearform und durch Ausdifferenzieren:

$$\begin{aligned} a(w_h, Qw_h) &= \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^3 a_{ij} \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \frac{\partial Qw_h}{\partial x_j} + a_0 Qw_h^2 \right] dx + \int_{\partial\Omega} Q \sigma w_h^2 d\Gamma = \\ &= \int_{\Omega} Q \left[\sum_{i,j=1}^3 a_{ij} \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \frac{\partial w_h}{\partial x_j} + a_0 w_h^2 \right] dx + \int_{\partial\Omega} Q \sigma w_h^2 d\Gamma + \int_{\Omega} w_h \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \frac{\partial Q}{\partial x_j} dx. \end{aligned}$$

(iv) Der letzte Term wird partiell integriert.

$$\int_{\Omega} w_h \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \frac{\partial Q}{\partial x_j} dx = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} w_h^2 \frac{\partial Q}{\partial \mathcal{N}} d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\Omega} w_h^2 \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial Q}{\partial x_j} \right) dx$$

Da $\frac{\partial Q}{\partial \mathcal{N}} = 0$ auf $\partial\Omega$ gilt, entfällt das Randintegral.

(v) Durch Gleichsetzen der Ausdrücke für $a(w_h, Qw_h)$ in (ii) und (iii) folgt unter Verwendung von (iv) die Behauptung. ■

4.2.5. Lemma. Mit beliebigen Konstanten $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ gilt:

$$|a(u-U_h, Qw_h)| \leq C_0 \varepsilon \left\{ \int_{\Omega} Q \left[\sum_{i,j=1}^3 a_{ij} \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \frac{\partial w_h}{\partial x_j} + a_0 w_h^2 \right] dx + \int_{\partial\Omega} Q \sigma w_h^2 d\Gamma \right\} + \\ + C \varepsilon^{-1} (R^{2(\lambda-1-\delta)} h^2 + R^{\lambda-2-\delta} h^{1+2(\lambda-\delta)}) \|f; L_2(\Omega)\|^2.$$

Beweis. (i) Analog zu 4.2.4.(iii) ergibt sich: $a(u-U_h, Qw_h) = \int_{\Omega} Q \left[\sum_{i,j=1}^3 a_{ij} \frac{\partial(u-U_h)}{\partial x_i} \frac{\partial w_h}{\partial x_j} + a_0(u-U_h)w_h \right] dx + \int_{\partial\Omega} Q \sigma(u-U_h)w_h d\Gamma + \int_{\Omega} w_h \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} \frac{\partial(u-U_h)}{\partial x_i} \frac{\partial Q}{\partial x_j} dx.$

Diese Terme sollen nun einzeln abgeschätzt werden.

(ii) Mit Hilfe von $\left| \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}(x) \xi_i \eta_j \right| \leq \lambda_{\max}^0 |\xi| |\eta|$, der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, der ε -Ungleichung, den Beziehungen $|Q| \leq 1$ in Ω und $Q=0$ in $\Omega \setminus \Omega_{\#}$ sowie Lemma 4.2.3. erhält man $\forall \varepsilon > 0 \forall \delta > 0$:

$$\left| \int_{\Omega} Q \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} \frac{\partial(u-U_h)}{\partial x_i} \frac{\partial w_h}{\partial x_j} dx \right| \leq C \int_{\Omega} Q |\nabla(u-U_h)| |\nabla w_h| dx \\ \leq C \left(\int_{\Omega} Q |\nabla(u-U_h)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} Q |\nabla w_h|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ \leq C \varepsilon^{-1} \int_{\Omega} Q |\nabla(u-U_h)|^2 dx + C \varepsilon \int_{\Omega} Q |\nabla w_h|^2 dx \\ \leq C \varepsilon^{-1} R^{2(\lambda-1-\delta)} h^2 \|f; L_2(\Omega)\|^2 + C \varepsilon \int_{\Omega} Q |\nabla w_h|^2 dx$$

(iii) Infolge der Beschränktheit von $a_0(x)$ gilt analog zu (ii)

$$\left| \int_{\Omega} Q a_0(u-U_h)w_h dx \right| \leq C \left| \int_{\Omega} Q(u-U_h)w_h dx \right| \leq C \left(\int_{\Omega} Q(u-U_h)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} Q w_h^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ \leq C \varepsilon^{-1} \int_{\Omega} Q(u-U_h)^2 dx + C \varepsilon \int_{\Omega} Q w_h^2 dx \leq C \varepsilon^{-1} R^{2(\lambda-1-\delta)} h^4 \|f; L_2(\Omega)\|^2 + C \varepsilon \int_{\Omega} Q w_h^2 dx.$$

(iv) Mit Hilfe der ε -Ungleichung ergibt sich

$$\left| \int_{\partial\Omega} Q \sigma(u-U_h)w_h d\Gamma \right| \leq C \varepsilon^{-1} \int_{\partial\Omega} Q \sigma(u-U_h)^2 d\Gamma + C \varepsilon \int_{\partial\Omega} Q \sigma w_h^2 d\Gamma.$$

Den ersten Term kann man mit Hilfe der Beschränktheit von σ , den Beziehungen $|Q| \leq 1$ in Ω und $Q=0$ in $\Omega \setminus \Omega_{\#}$, dem Spursatz 2.1.6. sowie Lemma 4.2.3. wie folgt weiter abschätzen:

$$\int_{\partial\Omega} Q \sigma(u-U_h)^2 d\Gamma \leq C \|u-U_h; L_2(\partial\Omega_{\#})\|^2 \leq C \|u-U_h; W^{1,2}(\Omega_{\#})\|^2 \\ \leq C R^{2(\lambda-1-\delta)} h^2 \|f; L_2(\Omega)\|^2$$

(v) Mit Hilfe von $\left| \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}(x) \xi_i \eta_j \right| \leq \lambda_{\max}^0 |\xi| |\eta|$, den Beziehungen $|\nabla Q| \leq C R^{-1}$ in Ω und $Q=0$ in $\Omega \setminus \Omega_{\#}$, der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und Lemma 4.2.3. erhält man $\forall \delta > 0$:

$$\left| \int_{\Omega} w_h \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} \frac{\partial(u-U_h)}{\partial x_i} \frac{\partial Q}{\partial x_j} dx \right| \leq C \int_{\Omega} |w_h| |\nabla(u-U_h)| |\nabla Q| dx \\ \leq C R^{-1} \int_{\Omega} |w_h| |\nabla(u-U_h)| dx \leq C R^{-1} \|w_h; L_2(\Omega)\| \|u-U_h; W^{1,2}(\Omega_{\#})\| \\ \leq C R^{\lambda-2-\delta} h^{1+2(\lambda-\delta)} \|f; L_2(\Omega)\|^2$$

(vi) Analog dem Nachweis der Elliptizität der Bilinearform zeigt man:

$$\int_{\Omega} Q(w_h^2 + |\nabla w_h|^2) dx \leq C \left\{ \int_{\Omega} Q \left[\sum_{i,j=1}^3 a_{ij} \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \frac{\partial w_h}{\partial x_j} + a_0 w_h^2 \right] dx + \int_{\partial\Omega} Q \mathcal{E} w_h^2 d\Gamma \right\}.$$

(vii) Durch Einsetzen von (ii) bis (v) in (i) folgt unter Ausnutzung von (vi) die Behauptung. ■

4.2.6. Lemma. Mit den Bezeichnungen aus 4.2.2. gilt:

$$\int_{\Omega} Q \left[\sum_{i,j=1}^3 a_{ij} \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \frac{\partial w_h}{\partial x_j} + a_0 w_h^2 \right] dx + \int_{\partial\Omega} Q \mathcal{E} w_h^2 d\Gamma \leq C(R) (h^2 + h^{4(\lambda-\varepsilon)}) \|f; L_2(\Omega)\|^2.$$

Beweis. (i) Wählt man in Lemma 4.2.5. z.B. $\varepsilon = (2C_0)^{-1}$ und setzt diese Ungleichung in die Gleichung aus Lemma 4.2.4. ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} Q \left[\sum_{i,j=1}^3 a_{ij} \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \frac{\partial w_h}{\partial x_j} + a_0 w_h^2 \right] dx + \int_{\partial\Omega} Q \mathcal{E} w_h^2 d\Gamma \\ & \leq 2a(w_h, Qw_h - \Pi_h(Qw_h)) + 2a(u - U_h, \Pi_h(Qw_h) - Qw_h) + \int_{\Omega} w_h^2 \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial Q}{\partial x_j} \right) dx + \\ & \quad + C(R^{2(\lambda-1-\delta)} h^2 + R^{\lambda-2-\delta} h^{1+2(\lambda-\delta)}) \|f; L_2(\Omega)\|^2. \end{aligned}$$

Die ersten drei Terme auf der rechten Seite werden nun weiter abgeschätzt.

(ii) In allen Tetraedern Δ gilt $Qw_h \in W^{2,2}(\Delta)$. Daher ergibt sich mit Hilfe der lokalen Interpolationsfehlerabschätzung 3.1.5.(iii), der Eigenschaften von Q und der Linearität von w_h die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} \|Qw_h - \Pi_h(Qw_h); W^{1,2}(\Delta)\| & \leq Ch |Qw_h; W^{2,2}(\Delta)| \\ & \leq Ch \|Q; W^{2,00}(\Delta)\| \|w_h; W^{2,2}(\Delta)\| \leq CR^{-2} h \|w_h; W^{1,2}(\Delta)\|. \end{aligned}$$

(An dieser Stelle ist wesentlich, daß die 2. Ableitungen der Funktionen aus V_h in jedem Tetraeder verschwinden. Deshalb lassen sich diese Abschätzungen nicht unmittelbar auf andere Elementtypen übertragen.) Durch Aufsummieren dieser Ungleichung über alle Tetraeder und Anwenden von Lemma 4.2.3. folgt:

$$\|Qw_h - \Pi_h(Qw_h); W^{1,2}(\Omega)\| \leq CR^{-2} h^{1+\lambda-\delta} \|f; L_2(\Omega)\|.$$

(iii) Aus der Beschränktheit der Bilinearform folgt mit (ii) und Lemma 4.2.3.

$$\begin{aligned} a(w_h, Qw_h - \Pi_h(Qw_h)) & \leq C \|w_h; W^{1,2}(\Omega)\| \|Qw_h - \Pi_h(Qw_h); W^{1,2}(\Omega)\| \\ & \leq CR^{-2} h^{1+2(\lambda-\delta)} \|f; L_2(\Omega)\|^2. \end{aligned}$$

(iv) Mit Hilfe der Beschränktheit der auf $\Omega_{\#}$ eingeschränkten Bilinearform ($Q=0$ in $\Omega \setminus \Omega_{\#}$) erhält man mit (ii) und Lemma 4.2.3.:

$$\begin{aligned} a(u-U_h, \Pi_h(Qw_h) - Qw_h) &\leq C \|u-U_h; W^{1,2}(\Omega_{\#})\| \|Qw_h - \Pi_h(Qw_h); W^{1,2}(\Omega)\| \\ &\leq CR^{\lambda-3-\delta} h^{2+\lambda-\delta} \|f; L_2(\Omega)\|^2. \end{aligned}$$

(v) Aus den Eigenschaften von Q und der Glattheit der Koeffizienten der Bilinearform ergibt sich mit Lemma 4.2.3.:

$$\int_{\Omega} w_h^2 \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial Q}{\partial x_j} \right) dx \leq CR^{-2} \|w_h; L_2(\Omega)\|^2 \leq CR^{-2} h^{4(\lambda-\delta)} \|f; L_2(\Omega)\|^2.$$

(vi) Setzt man (iii), (iv) und (v) in (i) ein, so erhält man:

$$\int_{\Omega} Q \left[\sum_{i,j=1}^3 a_{ij} \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \frac{\partial w_h}{\partial x_j} + a_0 w_h^2 \right] dx + \int_{\partial\Omega} Q \mathcal{E} w_h^2 d\Gamma \leq g(R, h) \|f; L_2(\Omega)\|^2$$

$$\text{mit } g(R, h) = R^{-2} h^{1+2(\lambda-\delta)} + R^{\lambda-3-\delta} h^{2+\lambda-\delta} + R^{-2} h^{4(\lambda-\delta)} + R^{2(\lambda-1-\delta)} h^2 + R^{\lambda-2-\delta} h^{1+2(\lambda-\delta)}$$

und damit die Behauptung. (Für $\lambda \geq \frac{1}{2}$ gilt $1+2(\lambda-\delta) \geq 2$ und für $\lambda \leq \frac{1}{2}$ ist $1+2(\lambda-\delta) \geq 4(\lambda-\delta)$ erfüllt.) ■

4.2.7. Satz. Mit den Bezeichnungen aus 4.2.2. folgt:

$$\|u-u_h; W^{1,2}(\Omega_-)\| \leq C(R) (h+h^{2(\lambda-\delta)}) \|f; L_2(\Omega)\|,$$

d.h., für $\lambda \geq \frac{1}{2}$ erhält man im Subgebiet Ω_- die maximal zu erwartende Konvergenzordnung Eins. Dabei ist $C(R) \sim R^{(\lambda-3-\delta)/2}$ und $\delta > 0$ beliebig reell.

Beweis. Es gilt mit Hilfe der Dreiecksungleichung

$$\|u-u_h; W^{1,2}(\Omega_-)\| \leq \|u-U_h; W^{1,2}(\Omega_-)\| + \|w_h; W^{1,2}(\Omega_-)\|.$$

Andererseits folgt aus den Eigenschaften von Q und der in 4.2.5.(vi) angegebenen Ungleichung:

$$\begin{aligned} \|w_h; W^{1,2}(\Omega_-)\|^2 &\leq \int_{\Omega} Q (w_h^2 + |\nabla w_h|^2) dx \\ &\leq C \left\{ \int_{\Omega} Q \left[\sum_{i,j=1}^3 a_{ij} \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \frac{\partial w_h}{\partial x_j} + a_0 w_h^2 \right] dx + \int_{\partial\Omega} Q \mathcal{E} w_h^2 d\Gamma \right\}. \end{aligned}$$

Setzt man diese Ungleichung in die obige ein, so folgt mit $\Omega_- \subset \Omega_{\#}$, 4.2.3. und 4.2.6. die Behauptung. ■

4.2.8. Bemerkung. Offenbar gilt

$$\|u-u_h; L_2(\Omega_-)\| \leq \|u-u_h; L_2(\Omega)\| \leq Ch^{2(\lambda-\delta)} \|f; L_2(\Omega)\|.$$

Die Vermutung, daß diese Konvergenzordnung nicht wesentlich verbessert werden kann, wird durch die Ergebnisse der durchgeführten Testrechnungen erhärtet. Gleiches ist für den Fall $\lambda < \frac{1}{2}$ in 4.2.7. zu vermuten.

4.3. Eine zweistufige Fenstertechnik

4.3.1. Grundideen. (i) Es wird vorgeschlagen, zunächst eine Finite-Elemente-Lösung bezüglich einer unverfeinerten Vernetzung von Ω zu bestimmen. Diese Lösung wird dann in einem zweiten Schritt in der Umgebung der Kante(n) mit Hilfe eines verfeinerten Netzes verbessert. Diese Vorgehensweise wird in 4.3.3. präzise dargelegt.

Man kann zeigen, daß die auf diese Weise konstruierte Näherungslösung in der $W^{1,2}(\Omega)$ -Norm mit der maximal zu erwartenden Konvergenzordnung Eins gegen die exakte Lösung konvergiert. (vgl. Satz 4.3.8.).

(ii) Vorteile. Der Vorteil bei diesem Vorgehen besteht vor allem in einem Zergliedern der Schwierigkeiten bei der Vernetzung. Im ersten Schritt kann man sich auf die Gebietserfassung konzentrieren, während im zweiten Schritt bequemer zu vernetzende Gebiete, die kantennahen Teilgebiete, mit einem verfeinerten Netz zu versehen sind. Beim Vorliegen mehrerer Kanten können diese getrennt behandelt werden.

Für den Fall, daß die Umgebungen dieser Kanten einander ähnlich sind, kann eine Vernetzung mehrfach verwendet werden. Sind die Umgebungen sogar kongruent, braucht bei Aufgaben mit konstanten Koeffizienten die Steifigkeitsmatrix nur einmal assembliert werden. Außerdem sind entstehende Parallelisierungsmöglichkeiten in Betracht zu ziehen.

Ein weiterer Vorteil besteht darin, daß bei praktischen Rechnungen die Anzahl der Unbekannten im ersten Schritt i.allg. kleiner als bei den in 4.1. beschriebenen Standard-Finite-Elemente-Methoden über verfeinerten Netzen ist. Die Größenordnung des Aufwandes verändert sich asymptotisch allerdings nicht.

(iii) Die Schwierigkeit beim Beweis der Fehlerabschätzung besteht darin, daß die Randbedingungen 1. Art auf dem neuen Rand Γ_0 nicht homogen sind. Deshalb ist das Lemma von Céa nicht unmittelbar anwendbar; man muß homogenisieren.

Hier tritt eine weitere Schwierigkeit auf: Die Näherungslösung erfüllt auf Γ_0 andere Randbedingungen als die exakte Lösung. Zum Homogenisieren müssen folglich verschiedene Funktionen verwendet und zusätzlich deren Abstand abgeschätzt werden.

(iv) Der Beweis wird wie in 4.2. am Beispiel des Kantenproblems mit natürlichen Randbedingungen geführt (vgl. 1.4.7. bis 1.4.10.). Einen Beweis für den zweidimensionalen Fall findet man wiederum in der Monographie von Оганесян und Руховец [1979, §6.6].

Aus dem einführenden Lemma 4.3.4., dessen Beweis Ähnlichkeit mit dem des Lemmas von Ceá hat, vgl. z.B. [Ciarlet 1978, 2.4.], wird sofort ersichtlich, welche weiteren Terme abzuschätzen sind (Lemmata 4.3.5. und 4.3.6.), um zur gewünschten Konvergenzaussage (Satz 4.3.7.) zu gelangen.

4.3.2. Bezeichnungen. (i) **Gebiete.** Es sei wie üblich Ω das Gebiet mit den in 1.4.4. beschriebenen Eigenschaften und $\Omega^h \supset \Omega$ das durch die Vernetzung \mathcal{T}_h in ersten Schritt des Verfahrens entstehende approximierende Gebiet.

Es bezeichnen weiter $K(\varrho) := \{x \in \mathbb{R}^3 : \text{dist}(x, M) < \varrho\}$ die Kantenumgebung mit einem Radius ϱ , Ω_K^h die Vereinigung aller Tetraeder aus Ω^h , die einen nichtleeren Durchschnitt mit $K(2R)$ haben, $\Omega_M := \Omega_K^h \cap \Omega$ das im zweiten Schritt des Verfahrens betrachtete Gebiet und $\partial\Omega_M = \Gamma_M \cup \Gamma_0$ dessen Rand. Dabei seien $\Gamma_M := \partial\Omega_M \cap \partial\Omega$ und $\Gamma_0 := \partial\Omega_M \setminus \partial\Omega = \partial\Omega_M \setminus \Gamma_M$. ($R > 0$ ist eine von h unabhängige reelle Zahl, ein Parameter.)

Die Vereinigung aller Tetraeder der Vernetzung \mathcal{T}_h^M von Ω_M (vgl. 4.3.3.(ii)) wird mit Ω_M^h bezeichnet. Man beachte, daß zwar $\Omega_M \subset \Omega_M^h$ ist, aber Γ_0 Teil des Randes sowohl von Ω_M als auch von Ω_M^h ist.

(ii) **Räume.** Es seien u die Lösung des Problems 1.4.8. und u_h die zugehörige FEM-Lösung (vgl. 1.4.10.). Nach der Vernetzung \mathcal{T}_h^M im zweiten Schritt des Verfahrens (vgl. 4.3.3.(ii)) wird zunächst der zugehörige Raum V_h^M konstruiert. Er besteht analog zu 3.2.6. aus allen über Ω_M^h stetigen Funktionen, deren Einschränkung auf ein beliebiges Tetraeder $\Delta \in \mathcal{T}_h^M$ eine (affin) lineare Funktion ist.

Nun können weitere vier Räume (bzw. Mannigfaltigkeiten) definiert werden:

$$\begin{aligned} V_0^M &:= \{v \in W^{1,2}(\Omega_M) : v|_{\Gamma_0} = 0\}, & V_*^M &:= \{v \in W^{1,2}(\Omega_M) : v|_{\Gamma_0} = u\}, \\ V_{0h}^M &:= \{v_h \in V_h^M : v_h|_{\Gamma_0} = 0\} & \text{und} & \quad V_{*h}^M := \{v_h \in V_h^M : v_h|_{\Gamma_0} = u_h\}. \end{aligned}$$

(Diese Definition von V_{*h}^M ist möglich, da in der Umgebung von Γ_0 die Vernetzungen \mathcal{T}_h und \mathcal{T}_h^M übereinstimmen.)

Offenbar gilt $V_{0h}^M \subset V_0^M$, aber es gilt i.allg. nicht $V_{*h}^M \subset V_*^M$.

(iii) **Lösungsfunktionen.** Zunächst werden die Linear- und die Bilinearform aus 1.4.7. auf Ω_M eingeschränkt:

$$\begin{aligned} (f, v)_M &:= \int_{\Omega_M} f v \, dx, \\ a_M(v, w) &:= \int_{\Omega_M} \left(\sum_{i,j=1}^3 a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} + a_0 v w \right) dx + \int_{\Gamma_M} \sigma v w \, d\Gamma. \end{aligned}$$

Die Einschränkung der "globalen" Lösung u auf Ω_M werde wieder mit u bezeichnet. Es gilt $u \in V_*^M$ und

$$a_M(u, v) = (f, v)_M \quad \forall v \in V_0^M.$$

Mit u_h^M wird die Lösung des folgenden Finite-Elemente-Problems bezeichnet: Gesucht ist

$$u_h^M \in V_{*h}^M: a_M(u_h^M, v_h) = (f, v_h)_M \quad \forall v_h \in V_{0h}^M.$$

(iv) Hilfsfunktionen. Es bezeichne $\Xi(\cdot)$ eine über Ω definierte, glatte Funktion, für die gilt:

$$\Xi(x) = 0, \text{ wenn } r(x) < 1.2R \text{ und } \Xi(x) = 1, \text{ wenn } r(x) > 1.8R.$$

Weiterhin gelte

$$\|\Xi; L_\infty(\Omega)\| \leq C, \quad \|\Xi; W^{1,\infty}(\Omega)\| \leq CR^{-1} \quad \text{und} \quad \|\Xi; W^{2,\infty}(\Omega)\| \leq CR^{-2}.$$

Mit dieser Abschneidefunktion werden u und u_h^M homogenisiert, indem $W := u - \Xi u \in V_0^M$ und $w_h := u_h^M - \Pi_h^M(\Xi u_h^M) \in V_{0h}^M$ gesetzt werden. Dabei ist Π_h^M der analog zu 3.2.7. definierte Interpolationsoperator bezüglich der Vernetzung \mathcal{T}_h^M .

Unter der Beachtung, daß $W = (1 - \Xi)u$ eine Funktion mit den gleichen Eigenschaften wie u ist (vgl. 1.4.8.), sei

$$W_h := \Pi_h^M[(1 - \Xi)u] + \Pi_h^M[(1 - \Xi)w] \in V_{0h}^M$$

eine analog zu U_h in Satz 3.3.6. definierte Funktion. Folglich gilt:

$$\|W - W_h; W^{1,2}(\Omega)\| \leq Ch \|f; L_2(\Omega)\|.$$

(Es ist $\mu < \lambda$ für \mathcal{T}_h^M vorausgesetzt.)

4.3.3. Beschreibung des Algorithmus. (i) Zunächst wird über einer nicht verfeinerten Vernetzung \mathcal{T}_h von Ω (vgl. 3.2. mit $\mu=1$) die Finite-Elemente-Lösung u_h bestimmt (vgl. 1.4.10.).

(ii) Über Ω_M wird ein verfeinertes Netz konstruiert (vgl. 3.2. mit $\mu < \lambda$ und $b=R$), das außerhalb einer Umgebung $K(R)$ der Kante mit der Vernetzung von Ω übereinstimmt und die Bedingung $\Omega_M \subset \Omega_M^h \subset \Omega_K^h$ erfüllt. Weiterhin wird die Funktion u_h^M als FEM-Lösung über Ω_M bestimmt (vgl. 4.3.2.(iii)).

(iii) Es wird $\underline{u}_h := \begin{cases} u_h & \text{in } \Omega \setminus \Omega_M \\ u_h^M & \text{in } \Omega_M \end{cases}$ gesetzt.

4.3.4. Lemma. Mit den Bezeichnungen aus 4.3.2. gilt:

$$\|u - \underline{u}_h^M; W^{1,2}(\Omega_M)\| \leq C (\|W - W_h; W^{1,2}(\Omega_M)\| + \|\Xi u - \Xi u_h; W^{1,2}(\Omega_M)\| + \|\Xi u_h - \Pi_h^M(\Xi u_h); W^{1,2}(\Omega_M)\|).$$

Beweis. (i) Aus $a_M(u, v_h) = (f, v_h)_M$ und $a_M(u_h^M, v_h) = (f, v_h)_M \quad \forall v_h \in V_{0h}^M$ folgt $a_M(u, v_h) = a_M(u_h^M, v_h) \quad \forall v_h \in V_{0h}^M$. Entsprechend der Definition von W und w_h folgt daraus unter Ausnutzung der Bilinearität:

$$a_M(W + \Xi u, v_h) = a_M(w_h + \Pi_h^M(\Xi u_h), v_h) \quad \forall v_h \in V_{0h}^M$$

bzw. $a_M(W_h - w_h, v_h) = a_M(W_h - W, v_h) + a_M(\Pi_h^M(\Xi u_h) - \Xi u, v_h) \quad \forall v_h \in V_{0h}^M$.

(ii) Man kann nun unter Beachtung, daß $W_h - w_h \in V_{0h}^M \subset V_0^M$ gilt, ausnutzen, daß die Bilinearform V_0^M -elliptisch und beschränkt ist. Mit $v_h = W_h - w_h$ kann man die linke Seite der in (i) erhaltenen Gleichung nach unten und die rechte Seite nach oben abschätzen. Nach Division durch $\|W_h - w_h; W^{1,2}(\Omega_M)\|$ erhält man die folgende Ungleichung:

$$\|W_h - w_h; W^{1,2}(\Omega_M)\| \leq C (\|W_h - W; W^{1,2}(\Omega_M)\| + \|\Pi_h^M(\Xi u_h) - \Xi u; W^{1,2}(\Omega_M)\|)$$

(iii) Mit Hilfe dieser Beziehung ergibt sich die Behauptung durch mehrfaches Anwenden der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} \|u - u_h^M; W^{1,2}(\Omega_M)\| &\leq \|(u - \Xi u) - (u_h^M - \Pi_h^M(\Xi u_h)); W^{1,2}(\Omega_M)\| + \|\Xi u - \Pi_h^M(\Xi u_h); W^{1,2}(\Omega_M)\| \\ &\leq \|W - W_h; W^{1,2}(\Omega_M)\| + \|W_h - w_h; W^{1,2}(\Omega_M)\| + \|\Xi u - \Pi_h^M(\Xi u_h); W^{1,2}(\Omega_M)\| \\ &\leq C (\|W - W_h; W^{1,2}(\Omega_M)\| + \|\Xi u - \Pi_h^M(\Xi u_h); W^{1,2}(\Omega_M)\|) \\ &\leq C (\|W - W_h; W^{1,2}(\Omega_M)\| + \|\Xi u - \Xi u_h; W^{1,2}(\Omega_M)\| + \|\Xi u_h - \Pi_h^M(\Xi u_h); W^{1,2}(\Omega_M)\|) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

4.3.5. Lemma. Unter der Voraussetzung $\lambda > \frac{1}{2}$ gilt für beliebiges $\delta > 0$:

$$\|\Xi u - \Xi u_h; W^{1,2}(\Omega_M)\| \leq CR^{\frac{1}{2}(\lambda - 5 - \delta)} h \|f; L_2(\Omega)\|.$$

Beweis. Die Behauptung ist eine unmittelbare Folgerung aus der Definition von Ξ und Satz 4.2.7., denn in $K(R)$ ist $\Xi = 0$:

$$\begin{aligned} \|\Xi(u - u_h); W^{1,2}(\Omega_M)\| &\leq \|\Xi; W^{1,00}(\Omega)\| \|u - u_h; W^{1,2}(\Omega \setminus K(R))\| \\ &\leq CR^{-1} \cdot CR^{\frac{1}{2}(\lambda - 3 - \delta)} h \|f; L_2(\Omega)\|. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

4.3.6. Lemma. Für hinreichend kleines h gilt:

$$\|\Xi u_h - \Pi_h^M(\Xi u_h); W^{1,2}(\Omega_M)\| \leq CR^{-2} h \|f; L_2(\Omega)\|.$$

Beweis. (i) Es werde zunächst bemerkt, daß $\Xi u_h = 0$ in $K(1.2R)$ und somit für hinreichend kleines h auch $\Pi_h^M(\Xi u_h) = 0$ in $K(1.1R)$ erfüllt ist. Mit Hilfe der lokalen Interpolationsfehlerabschätzung 3.1.5.(iii) erhält man folglich:

$$\begin{aligned} \|\Xi u_h - \Pi_h^M(\Xi u_h); W^{1,2}(\Omega_M)\|^2 &= \|\Xi u_h - \Pi_h^M(\Xi u_h); W^{1,2}(\Omega_M \setminus K(1.1R))\|^2 \\ &\leq \Delta c \Omega_h^M \sum_{K(R)} \|\Xi u_h - \Pi_h^M(\Xi u_h); W^{1,2}(\Delta)\|^2 \\ &\leq Ch^2 \sum_{\Delta \subset \Omega_h^M \setminus K(R)} |\Xi u_h; W^{2,2}(\Delta)|^2 \end{aligned}$$

Man nutzt dabei aus, daß Ξu_h in jedem Tetraeder glatt ist.

(ii) Durch Anwenden der Produktregel, Herausziehen der Beträge der Ableitungen von Ξ mit dem Maximum und Ausnutzen der (affinen) Linearität von u_h erhält man in jedem Tetraeder $\Delta \subset \Omega_h^M \setminus K(R)$ (Außerhalb von $K(R)$ stimmen \mathcal{T}_h und \mathcal{T}_h^M überein!):

$$|\Xi u_h; W^{2,2}(\Delta)| \leq C \|\Xi; W^{2,0}(\Delta)\| \|u_h; W^{2,2}(\Delta)\| \leq CR^{-2} \|u_h; W^{1,2}(\Delta)\|,$$

so daß mit (i) folgt:

$$\|\Xi u_h - \Pi_h^M(\Xi u_h); W^{1,2}(\Omega_M)\| \leq CR^{-2} h \|u_h; W^{1,2}(\Omega_h^M)\|.$$

(iii) Es bleibt noch $\|u_h; W^{1,2}(\Omega_h^M)\|$ abzuschätzen. Zunächst soll gezeigt werden, daß $\|u_h; W^{1,2}(\Omega_h^M)\| \leq C \|u_h; W^{1,2}(\Omega_M)\|$ gilt. Der Fortsetzungssatz kann hier nicht angewendet werden, da u_h nicht fortgesetzt wurde, sondern a-priori über Ω^h definiert ist. Man muß die Abschätzung in Randstreifen 2.6.2. nutzen. Da $\Omega_M^h \setminus \Omega^h$ ein Streifen mit einer maximalen Breite ist, die sich mit Ch^2 nach oben abschätzen läßt (vgl. 3.2.3.(ii)), gilt:

$$\begin{aligned} \|u_h; W^{1,2}(\Omega_M^h)\|^2 &\leq \|u_h; W^{1,2}(\Omega_K^h)\|^2 \\ &\leq \|u_h; W^{1,2}(\Omega_M)\|^2 + \sum_{\Delta \in \mathcal{T}_h: \Delta \cap (\Omega_K^h \setminus \Omega_M) \neq \emptyset} \|u_h; W^{1,2}(\Delta \setminus \Omega_M)\|^2 \\ &\leq \|u_h; W^{1,2}(\Omega_M)\|^2 + Ch^4 \sum_{\Delta \in \mathcal{T}_h: \Delta \cap (\Omega_K^h \setminus \Omega_M) \neq \emptyset} \|u_h; W^{2,2}(\Delta)\|^2 \\ &\leq \|u_h; W^{1,2}(\Omega_M)\|^2 + Ch^4 \|u_h; W^{1,2}(\Omega_K^h)\|^2 \end{aligned}$$

Daraus erhält man für hinreichend kleines h ($h^4 < (2C)^{-1}$):

$$\|u_h; W^{1,2}(\Omega_K^h)\| \leq \sqrt{2} \|u_h; W^{1,2}(\Omega_M)\|$$

$$\text{und weiter} \quad \|u_h; W^{1,2}(\Omega_M^h)\| \leq \sqrt{2} \|u_h; W^{1,2}(\Omega_M)\|. \quad \square$$

(iv) Mit Hilfe der Dreiecksungleichung, der Abschätzung in Satz 3.3.6. und der Ungleichung $\|u; W^{1,2}(\Omega)\| \leq C \|f; L_2(\Omega)\|$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \|u_h; W^{1,2}(\Omega)\| &\leq \|u - u_h; W^{1,2}(\Omega)\| + \|u; W^{1,2}(\Omega)\| \\ &\leq C(h^{\lambda-\epsilon} + 1) \|f; L_2(\Omega)\| \leq C \|f; L_2(\Omega)\|. \end{aligned}$$

Somit folgt aus (ii), (iii) und (iv) die Behauptung. \blacksquare

4.3.7. Satz. Für die Lösung u_h^M des zweiten Schritts in Algorithmus 4.3.3. bzw. für die Gesamtlösung \underline{u}_h (vgl. 4.3.3.(iii)) gilt:

$$\|u - u_h^M; W^{1,2}(\Omega_M)\| \leq Ch \|f; L_2(\Omega)\|$$

$$\text{und} \quad \|u - \underline{u}_h; W^{1,2}(\Omega)\| \leq Ch \|f; L_2(\Omega)\|.$$

Dabei ist $C = C(R) \sim R^{\frac{1}{2}(\lambda-5-\delta)}$ ($\delta > 0$ beliebig reell).

Beweis. Die erste Ungleichung folgt sofort aus Lemma 4.3.4. mit Hilfe von 4.3.2.(iv), 4.3.5. und 4.3.6. Daraus erhält man mit Satz 4.2.7. die zweite Ungleichung. \blacksquare

4.4. Bemerkungen und Ergänzungen

4.4.1. Konditionszahl der Steifigkeitsmatrix. (i) Wie in 1.3.3.(iv) bemerkt und in der Monographie von Оганесян und Руховец [1979, §6.4] für den zweidimensionalen Fall gezeigt wurde, verschlechtert sich die Kondition der Steifigkeitsmatrix bei verfeinerten Netzen im Vergleich zu unverfeinerten Netzen asymptotisch nicht. Darin besteht einer der Vorteile der Netzverfeinerung gegenüber der Singulärfunktionenmethode (vgl. 1.3.2.).

Im folgenden soll am Beispiel der Aufgaben mit Kantensingularitäten gezeigt werden, daß diese Eigenschaft auch im dreidimensionalen Fall erhalten bleibt.

(ii) Satz. Die Konditionszahl der zu Problem 1.4.10. (1.4.6.) gehörigen Steifigkeitsmatrix liegt in der Größenordnung h^{-2} , falls $\mu > \frac{1}{3}$. (Der Netzgraduierungsparameter μ wurde in 3.2.2. eingeführt.)

Beweis. (a) Sei $\{\phi_i(x)\}_{i=1}^k$ die in 3.2.6. eingeführte Basis in V_h bzw. V_{0h} , $v_h(x) = \sum_{i=1}^k v_i \phi_i(x) \in V_h$ (bzw. V_{0h}) eine beliebige Funktion und $v = (v_1, \dots, v_k)$ die zugehörige Gitterfunktion (Vektor der Werte von v_h in den Knoten). Seien weiterhin \mathcal{A} die Steifigkeitsmatrix und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Skalarprodukt im Raum \mathbb{R}^k . Dann gilt offenbar $a(v_h, v_h) = \langle \mathcal{A}v, v \rangle$.

(Man beachte, daß bei der Aufgabe mit natürlichen Randbedingungen zwar i.allg. $\Omega^h \setminus \Omega \neq \emptyset$ ist, aber entsprechend der Aufgabenstellung 1.4.10. davon ausgegangen werden soll, daß die Integrale bei der Aufstellung der Steifigkeitsmatrix bei Elementen Δ , die zum Teil außerhalb von Ω liegen, nur über $\Delta \cap \Omega$ ausgewertet werden. Man beachte weiter, daß infolge der Eigenschaft 3.2.3.(ii) der Vernetzung $\text{mes}(\Delta \cap \Omega)$ in der Größenordnung von h_Δ^3 liegt (h_Δ bezeichne den Durchmesser des Elements Δ).)

Folglich gilt aufgrund der Beschränktheit der Bilinearform für den maximalen Eigenwert λ_+ der Steifigkeitsmatrix

$$\lambda_+ = \max_{v \in \mathbb{R}^k} \frac{\langle \mathcal{A}v, v \rangle}{\langle v, v \rangle} = \max_{v \in \mathbb{R}^k} \frac{a(v_h, v_h)}{\langle v, v \rangle} \leq C \max_{v \in \mathbb{R}^k} \frac{\|v_h; W^{1,2}(\Omega)\|^2}{\langle v, v \rangle}$$

und analog für den minimalen Eigenwert λ_- aufgrund der V - (bzw. V_0 -)Elliptizität

$$\lambda_- \geq C \min_{v \in \mathbb{R}^k} \frac{\|v_h; W^{1,2}(\Omega)\|^2}{\langle v, v \rangle}.$$

(b) Es gilt für eine beliebige Funktion $v_h \in V_h$ (bzw. V_{0h}) infolge der inversen Ungleichung 3.2.8.

$$\|v_h; W^{1,2}(\Omega)\|^2 \leq \|v_h; W^{1,2}(\Omega^h)\|^2 = \sum_{\Delta \in \mathcal{T}_h} \sum_{\Omega^h} \|v_h; W^{1,2}(\Delta)\|^2 \leq C \sum_{\Delta \in \mathcal{T}_h} h_{\Delta}^{-2} \|v_h; L_2(\Delta)\|^2.$$

(c) Durch Transformation auf das Einheitsselement $\hat{\Delta}$ erhält man

$$\|v_h; L_2(\Delta)\|^2 = \text{mes}\Delta \|v_h; L_2(\hat{\Delta})\|^2 \leq \text{mes}\Delta \mu_+ \sum_{i \in I_{\Delta}} v_i^2,$$

wobei $\mu_+ = \mu_+(\hat{\Delta})$ der größte Eigenwert der Massematrix von $\hat{\Delta}$ und $I_{\Delta} \subset \{1..k\}$ die Menge der Nummern der vier Knoten von Δ sind.

Es gilt analog $\|v_h; L_2(\Delta)\|^2 \geq \text{mes}\Delta \mu_- \sum_{i \in I_{\Delta}} v_i^2$, wobei $\mu_- = \mu_-(\hat{\Delta})$ der kleinste Eigenwert der Massematrix von $\hat{\Delta}$ ist.

(d) Aus (b) und (c) folgt wegen $h_{\Delta} \leq Ch$ und der Tatsache, daß die maximale Anzahl von Elementen, die einen gemeinsamen Knoten besitzen, von h unabhängig ist:

$$\|v_h; W^{1,2}(\Omega)\|^2 \leq Ch \sum_{\Delta \in \mathcal{T}_h} \sum_{i \in I_{\Delta}} v_i^2 \leq Ch \langle v, v \rangle.$$

Unter Beachtung von (a) gilt also für den größten Eigenwert λ_+ der Steifigkeitsmatrix: $\lambda_+ \leq Ch$.

(e) Mit Hilfe der Einbettung $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow W_{1-\delta}^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow W_{-\delta}^{0,2}(\Omega)$ für $\delta \in [0,1)$ (vgl. 2.1.3.(iv)) erhält man mit $\delta = \frac{3}{2}(1-\mu)$:

$$\|v_h; W^{1,2}(\Omega)\|^2 \geq C \|r^{-\frac{3}{2}(1-\mu)} v_h; L_2(\Omega)\|^2 \geq C \sum_{\Delta \in \mathcal{T}_h} r_{\Delta}^{-3(1-\mu)} \|v_h; L_2(\Delta \cap \Omega)\|^2.$$

Dabei ist $r_{\Delta} := \max_{x \in \Delta} r(x)$ definiert.

(f) Sei $\Delta \setminus \Omega \neq \emptyset$. Dann ergibt sich mit (c)

$$\|v_h; L_2(\Delta \cap \Omega)\|^2 = \|v_h; L_2(\Delta)\|^2 - \|v_h; L_2(\Delta \setminus \Omega)\|^2 \geq C \text{mes}\Delta \sum_{i \in I_{\Delta}} v_i^2 - \|v_h; L_2(\Delta \setminus \Omega)\|^2.$$

Da v_h in Δ (affin) linear ist, gilt $v_h^2(x) \leq \sum_{i \in I_{\Delta}} v_i^2 \quad \forall x \in \Delta$ und folglich

$$\|v_h; L_2(\Delta \setminus \Omega)\|^2 \leq \text{mes}(\Delta \setminus \Omega) \sum_{i \in I_{\Delta}} v_i^2 \leq Ch_{\Delta}^4 \sum_{i \in I_{\Delta}} v_i^2,$$

da infolge 3.2.3.(ii) $\text{mes}(\Delta \setminus \Omega) \leq Ch_{\Delta}^4$ ist. Für hinreichend kleines h gilt also:

$$\|v_h; L_2(\Delta \cap \Omega)\|^2 \geq Ch_{\Delta}^3 \sum_{i \in I_{\Delta}} v_i^2.$$

(g) Mit Hilfe von $h_{\Delta} \geq Ch r_{\Delta}^{1-\mu}$ (vgl. 3.2.2.(ii)) folgt aus (c),

(e) und (f) analog zu (d) $\|v_h; W^{1,2}(\Omega)\|^2 \geq Ch^3 \langle v, v \rangle$ und unter Beachtung von (a) $\lambda_- \geq Ch^3$.

(h) Da die Konditionszahl der Steifigkeitsmatrix gleich dem Verhältnis aus größtem und kleinstem Eigenwert ist, ergibt sich aus (d) und (g) die Behauptung. ■

4.4.2. Andere Gebietsklassen. Die Abschätzungen des Finite-Elemente-Fehlers erfolgten in 4.1. anhand der Probleme aus 1.4., behalten jedoch ihre Gültigkeit beim Übergang zu Aufgaben über allgemeineren Gebietsklassen, wenn für diese eine Interpolationsfehlerabschätzung vorliegt. Dieses Thema wurde in 3.6. diskutiert.

4.4.3. Wahl des Netzsteuerparameters. (i) Die für Kantenprobleme in 4.1. bewiesenen Abschätzungen des Finite-Elemente-Fehlers besitzen eine gemeinsame Eigenschaft: Betrachtet man die Konvergenzordnung als Funktion des Netzsteuerparameters μ , so erhöht sich die Konvergenzordnung bei kleiner werdendem μ , bis eine Größe μ_0 erreicht ist, ab der eine weitere Verkleinerung ohne Einfluß bleibt. Eine ähnliche Aussage kann man für das Problem im Polyedergebiet treffen. Folglich entsteht die Frage nach der konkreten Wahl dieses Parameters.

(ii) In einer Arbeit von Fritzsche und Oswald [1987] wird für die Funktion $g(x)=[r(x)]^\lambda$ der Interpolationsfehler in verschiedenen Normen abgeschätzt und ein Parameter $\mu_* < \mu_0$ angegeben, bei dem eine asymptotische Fehlergleichverteilung über alle Elemente der Vernetzung erreicht wird:

$$\mu_* = \begin{cases} \lambda/2 & \text{bei Betrachtung der } W^{1,2}(\Omega)\text{-Norm} \\ (\lambda+1)/3 & \text{bei Betrachtung der } L_2(\Omega)\text{-Norm} \end{cases}$$

Inwiefern sich diese Fehlergleichverteilung auf den Finite-Elemente-Fehler überträgt und ob sie auch für die Lösungen der betrachteten Randwertaufgaben (deren Struktur komplizierter ist, vgl. 1.4.8.(ii)) gültig bleibt, wurde nicht untersucht.

(iii) Die Ergebnisse der numerischen Tests (vgl. 5.4.) zeigen, daß der Fehler für $\mu < \mu_0$ zunächst immer kleiner wird und schließlich wieder ansteigt. Es lohnt sich also, stärker als unbedingt für die optimale Konvergenzordnung nötig zu verfeinern. Für konkrete Empfehlungen sollten jedoch zunächst weitere Tests durchgeführt werden.

4.4.4. Mehrstufige Fenstertechniken. (i) Grundgedanke. Die in 4.3. beschriebene Idee einer zweistufigen Fenstertechnik läßt sich in folgender Weise auf mehrere Schritte erweitern:

Zunächst betrachte man die Randwertaufgabe über dem Gesamtgebiet und in weiteren Schritten in kleiner werdenden, einander enthaltenden Kantenumgebungen (Fenster). Man löse in jedem Schritt Randwertaufgaben über nicht graduierten Netzen mit jeweils geringerer Schrittweite und benutzt dabei die Lösung aus dem vorhergehenden Schritt, um die benötigten Randdaten zu generieren.

Derartige Algorithmen werden in der Praxis seit den 60er Jahren genutzt [Carey/Oden 1983, 2.5.3.]. Von Guerra und Becker [1978] wurde dieser Zugang präzisiert, indem die Residuen $Au_h - f$ (A ist der Differentialoperator der Randwertaufgabe) in jedem Teilgebiet genutzt werden, um die Größe des folgenden Subgebiets und die Schrittweite zu wählen.

(ii) Konvergenz dieses Verfahrens. In der genannten Arbeit von Guerra und Becker [1978] wird der Finite-Elemente-Fehler abgeschätzt; es gelingt jedoch nicht, die Konvergenz mit einer bestimmten Ordnung zu beweisen.

Man sollte nun dieses Verfahren mit Hilfe der in 4.2. und 4.3. dargelegten Beweistechniken und mit dem Ziel der Konvergenzabschätzung und der Angabe einer a-priori-Steuerung der Fenstergrößen und Schrittweiten unter Ausnutzung der Kenntnis der Singularität erneut untersuchen.

5. Numerische Experimente

5.1. Vorbemerkungen

5.1.1. Die Bedeutung der Fehleranalyse, wie sie in den Kapiteln 3. und 4. durchgeführt wurde, hängt natürlich davon ab, ob die betrachtete Methode die vorhergesagte asymptotische Ordnung auch bei praktischen Rechnungen mit vertretbarem Aufwand erreicht. Deshalb sollen die theoretischen Resultate durch aussagekräftige numerische Tests untermauert werden.

5.1.2. Zu diesen Tests benötigt man ein Finite-Elemente-Programm. Zu Beginn dahingehender Überlegungen war für dreidimensionale Rechnungen nur das an der TU Magdeburg entwickelte COSAR [1984] verfügbar. Wegen der für numerische Experimente sehr schlechten Handhabbarkeit und der langen Rechenzeiten, die in der Universalität und der fast 20 Jahre alten Konzeption begründet sind, erschien dieses gewaltige Programmsystem aber als ungeeignet. Da gleichzeitig Praxispartner der Sektion Mathematik der TU Chemnitz den Wunsch nach schnellen FEM-Spezialprogrammen äußerten, wurde die Entwicklung des Programmsystems FEMPS3D in Angriff genommen. Eine Programmbeschreibung findet man in Anlage 1.

5.1.3. Es ist günstig, wenn Testaufgaben aus der Literatur benutzt werden können. Dadurch sind Vergleiche mit anderen Autoren möglich.

Derartige Studien konnten aber leider für die in dieser Arbeit beschriebenen Kantenprobleme nicht gefunden werden. Von den Autoren, die sich mit der Numerik dreidimensionaler Probleme beschäftigen und Tests durchgeführt haben, beschränkt sich Beagles [1985] auf die numerische Bestimmung der Eigenwerte des Laplace-Beltrami-Operators. Dorr [1986] untersucht zwar das Konvergenzverhalten der p-Methode (vgl. 1.3.4.(iii)) auch für Polyeder, testet jedoch nur in Polygonegebieten. Von Petersdorff [1989] führt Testrechnungen für die Gleichungen der Elastizitätstheorie durch.

5.2. Aufstellen von Testaufgaben

5.2.1. Es liegt der Versuch nahe, die Aufgabe 1.4.1. als Testaufgabe zu nutzen. Die Schwierigkeit besteht aber nun darin, eine rechte Seite f zu konstruieren, die in $L_2(\Omega)$ enthalten ist, aber keine wesentlich besseren Eigenschaften aufweist. Sonst wäre es leicht möglich, daß die Lösung u viel günstigere (in einem noch zu definierenden Sinne) Eigenschaften besitzt, als sie bei der Herleitung der Fehlerabschätzungen vorausgesetzt wurden. Außerdem ist es zur Auswertung der FEM-Rechnungen vorteilhaft, wenn die exakte Lösung bekannt ist.

Besser ist es also, zunächst die Lösung u so zu konstruieren, daß sie die gewünschten Eigenschaften hat, und dann die rechte Seite durch Anwendung des Differentialoperators zu berechnen.

5.2.2. Forderungen. Ausgehend von der Lösungsdarstellung 1.4.2. soll gelten:

$$u = C r^\lambda \Phi(\varphi) \chi(x)$$

Da bei der Herleitung der Fehlerordnung die Gewichte der Räume von besonderer Bedeutung waren, werden folgende Forderungen gestellt:

$$\chi \in W_\lambda^{2,2}(\Omega), \text{ aber } \chi \notin W_\alpha^{2,2}(\Omega) \text{ für } \alpha < \lambda$$

$$u \notin W^{2,2}(\Omega), \text{ aber } f = -\Delta u \in L_2(\Omega)$$

$$C, \text{ so daß } \|u\|_{L_\infty(\Omega)} \in (1,2)$$

Die letzte Bedingung ist günstig, um Unter- oder Überläufe bei der rechentechnischen Realisierung zu vermeiden.

5.2.3. Das Gebiet. Um der Aufgabenstellung in 1.4. zu entsprechen, müßte das Gebiet Ω eine geschlossene Kante besitzen. Von dieser Idee wurde aber Abstand genommen, da die Konstruktion einer Funktion u mit den Eigenschaften 5.2.2. schon auf einen relativ komplizierten Ausdruck geführt hat, wenn die Kante mit einer Koordinatenachse zusammenfällt (vgl. 5.2.5.). Die Umrechnung dieser Funktion auf den Fall einer gekrümmten Kante, die Anwendung des Laplace-Operators auf die erhaltene Funktion und die Programmierung der beiden Ausdrücke hätte eine hohe Fehlerwahrscheinlichkeit und eine größere Anzahl von Operationen zur Berechnung von Funktionswerten zur Folge gehabt.

Deshalb wurde als Gebiet ein Dreiviertel eines Kreiszyklinders ausgewählt:

$$\Omega = \{(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < r < 1, 0 < \varphi < \frac{3}{2}\pi, 0 < z < 1\}$$

Hierfür lassen sich auch die Netzgradierungsstrategien einfacher rechentechnisch realisieren. Eine Testaufgabe über diesem Gebiet mit einer Lösung u mit den Eigenschaften 5.2.2. entspricht der Aufgabenstellung 1.4.4. bzw. 1.4.8. (vgl. 3.6.1.). Das Gebiet hat nur den "Nachteil", daß es in der Umgebung der Kante exakt vernetzbar ist und damit die Abschätzungen im Randstreifen nicht bestätigt werden können.

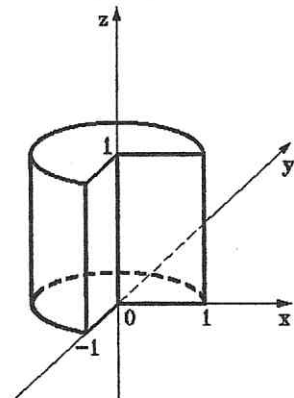


Abb. 5.1.

5.2.4. Randbedingungen (RB). Über dem in 5.2.3. beschriebenen Gebiet soll die Poisson-Gleichung mit

- (a) homogenen RB 1.Art an den Flächen $\varphi=0$ und $\varphi=\frac{3}{2}\pi$
- (b) homogenen RB 2.Art an den Flächen $\varphi=0$ und $\varphi=\frac{3}{2}\pi$
- (c) gemischten RB, d.h., 1.Art bei $\varphi=0$ und 2.Art bei $\varphi=\frac{3}{2}\pi$

gelöst werden.

Bei $r=1$ wurden in allen 3 Fällen Dirichlet-Bedingungen gewählt, da über den unexakt erfaßten Rand nicht integriert werden sollte. Hingegen wurden bei $z=0$ und $z=1$ Neumann-Bedingungen gestellt, damit die Anzahl der Knoten, in denen Funktionswerte berechnet werden müssen, möglichst groß wird. Bei groben Schrittweiten wäre sonst die Zahl der Randknoten 1.Art nicht mehr klein gegen die Gesamtknotenzahl, was zu einer unrealistisch guten Lösung führen würde.

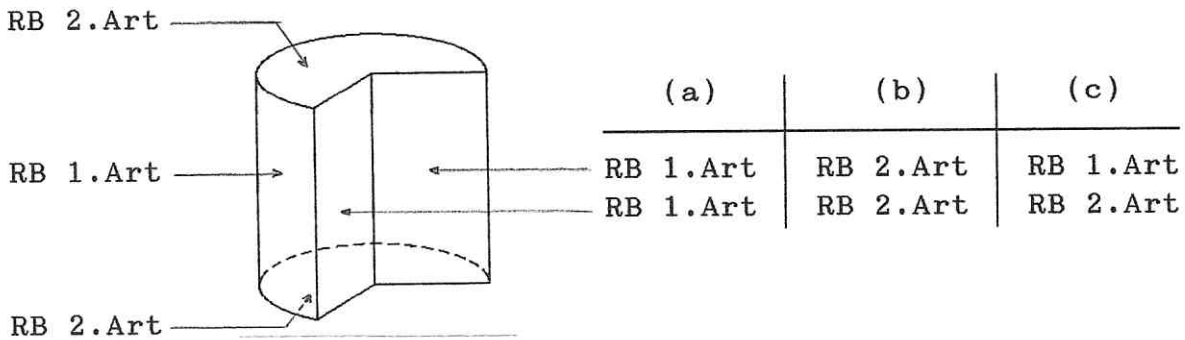


Abb. 5.2.: Festlegung der Randbedingungen bei den 3 Testaufgaben (a), (b) und (c)

5.2.5. Die Testfunktion. Für λ und $\bar{\Phi}(\cdot)$ wurden gesetzt:

- (a) $\lambda = \frac{2}{3}$ und $\bar{\Phi}(\varphi) = \sin\lambda\varphi$
- (b) $\lambda = \frac{2}{3}$ und $\bar{\Phi}(\varphi) = \cos\lambda\varphi$
- (c) $\lambda = \frac{1}{3}$ und $\bar{\Phi}(\varphi) = \sin\lambda\varphi$

In allen 3 Aufgabenstellungen wurde

$$\chi = \chi(r, z) = (r^2 + z^2)^{\frac{1}{4}(1-2\lambda)} (\ln(10^{-3}(r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}))^{-1}$$

verwendet.

Der Koeffizient im logarithmischen Term wird benötigt, da $\ln r=0$ für $r=1$. Er muß viel kleiner als 1 sein, denn sonst hätte u in der Umgebung von $r=1$ einen großen Gradient, der die Qualität der Ergebnisse beeinflusst, aber untypisch ist.

In den nächsten 3 Punkten wird gezeigt, daß die angegebene Funktion die unter 5.2.2. gestellten Forderungen erfüllt.

5.2.6. Satz. Für $\chi(r, z) = (r^2 + z^2)^{\frac{1}{4}(1-2\lambda)} (\ln(\varepsilon(r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}))^{-1}$

gilt: $\chi \in W_{\alpha}^{2,2}(\Omega) \Leftrightarrow \alpha \geq \lambda$.

Der Beweis erfolgt durch Nachrechnung: Es werden Kugelkoordinaten $r = \varrho \cos\psi$, $z = \varrho \sin\psi$ eingeführt. Mit der Substitution

$\beta := (\ln(\varepsilon \varrho))^{-1}$ gilt folglich $\chi = \varrho^{\frac{1}{2}(1-2\lambda)} \beta$.

(i) Zeigen $\chi \in W_\lambda^{0,2}(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \|\chi; W_\lambda^{0,2}(\Omega)\|^2 &= \frac{3}{2}\pi \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^{2\lambda} \varrho^{1-2\lambda} \beta^2 r dr d\varphi \\ &= \frac{3}{2}\pi \left(\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \int_0^{(\cos\psi)^{-1}} (\varrho \cos\psi)^{2\lambda+1} \varrho^{2-2\lambda} \beta^2 d\varrho d\psi + \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{(\sin\psi)^{-1}} (\varrho \cos\psi)^{2\lambda+1} \varrho^{2-2\lambda} \beta^2 d\varrho d\psi \right) \end{aligned}$$

Da $1 \leq (\cos\psi)^{-1} \leq \sqrt{2}$ in $[0, \frac{1}{4}\pi]$ und $1 \leq (\sin\psi)^{-1} \leq \sqrt{2}$ in $[\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ gilt, kann man zunächst die Integrationsgrenzen erweitern und dann $\cos\psi$ mit dem Maximum 1 aus dem Integral ziehen. Man erhält:

$$\|\chi; W_\lambda^{0,2}(\Omega)\|^2 \leq \frac{3}{2}\pi \cdot \frac{1}{2}\pi \int_0^{\sqrt{2}} \varrho^3 \beta^2 d\varrho, \text{ was endlich ist.} \quad \square$$

(ii) Zeigen $\chi \in W_\lambda^{1,2}(\Omega)$: Wegen $\chi_r = \varrho^{-\frac{3}{2}-\lambda} r [(\frac{1}{2}-\lambda)\beta - \beta^2]$, $\chi_z = \varrho^{-\frac{3}{2}-\lambda} z [(\frac{1}{2}-\lambda)\beta - \beta^2]$ und $\chi_x^2 + \chi_y^2 + \chi_z^2 = \chi_r^2 + \chi_z^2$ gilt

$$\begin{aligned} |\chi; W_\lambda^{1,2}(\Omega)|^2 &= \frac{3}{2}\pi \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^{2\lambda} \varrho^{-1-2\lambda} [(\frac{1}{2}-\lambda)\beta - \beta^2]^2 r dr d\varphi \\ &\leq \frac{3}{2}\pi \cdot \frac{1}{2}\pi \int_0^{\sqrt{2}} \varrho^1 [(\frac{1}{2}-\lambda)\beta - \beta^2]^2 d\varrho \quad \text{analog (i)} \end{aligned}$$

Da dieser Ausdruck endlich ist, folgt mit (i) die Teilbehauptung. \square

(iii) Zeigen $\chi \in W_\lambda^{2,2}(\Omega)$:

$$\text{Es gilt } \sum_{|\alpha|=2} \left(\frac{\partial^{|\alpha|} \chi}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \partial^{\alpha_3} x_3} \right)^2 = \chi_{rr}^2 + \frac{1}{r^2} \chi_r^2 + 2\chi_{rz}^2 + \chi_{zz}^2 \text{ und folglich mit}$$

$$\chi_{rr} = \varrho^{-\frac{3}{2}-\lambda} \left\{ [(\frac{1}{2}-\lambda)\beta - \beta^2] + \frac{r^2}{\varrho^2} [(-\frac{3}{2}-\lambda)(\frac{1}{2}-\lambda)\beta + (2\lambda+1)\beta^2 + 2\beta^3] \right\}$$

$$\chi_{zz} = \varrho^{-\frac{3}{2}-\lambda} \left\{ [(\frac{1}{2}-\lambda)\beta - \beta^2] + \frac{z^2}{\varrho^2} [(-\frac{3}{2}-\lambda)(\frac{1}{2}-\lambda)\beta + (2\lambda+1)\beta^2 + 2\beta^3] \right\}$$

$$\chi_{rz} = \varrho^{-\frac{3}{2}-\lambda} \frac{rz}{\varrho^2} [(-\frac{3}{2}-\lambda)(\frac{1}{2}-\lambda)\beta + (2\lambda+1)\beta^2 + 2\beta^3]$$

$$\text{und } p_6(\beta) := 2 [(\frac{1}{2}-\lambda)\beta - \beta^2]^2 + [2\beta^3 + 2\lambda\beta^2 - (\frac{1}{4}-\lambda^2)\beta]^2$$

$$\begin{aligned} |\chi; W_\lambda^{2,2}(\Omega)|^2 &= \frac{3}{2}\pi \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^{2\lambda} \varrho^{-3-2\lambda} p_6(\beta) r dr d\varphi \\ &\leq \frac{3}{2}\pi \cdot \frac{1}{2}\pi \int_0^{\sqrt{2}} \varrho^{-1} p_6(\beta) d\varrho < \infty \quad \text{analog oben.} \quad \square \end{aligned}$$

(iv) Zeigen $\chi \in W_\alpha^{2,2}(\Omega)$ für $\alpha < \lambda$: Analog (iii) gilt

$$\begin{aligned} |\chi; W_\alpha^{2,2}(\Omega)|^2 &= \frac{3}{2}\pi \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^{2\alpha} \varrho^{-3-2\lambda} p_6(\beta) r dr d\varphi \\ &\geq \frac{3}{2}\pi \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} r^{2\alpha} \varrho^{-3-2\lambda} p_6(\beta) r dr d\varphi \quad \left(\begin{array}{l} \text{Einschränkung des} \\ \text{Integrationsgebiets} \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{2}\pi \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\varrho \cos \psi)^{2\alpha+1} \varrho^{-3-2\lambda} p_6(\beta) \varrho d\psi d\varrho$$

Da $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\cos \psi)^{2\alpha+1} d\psi \geq \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\cos \psi)^3 d\psi = \frac{2}{3}$, gilt weiter

$$|\chi; W_\alpha^{2,2}(\Omega)|^2 \geq \pi \int_0^1 \varrho^{-1-2(\lambda-\alpha)} p_6(\beta) d\varrho$$

Der letzte Term divergiert aber für $\alpha < \lambda$. \square

Aus (iii) folgt mit Hilfe des Einbettungssatzes 2.1.3.(iv) $\chi \in W_\alpha^{2,2}(\Omega)$ für $\alpha \geq \lambda$. \blacksquare

5.2.7. Satz. Mit den in 5.2.5. eingeführten Funktionen $\Phi(\cdot)$

und $\chi(\cdot)$ gilt: $u = Cr^\lambda \Phi(\varphi) \chi(x) \in W^{2,2}(\Omega)$.

Beweis. (i) Durch Ausdifferenzieren erhält man

$$\begin{aligned} |u; W^{2,2}(\Omega)|^2 &= \int_\Omega [u_{rr}^2 + 2(\frac{1}{r}u_{r\varphi} - \frac{1}{r^2}u_\varphi)^2 + (\frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r}u_r)^2 + 2u_{rz}^2 + \frac{2}{r^2}u_{\varphi z}^2 + u_{zz}^2] dx \\ &\geq \int_\Omega u_{rr}^2 dx = C^2 \int_\Omega [r^{\lambda-2} \chi + 2r^{\lambda-1} \chi_r + r^\lambda \chi_{rr}]^2 \Phi^2 dx \\ &= C^2 \int_\Omega [r^{2\lambda} \chi_{rr}^2 + r^{2\lambda-1} \chi_r \chi_{rr} + r^{2\lambda-2} \chi_r^2] \Phi^2 dx + \\ &\quad + C^2 \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \Phi^2 d\varphi \int_0^1 \int_0^1 [r^{2\lambda-1} \chi \chi_{rr} + r^{2\lambda-2} \chi \chi_r] dr dz + C^2 \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \Phi^2 d\varphi \int_0^1 \int_0^1 r^{2\lambda-3} \chi^2 dr dz \end{aligned}$$

(ii) Das erste Integral I_1 ist beschränkt: Mit $\Phi^2(\varphi) \leq 1$ und durch Anwendung der Dreiecksungleichung und der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \left| \int_\Omega r^{2\lambda} \chi_{rr}^2 dx \right| + \left| \int_\Omega r^{2\lambda-1} \chi_r \chi_{rr} dx \right| + \left| \int_\Omega r^{2\lambda-2} \chi_r^2 dx \right| \\ &\leq |\chi_{rr}; W_\lambda^{0,2}(\Omega)|^2 + |\chi_r; W_\lambda^{0,2}(\Omega)| |\chi_{rr}; W_\lambda^{0,2}(\Omega)| + |\chi_r; W_\lambda^{0,2}(\Omega)|^2 \end{aligned}$$

Durch Aufrunden der einzelnen Terme und mit $W_\lambda^{2,2}(\Omega) \subset W_{\lambda-1}^{1,2}(\Omega)$ folgt schließlich $|I_1| \leq 3 \|\chi; W_\lambda^{2,2}(\Omega)\|^2 < \infty$ \square

(iii) Durch Ausdifferenzieren und Übergang zu Kugelkoordinaten (vgl. Beweis in 5.2.6.) erhält man

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 [r^{2\lambda-1} \chi \chi_{rr} + r^{2\lambda-2} \chi \chi_r] dr dz &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^1 \int_0^1 \{ (\varrho \cos \psi)^{2\lambda-2} \varrho^{\frac{1}{2}-\lambda} \beta \varrho^{-\frac{3}{2}-\lambda} (\varrho \cos \psi) \beta (\frac{1}{2}-\lambda-\beta) - \\ &\quad + (\varrho \cos \psi)^{2\lambda-1} \varrho^{\frac{1}{2}-\lambda} \beta \varrho^{-\frac{3}{2}-\lambda} [\beta (\frac{1}{2}-\lambda-\beta) + \beta \cos^2 \psi ((-\frac{3}{2}-\lambda)(\frac{1}{2}-\lambda) + (2\lambda-1)\beta + 2\beta^2)] \} \varrho d\varrho d\psi \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^1 \{ 2\varrho^{-1} \beta^2 (\frac{1}{2}-\lambda-\beta) \cos^{2\lambda-1} \psi + \varrho^{-1} \beta^2 [(-\frac{3}{2}-\lambda)(\frac{1}{2}-\lambda) + (2\lambda-1)\beta + 2\beta^2] \cos^{2\lambda+1} \psi \} d\varrho d\psi \end{aligned}$$

Offenbar liefert die Integration über ϱ einen beschränkten

Ausdruck, und bezüglich ψ ist nur $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{2\lambda-1} \psi d\psi$ für $\lambda < \frac{1}{2}$ nicht-trivial. Man kann dieses Integral aber in 2 Teilintegrale zerlegen:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{2\lambda-1} \psi d\psi \leq \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\frac{1}{2}\sqrt{2})^{2\lambda-1} d\psi = (\frac{1}{2}\sqrt{2})^{2\lambda-1} \cdot \frac{1}{2}\pi$$

$$\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{2\lambda-1} \psi d\psi \leq \sqrt{2} \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{2\lambda-1} \psi \sin \psi d\psi = -\sqrt{2} \cos^{2\lambda} \psi \Big|_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} = (\sqrt{2})^{1-2\lambda}$$

Damit ist die Beschränktheit dieses Integrals gezeigt. \square

(iv) Zuletzt wird die Unbeschränktheit des verbleibenden Integrals in (i) bewiesen:

$$\iint_{00}^{11} r^{2\lambda-3} \chi^2 dr dz = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{\varrho^*(\psi)} (\varrho \cos \psi)^{2\lambda-3} (\varrho^{\frac{1}{2}-\lambda})^2 \beta^2 \varrho d\varrho d\psi$$

$$\geq \int_0^1 \varrho^{-1} \beta^2 d\varrho \cdot \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{2\lambda-3} \psi d\psi = C \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{2\lambda-3} \psi d\psi$$

$$\geq C \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{2\lambda-3} \psi \sin \psi d\psi = -C \frac{\cos^{2\lambda-2} \psi}{2\lambda-2} \Big|_0^{\frac{1}{2}\pi}$$

Damit ist alles gezeigt. \blacksquare

5.2.8. Satz. Für die angegebene Funktion gilt

$$\Delta u = Cr^\lambda \sin \lambda \varphi \varrho^{-\frac{3}{2}-\lambda} \beta [(\frac{1}{2}-\lambda)(\lambda+\frac{3}{2})-2\beta(1-\beta)] \in L_2(\Omega),$$

aber $\Delta u \notin L_p(\Omega)$ für $p > 2$.

Beweis. (i) Die Gültigkeit der Formel zeigt man durch Nachrechnen. Dies soll an dieser Stelle nicht vorgeführt werden.

(ii) Die quadratische Integrierbarkeit erhält man nach dem aus den vorangegangenen Beweisen bekannten Muster durch Übergang zu Kugelkoordinaten:

$$\int_{\Omega} (\Delta u)^2 dx = C^2 \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \Phi^2 d\varphi \iint_{00}^{11} r^{2\lambda+1} \varrho^{-3-2\lambda} \beta^2 [(\frac{1}{2}-\lambda)(\lambda+\frac{3}{2})-2\beta(1-\beta)]^2 dr dz$$

$$\leq C^2 \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \Phi^2 d\varphi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{\sqrt{2}} (\varrho \cos \psi)^{2\lambda+1} \varrho^{-3-2\lambda} \beta^2 [(\frac{1}{2}-\lambda)(\lambda+\frac{3}{2})-2\beta(1-\beta)]^2 \varrho d\varrho d\psi$$

$$= C^2 \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \Phi^2 d\varphi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{2\lambda+1} \psi d\psi \int_0^{\sqrt{2}} \varrho^{-1} \beta^2 [(\frac{1}{2}-\lambda)(\lambda+\frac{3}{2})-2\beta(1-\beta)]^2 d\varrho < \infty$$

Da die 3 Integrale endlich sind, ist die Behauptung gezeigt. \square

(iii) Die Beziehung $\Delta u \notin L_p(\Omega)$ für $p > 2$ zeigt man analog durch Abschätzung nach unten:

$$\int_0^1 \varrho^{2-\frac{3}{2}p} \beta^p [(\frac{1}{2}-\lambda)(\lambda+\frac{3}{2})-2\beta(1-\beta)]^p d\varrho \text{ divergiert, wenn } 2-\frac{3}{2}p < -1. \quad \blacksquare$$

5.2.9. Bemerkungen. (i) Die Konstruktion einer den Forderungen 5.2.2. genügenden Funktion u ist durchaus nicht trivial.

Z.B. ist $\chi_1 = r^{1-\lambda} (\ln \varepsilon r)^{-1} \in W_{\lambda}^{2,2}(\Omega)$, aber dann gilt $u_1 = Cr^\lambda \sin \lambda \varphi \cdot \chi_1 = Cr (\ln \varepsilon r)^{-1} \in W^{2,2}(\Omega)$.

Weiterhin ist $\gamma_2 = (r^{1-\lambda}(\ln \varepsilon r)^{-1} + z)^2 \in W_\lambda^{2,2}(\Omega)$, in diesem Falle ist auch $u \notin W^{2,2}(\Omega)$. Jedoch kann dann bei

$$u_2 = Cr^\lambda \sin \lambda \varphi \cdot \gamma_2 = C \sin \lambda \varphi (r^\lambda z^2 + 2rz(\ln \varepsilon r)^{-1} + r^{2-\lambda}(\ln \varepsilon r)^{-2}) = Cr^\lambda \sin \lambda \varphi z^2 + w$$

ein regulärer ($W^{2,2}(\Omega)$ -)Anteil abgespalten werden und $\tilde{\gamma}_2 = z^2$ ist dann sogar unendlich glatt. Auch diese Funktion scheint nicht repräsentativ.

Eine derartige Umformung (Taylorreihenzerlegung von γ bezüglich z) führt bei der in 5.2.5. beschriebenen Funktion nur für $0 < z < r$ auf eine konvergente Reihe

$$u = r^{\frac{1}{2}} (\ln \varepsilon r)^{-1} + z^2 r^{-\frac{3}{2}} p_2((\ln \varepsilon r)^{-1}) + \dots \quad (p_2(\cdot) \dots \text{Polynom 2. Grades})$$

Jedoch ist kein Summand aus $W^{2,2}(\Omega_T)$ ($\Omega_T = \{x \in \Omega : z < r\}$).

(ii) Die Abschneidefunktion wurde bei der Konstruktion von u der Einfachheit halber (Bildung der Ableitungen, Programmieren der Formeln) weggelassen, obwohl man sich dadurch z.T. inhomogene Randbedingungen einhandelt. Das stellt jedoch keine Einschränkung der Aussagekraft des Testbeispiels dar.

(iii) Man kann die hier formulierten Aufgaben auch als Tests für Polyedergebiete betrachten, da die Eckensingularitäten bei $z=0$ und $z=1$ schwächer als die Kantensingularität sind (vgl. [Stephan/Whiteman 1988]: Die Eckensingularität beim gemischten Randwertproblem ist von der Gestalt $r^{\frac{2}{3}} \sin \frac{2}{3} \varphi$ mit konstantem Koeffizienten davor, $r \dots$ Abstand zur Kante!).

5.3. Realisierung der Testgrößen

5.3.1. Mit den Rechnungen wurde das Ziel verfolgt, die Ordnungen der Approximationsfehler in der $W^{1,2}$ - und der L_2 -Norm über dem Gesamtgebiet Ω und dem Teilgebiet $\Omega_T = \{(r, \varphi, z) \in \Omega : r > \frac{1}{3}\}$ für verschieden graduierte Netze zu bestimmen. In den nächsten Punkten soll die rechentechnische Umsetzung dessen beschrieben werden.

5.3.2. Netze und deren Graduierung. (i) Um Approximationsordnungen zu bestimmen, braucht man FEM-Lösungen bei verschiedenen Schrittweiten. Alle Testaufgaben wurden mit Tetraedernetzen der Schrittweiten 1/6, 1/9, 1/12, 1/15 und 1/18 gerechnet. Charakteristische Netzparameter liefert Tabelle 5.1.

Schrittweite	1/6	1/9	1/12	1/15	1/18
Anzahl der Knotenpunkte	784	2350	5239	9856	16606
Anzahl der Tetraeder	3240	10935	25920	50625	87480

Tabelle 5.1.: Anzahl der Knotenpunkte und der Tetraeder bei verschiedenen Schrittweiten

(ii) Die Graduierungen wurden durch Änderung der Knotenkoordinaten erreicht: Liegt ein Netz mit dem Verfeinerungsparameter μ_1 vor, und soll ein Netz mit μ_2 erzeugt werden, so werden die neuen Koordinaten durch folgenden Algorithmus bestimmt:

```

q := ( $\mu_1 - \mu_2$ ) / (2 *  $\mu_2$ )
for i=1..k do
  c := ( $x^2 + y^2$ )q
  x := c * x
  y := c * y
next i

```

(Nach Strahlensatz gilt $x_{neu} = x_{alt} * r_{neu} / r_{alt}$, $y_{neu} = y_{alt} * r_{neu} / r_{alt}$ und $r_{neu} / r_{alt} = r^{1/\mu_2 - 1/\mu_1} = r_{alt}^q$ mit $q = (\mu_1 - \mu_2) / (2 * \mu_2)$.)

Der Einfachheit halber wurden die z-Koordinaten nicht verändert, d.h., es entstehen "langgestreckte Elemente" (vgl. 3.1.). Die Ergebnisse scheinen dadurch nicht negativ beeinflusst (vgl. Kap. 5.4.).

5.3.3. Fehlernormen. (i) In allen Fällen wurde die FEM-Lösung u_h mit der Interpolante der exakten Lösung $\Pi_h u$ verglichen. Dadurch wurde die Berechnung der Fehlernormen einfacher. $\|u_h - \Pi_h u\|$ ist aber eine in dem Sinne mit $\|u - u_h\|$ vergleichbare Größe, daß

$$\|u_h - \Pi_h u\| \leq \|u - u_h\| + \|u - \Pi_h u\|,$$

wobei die theoretisch vorhergesagte Konvergenzordnung für $\|u_h - \Pi_h u\|$ mindestens so groß wie die für $\|u - u_h\|$ war (zumindest in den Räumen $W^{1,2}$ und im L_2 , vgl. Kap 3. und 4.). Es ist für spezielle Beispiele natürlich trotzdem möglich, daß die Konvergenzordnungen für $\|u_h - \Pi_h u\|$ und $\|u - u_h\|$ voneinander verschieden sind.

(ii) Sei $v_h := u_h - \Pi_h u$ und $v \in \mathbb{R}^k$ die zugehörige Gitterfunktion ($v_h(x) = \sum_{i=1}^k v_i \phi_i(x)$, $k \dots$ Anzahl der Knotenpunkte, $\phi_i(x) \dots$ FEM-Ansatzfunktionen). Dann gilt: $|v_h; W^{1,2}(\Omega)|^2 = \int_{\Omega} |\nabla v_h|^2 dx = \int_{\Omega} (\sum_{i=1}^k v_i \nabla \phi_i(x)) (\sum_{j=1}^k v_j \nabla \phi_j(x)) dx = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k v_i v_j a(\phi_i, \phi_j) = \langle \mathcal{A}v, v \rangle$, d.h., die $W^{1,2}(\Omega)$ -Halbnorm kann als energetische Norm des Fehlervektors im \mathbb{R}^k berechnet werden ($\mathcal{A} \dots$ Steifigkeitsmatrix).

(iii) Für $|v_h; W^{1,2}(\Omega_T)|$ wurde eine zweite Matrix aufgebaut, die aus der Summe der Elementsteifigkeitsmatrizen der Elemente aus Ω_T besteht, und mit dem anteiligen Fehlervektor die energetische Norm analog (ii) berechnet.

(iv) Für den Fehler in der L_2 -Norm gilt:

$$\begin{aligned} \|v_h; L_2(\Omega)\|^2 &= \int_{\Omega} v_h^2 dx = \sum_{\Delta} \int_{\Delta} v_h^2 dx = \sum_{\Delta} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 v_{\Delta i} v_{\Delta j} \int_{\Delta} \phi_{\Delta i} \phi_{\Delta j} dx = \\ &= \sum_{\Delta} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 v_{\Delta i} v_{\Delta j} \int_{\hat{\Delta}} \hat{\phi}_{\Delta i} \hat{\phi}_{\Delta j} \det \mathcal{J}_{\Delta} d\hat{x} = \frac{1}{60} \sum_{\Delta} \det \mathcal{J}_{\Delta} \sum_{i=1}^4 v_{\Delta i} \sum_{j=1}^4 v_{\Delta j}, \end{aligned}$$

$$\text{denn } \int_{\hat{\Delta}} \hat{\phi}_{\Delta i} \hat{\phi}_{\Delta j} d\hat{x} = \frac{1}{120} \text{ für } i \neq j \text{ und } \int_{\hat{\Delta}} (\hat{\phi}_{\Delta i})^2 d\hat{x} = \frac{1}{60}.$$

Dabei sind Δ_i ($i=1..4$) die 4 Knoten des betrachteten Elements Δ und $\hat{\Delta}$ das Referenzelement.

(v) Die $L_2(\Omega_T)$ -Fehlernorm wurde analog (iv) berechnet; es wurde lediglich über weniger Elemente summiert.

5.3.4. Andere Fehlereinflüsse. Um Approximationsordnungen zu bestimmen, ist es notwendig, den Einfluß anderer Fehlerterme zu minimieren. Zur numerischen Integration wurde die 5-Punkte-Gauss-Formel für die Tetraederelemente und die 7-Punkte-Gauss-Formel für die Dreiecks-(Oberflächen-)Elemente gewählt. Die Benutzung noch besserer Formeln hatte keinen Einfluß auf die Ergebnisse.

Zur Auflösung des Gleichungssystems wurde das mit der unvollständigen Cholesky-Zerlegung (IC(0)) vorkonditionierte Verfahren der konjugierten Gradienten benutzt. Als Abbruchkriterium wurde $\|y_{i+1} - y_i; \mathbb{R}^k\| < \varepsilon \cdot \|y_i; \mathbb{R}^k\|$ mit $\varepsilon = 10^{-8}$ verwendet. Eine noch kleinere Abbruchschranke veränderte an den Fehlernormen nichts.

5.2.5. Bestimmung der Approximationsordnung. Aus den Wertepaaren (h_i, y_i) , $y_i = \|u_{h_i} - \Pi_{h_i} u\|$, $i=1..\tilde{n}$, wurde die Konvergenzordnung mit der Methode der kleinsten Quadrate für die logarithmierten Werte bestimmt: $y = Ch^{\alpha}$ ist äquivalent zu $\ln y = \ln C + \alpha \ln h$, die genannte Methode liefert

$$\alpha = \frac{(\sum_{i=1}^{\tilde{n}} \ln y_i) \sum_{i=1}^{\tilde{n}} (\ln h_i)^2 - (\sum_{i=1}^{\tilde{n}} \ln h_i) \sum_{i=1}^{\tilde{n}} (\ln h_i) (\ln y_i)}{\tilde{n} \sum_{i=1}^{\tilde{n}} (\ln h_i)^2 - (\sum_{i=1}^{\tilde{n}} \ln h_i)^2}$$

Dabei wurde $C \neq C(h)$ angenommen.

5.4. Resultate und Diskussion

5.4.1. Vorbemerkung. Wie in den vorherigen Kapiteln bezeichne λ den Singularitätenexponent, μ den Netzgraduierungsparameter, α_* die theoretisch gezeigte und α die praktisch erzielte Konvergenzordnung. Entsprechend 3.3.6., 3.4.5., 4.1.3., 4.1.5. und 4.2.7. werden für $\|u_h - I_h u\|$ folgende Konvergenzgeschwindigkeiten erwartet:

	$\mu \geq \lambda$	$\mu < \lambda$	$\mu = 1$	$\lambda \geq \frac{1}{2}$	$\lambda < \frac{1}{2}$
$\ u_h - I_h u; W^{1,2}(\Omega)\ $	$\frac{\lambda}{\mu} - \varepsilon$	1	$\ u_h - I_h u; W^{1,2}(\Omega_T)\ $	1	2λ
$\ u_h - I_h u; L_2(\Omega)\ $	$2\frac{\lambda}{\mu} - \varepsilon$	2	$\ u_h - I_h u; L_2(\Omega_T)\ $	2λ	2λ

Tabelle 5.2.a) und b): Erwartete Konvergenzordnungen α_* in Gesamt- und Subgebiet

5.4.2. Aufgabe (a). (i) $W^{1,2}(\Omega)$ -Fehlernorm. In Tabelle 5.3. und Diagramm 5.1. sind die $W^{1,2}(\Omega)$ -Fehlernormen, die in den durchgeführten Rechnungen ermittelt wurden, und die daraus berechneten Konvergenzordnungen dargestellt. Für $\mu \geq \lambda$ werden die theoretisch vorhergesagten Werte gut wiedergespiegelt. Es ist zu beobachten, daß die Konvergenzordnung mit feiner werdender Schrittweite größer wird, teilweise sogar leicht besser als vorhergesagt. Es ist allerdings zu bezweifeln, daß sich diese Tendenz fortsetzt (vgl. 4.1.7.). Im Fall $\mu < \lambda$ liegt die Konvergenzordnung über 1, allerdings für kleine μ auch weit unter $\frac{\lambda}{\mu}$ (diese Werte sind in Klammern in der Tabelle angegeben). Die Ursache liegt möglicherweise darin, daß in der Lösung kein regulärer Anteil enthalten ist. Aber auch für den singulären Anteil ist es nicht gelungen, eine überlineare Konvergenz nachzuweisen.

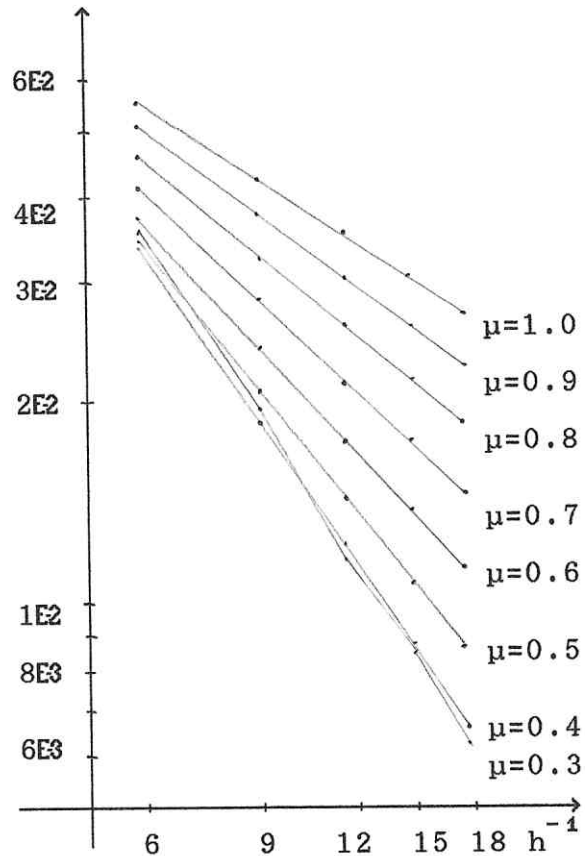
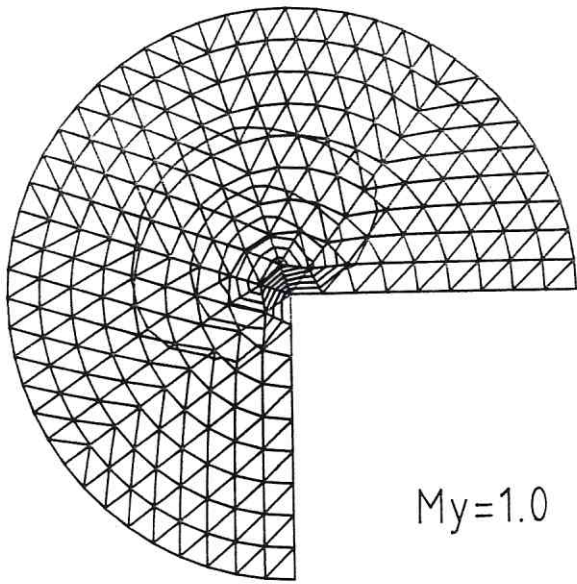
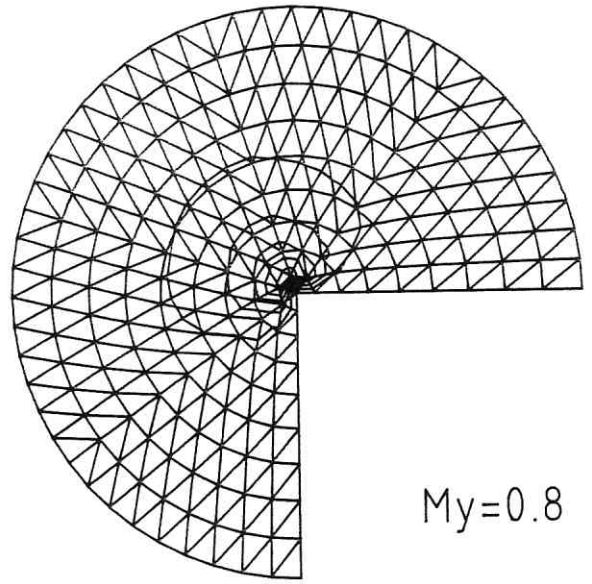


Diagramm 5.1.: Fehler in der $W^{1,2}(\Omega)$ -Norm bei verschiedenen Netzgraduierungen und Schrittweiten

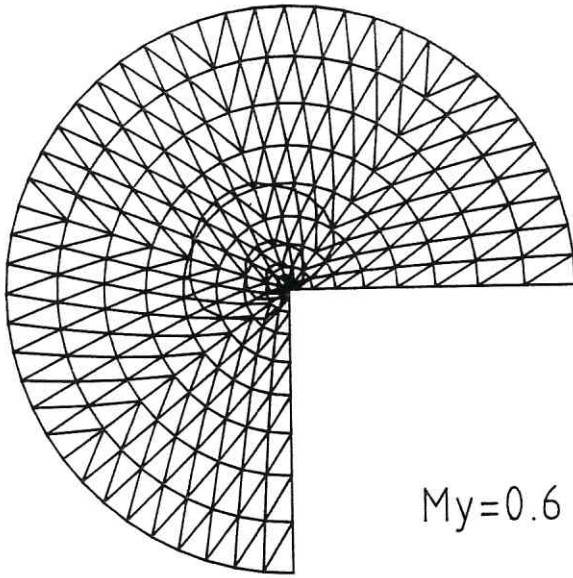
Der kleinste Fehler wird für μ zwischen 0.3 und 0.4 erreicht. Das Anwachsen für noch kleinere μ wird vermutlich durch die Entartung der Elemente verursacht ($r_2:r_1=2^{1/\mu}$, folglich $h_2:h_1 \approx 4.7$ für $\mu=0.4$, ≈ 9 für $\mu=0.3$, ≈ 31 für $\mu=0.2$, vgl. auch Abb. 5.3.). Die verwendete Strategie zum Generieren so stark graduerter Netze ist ungünstig, auf den Kreisbögen r_i mit $i \geq 2$ sollten weniger Knoten liegen. Diese Vermutung wurde aber praktisch nicht überprüft.



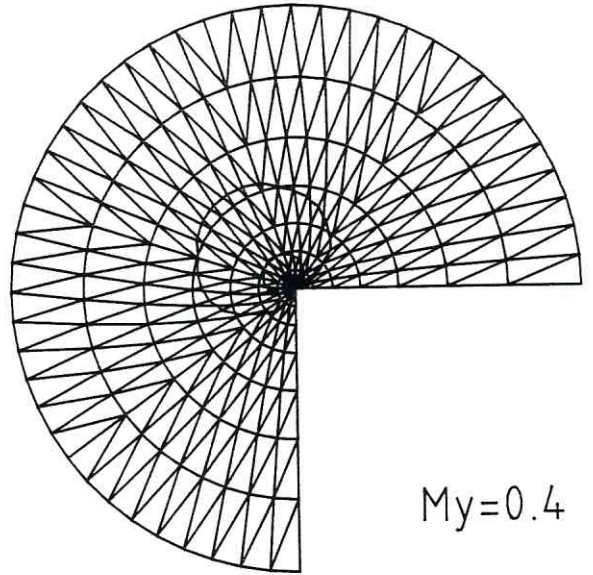
$My=1.0$



$My=0.8$



$My=0.6$



$My=0.4$

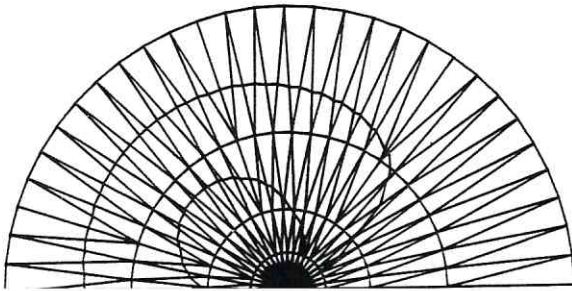


Abb. 5.3.: Netz mit der
Schrittweite $h=1/9$ und ver-
schieden großen Parametern μ

(Isolinienniveaus: 0.005,
0.01, 0.015, 0.02, 0.025,
und 0.03)

h^{-1}	$\mu=1.0$	$\mu=0.9$	$\mu=0.8$	$\mu=0.7$	$\mu=0.6$	$\mu=0.5$	$\mu=0.4$	$\mu=0.3$	$\mu=0.2$
6	0.5533E-1	0.5069E-1	0.4589E-1	0.4120E-1	0.3711E-1	0.3431E-1	0.3344E-1	0.3569E-1	0.4613E-1
9	0.4246E-1	0.3770E-1	0.3286E-1	0.2818E-1	0.2401E-1	0.2068E-1	0.1850E-1	0.1958E-1	0.2337E-1
12	0.3511E-1	0.3048E-1	0.2586E-1	0.2146E-1	0.1753E-1	0.1435E-1	0.1206E-1	0.1162E-1	0.1480E-1
15	0.3026E-1	0.2583E-1	0.2146E-1	0.1735E-1	0.1374E-1	0.1079E-1	0.8785E-2	0.8567E-2	0.1110E-1
18	0.2680E-1	0.2255E-1	0.1842E-1	0.1458E-1	0.1125E-1	0.8329E-2	0.6588E-2	0.5988E-2	0.6174E-2
α	0.660	0.737	0.831	0.946	1.087	1.282	1.473	1.617	1.738
α^1)	0.666	0.743	0.837	0.953	1.097	1.339	1.489	1.625	2.124
α_*	0.666	0.741	0.833	0.952	1.	1.	1.	1.	1.
				(1.111	1.333	1.667	2.222	3.333)	

Tabelle 5.3.: Fehler in der $W^{1,2}(\Omega)$ -Norm bei verschiedenen Netzgraduierungen und Schrittweiten, daraus bestimmte Konvergenzordnungen α und zum Vergleich der erwartete Wert α_*

(ii) $L_2(\Omega)$ -Fehlernorm. Die Resultate (vgl. Tabelle 5.4. und Diagramm 5.2.) bestätigen die erwarteten Konvergenzaussagen. Die Toleranzen sind zwar größer als bei den $W^{1,2}(\Omega)$ -Fehlerbetrachtungen, aber noch in Bereichen, wie sie auch von anderen Autoren als normal betrachtet werden [von Petersdorff 1989]. Möglicherweise könnten mit noch kleineren Schrittweiten noch bessere Ergebnisse erzielt werden; die Tendenz ist vorhanden (vgl. Diagramm 5.2.).

h^{-1}	$\mu=1.0$	$\mu=0.9$	$\mu=0.8$	$\mu=0.7$	$\mu=0.6$	$\mu=0.5$	$\mu=0.4$	$\mu=0.3$	$\mu=0.2$
6	0.9639E2	0.8315E2	0.7045E2	0.5921E2	0.5068E2	0.4621E2	0.4726E2	0.5682E2	0.8654E2
9	0.6067E2	0.4965E2	0.3970E2	0.3143E2	0.2545E2	0.2223E2	0.2221E2	0.2739E2	0.4223E2
12	0.4302E2	0.3392E2	0.2603E2	0.1975E2	0.1537E2	0.1301E2	0.1274E2	0.1562E2	0.2461E2
15	0.3275E2	0.2507E2	0.1863E2	0.1368E2	0.1032E2	0.8541E3	0.8405E3	0.1020E2	0.1603E2
18	0.2614E2	0.1952E2	0.1418E2	0.1009E2	0.7462E3	0.6128E3	0.5835E3	0.7059E3	0.1110E2
α	1.188	1.319	1.460	1.610	1.745	1.844	1.901	1.899	1.867
α^2)	1.228	1.363	1.498	1.656	1.782	1.858	1.924	1.957	1.962
α_*	1.333	1.481	1.666	1.905	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0

Tabelle 5.4.: Fehler in der $L_2(\Omega)$ -Norm bei verschiedenen Netzgraduierungen und Schrittweiten, daraus bestimmte Konvergenzordnungen α und zum Vergleich der erwartete Wert α_*

¹⁾ Diese Werte wurden nur aus den Ergebnissen der 3 feinsten Netze berechnet.

²⁾ Diese Werte wurden nur aus den Ergebnissen der 3 feinsten Netze berechnet.

Die unerwartet gute Konvergenz in der $W^{1,2}(\Omega)$ -Halbnorm für $\mu < \lambda$ kann hier nicht beobachtet werden. Sie wäre auch sehr verwunderlich gewesen, denn bei der Herleitung der $L_2(\Omega)$ -Approximationsfehlerordnung (vgl. Kap. 4.1.5.) wird noch eine zweite Aufgabe betrachtet, deren Lösung dann auch überlinear konvergieren müßte.

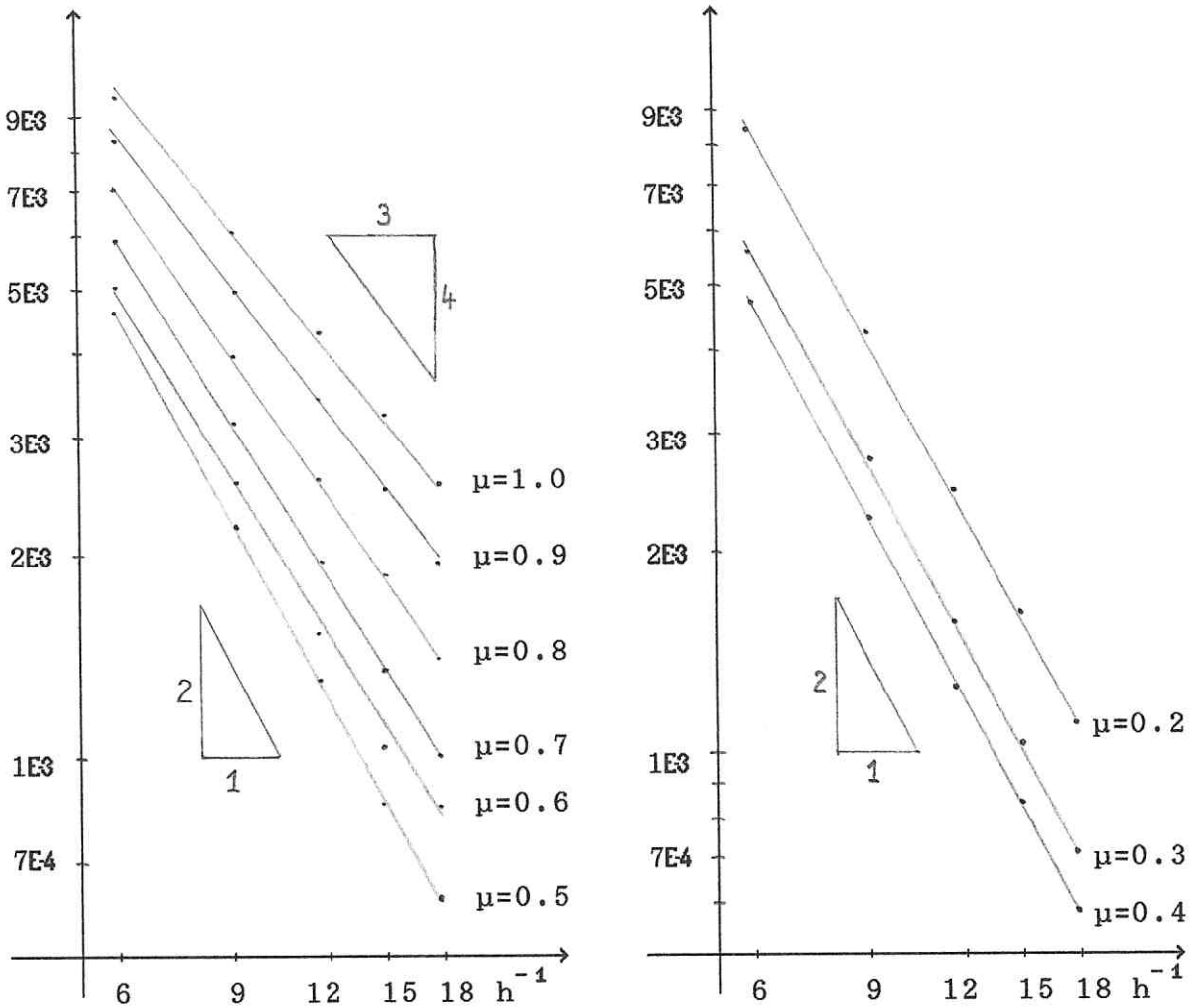


Diagramm 5.2.a) und b): Fehler in der $L_2(\Omega)$ -Norm bei verschiedenen Netzgraduierungen und Schrittweiten.

(iii) $L_\infty(\Omega)$ -Fehlernorm. Für den Fehler in der $L_\infty(\Omega)$ -Norm wurden in der Arbeit keine Abschätzungen hergeleitet. Sändig [1990] erwartet für gleichmäßiges Netz und $f \in L_\infty(\Omega)$ $\alpha_* = 0.6667$. Da f hier nicht in $L_\infty(\Omega)$ ist (unbeschränkt für $x \rightarrow 0$), würde man $\alpha < \alpha_*$ erwarten. Tatsächlich wurde jedoch ein wesentlich günstigerer Wert erreicht (vgl. Tabelle 5.5. und Diagramm 5.3.). Die Ergebnisse deuten eher auf eine Übertragbarkeit der Resultate von Schatz und Wahlbin [1979] auf den dreidimensionalen Fall hin. Dort wurde für den zweidimensionalen Fall $h^{\lambda-\epsilon}$ für das unverfeinerte Netz und h für eine Verfeinerung mit $\mu = \frac{1}{2}\lambda$ gezeigt. Deutlich wird, daß Netzverfeinerung auch hier die Konvergenzordnung erhöht. Für kleine μ treten auch hier nicht erklärable Effekte auf.

h^{-1}	$\mu=1.0$	$\mu=0.9$	$\mu=0.8$	$\mu=0.7$	$\mu=0.6$	$\mu=0.5$	$\mu=0.4$	$\mu=0.3$	$\mu=0.2$
6	0.3929E1	0.3684E1	0.3406E1	0.3109E1	0.2822E1	0.2553E1	0.2182E1	0.2212E1	0.2434E1
9	0.3175E1	0.2916E1	0.2636E1	0.2353E1	0.2094E1	0.1822E1	0.1478E1	0.1461E1	0.1478E1
12	0.2709E1	0.2456E1	0.2189E1	0.1931E1	0.1700E1	0.1433E1	0.1203E1	0.1156E1	0.1128E1
15	0.2389E1	0.2145E1	0.1893E1	0.1658E1	0.1447E1	0.1189E1	0.1022E1	0.9728E2	0.1013E1
18	0.2154E1	0.1919E1	0.1681E1	0.1466E1	0.1270E1	0.1013E1	0.8859E2	0.8176E2	0.7369E2
α	0.547	0.594	0.643	0.685	0.727	0.839	0.809 ³	0.891	1.025

Tabelle 5.5.: Fehler in der Maximumnorm bei verschiedenen Netzgraduierungen und Schrittweiten und daraus bestimmte Konvergenzordnungen α

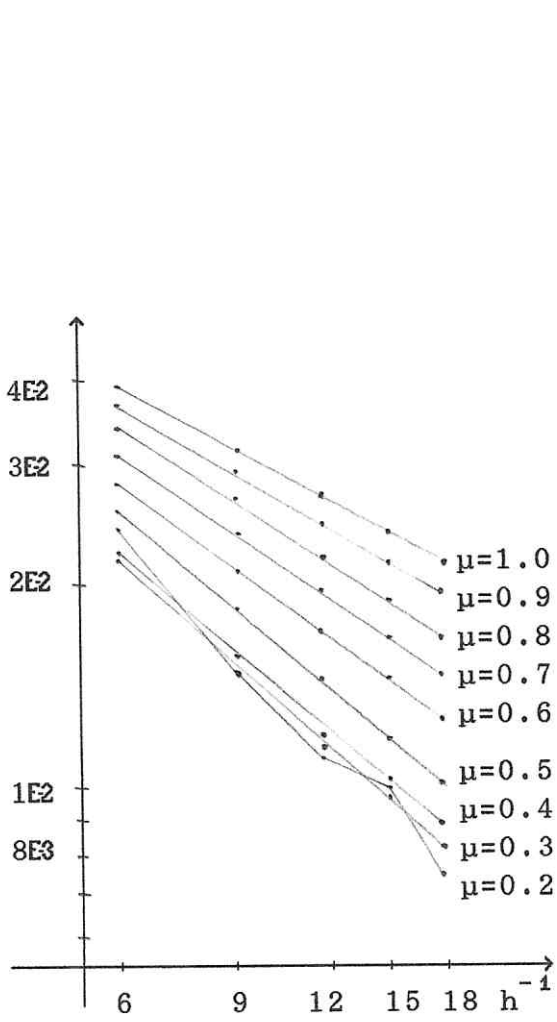


Diagramm 5.3.: Fehler in der Maximumnorm bei verschiedenen Netzgraduierungen

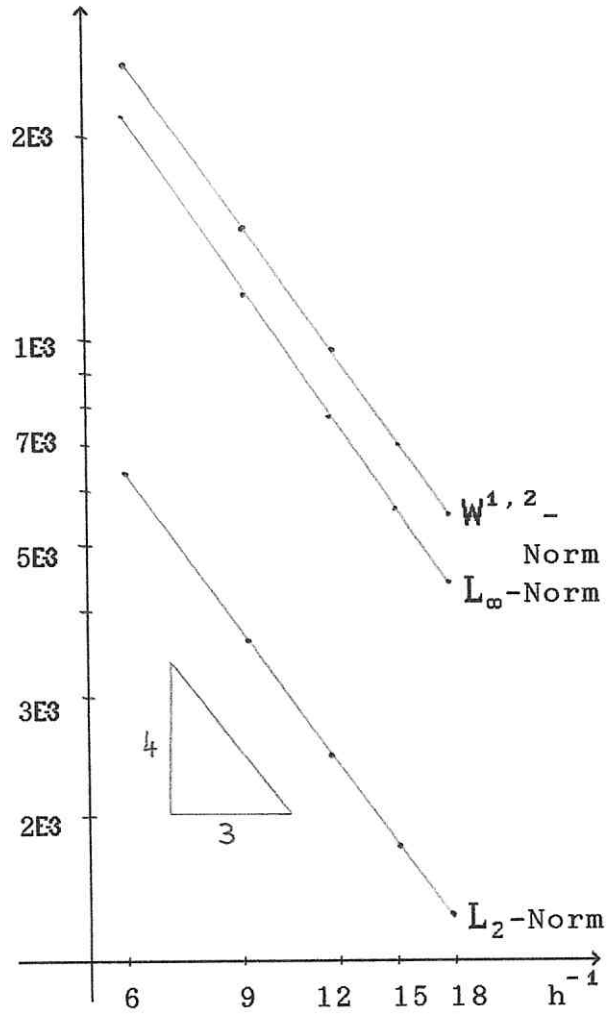


Diagramm 5.4.: Fehler im Teilgebiet Ω_T in verschiedenen Normen

³) Mit kleiner werdender Schrittweite stark fallend.

(iv) Subgebiet. Im Subgebiet wurden nur nichtgraduierte Netze untersucht, da nur dafür Konvergenzaussagen vorhanden sind und außerdem für gradierte Netze die rechentechnische Realisierung wesentlich komplizierter wäre.

Die Ergebnisse in der $W^{1,2}(\Omega_T)$ -Halbnorm lassen $\alpha=2\lambda$ vermuten, obwohl nur $\alpha_*=1$ erwartet wird. Die Ursache könnte auch hier im Fehlen eines regulären Lösungsanteils liegen.

In der $L_2(\Omega_T)$ -Norm scheint $\alpha_*=2\lambda < 2$ bestätigt zu werden, obwohl nicht gezeigt wurde, daß diese Ordnung optimal ist (vgl. 4.2.8.).

Für den Fehler in der $L_\infty(\Omega_T)$ -Norm gibt es Aussagen für den zweidimensionalen Fall, die noch nicht auf das dreidimensionale Beispiel übertragen wurden: Schatz und Wahlbin [1979] zeigen für Ω_T die Konvergenzordnung $2\lambda - \varepsilon$.

h^{-1}	$W^{1,2}(\Omega_T)$ -Norm	$L_2(\Omega_T)$ -Norm	Maximumnorm
6	0.2556E1	0.6384E2	0.2136E1
9	0.1445E1	0.3635E2	0.1184E1
12	0.9702E2	0.2453E2	0.7812E2
15	0.7143E2	0.1812E2	0.5652E2
18	0.5574E2	0.1419E2	0.4355E2
α	1.386	1.369	1.448
α^4)	1.367	1.350	1.441

Tabelle 5.6.: Fehler im Teilgebiet Ω_T in verschiedenen Normen und bei verschiedenen Schrittweiten und daraus bestimmte Konvergenzordnungen α

h^{-1}	$\mu=1.0$	$\mu=0.9$	$\mu=0.8$	$\mu=0.7$	$\mu=0.6$	$\mu=0.5$	$\mu=0.4$	$\mu=0.3$	$\mu=0.2$
6	0.5778E1	0.5302E1	0.4807E1	0.4316E1	0.3877E1	0.3556E1	0.3420E1	0.3603E1	0.4629E1
9	0.4384E1	0.3902E1	0.3409E1	0.2929E1	0.2495E1	0.2139E1	0.1895E1	0.1980E1	0.2355E1
12	0.3601E1	0.3135E1	0.2667E1	0.2219E1	0.1817E1	0.1482E1	0.1236E1	0.1179E1	0.1498E1
15	0.3092E1	0.2645E1	0.2204E1	0.1787E1	0.1418E1	0.1116E1	0.8984E2	0.8697E2	0.1126E1
18	0.2729E1	0.2302E1	0.1886E1	0.1498E1	0.1157E1	0.8574E2	0.7508E2	0.6097E2	0.9637E2
α	0.683	0.759	0.852	0.963	1.101	1.287	1.405	1.610	1.454
α^5)	0.681	0.756	0.847	0.956	1.087	1.254	1.456	1.476	1.667
α_*	0.666	0.741	0.833	0.952	1.	1.	1.	1.	1.
					(1.111	1.333	1.667	2.222	3.333)

Tabelle 5.7.: Fehler und Fehlerordnungen in der $W^{1,2}(\Omega)$ -Norm

⁴) Diese Werte wurden nur aus den Ergebnissen der 3 feinsten Netze berechnet.

⁵) Diese Werte wurden nur aus den Ergebnissen der 2 größten Netze berechnet.

5.4.3. Aufgabe (b). Die Fehlernormen und die daraus berechneten Konvergenzordnungen sind in den Tabellen 5.7. bis 5.10. wiedergegeben. Die Qualität der Ergebnisse ist vergleichbar mit Aufgabe (a).

Bemerkenswert ist, daß sich schon bei kleinen Schrittweiten gute Konvergenzraten einstellen. Es scheint sich die Vermutung zu bestätigen, daß das Verhältnis p der Randknoten 1. Art zur Gesamtknotenzahl bedeutsam für die Konvergenzordnung ist. (Bei relativ vielen Randknoten 1. Art (großes p) wird der Fehler klein, da in vielen Knoten $u=u_h$ gilt.)

h^{-1}	$\mu=1.0$	$\mu=0.9$	$\mu=0.8$	$\mu=0.7$	$\mu=0.6$	$\mu=0.5$	$\mu=0.4$	$\mu=0.3$	$\mu=0.2$
6	0.9700E2	0.8372E2	0.7096E2	0.5963E2	0.5096E2	0.4631E2	0.4718E2	0.5664E2	0.8643E2
9	0.6096E2	0.4992E2	0.3994E2	0.3162E2	0.2559E2	0.2230E2	0.2222E2	0.2737E2	0.4219E2
12	0.4319E2	0.3406E2	0.2615E2	0.1985E2	0.1544E2	0.1307E2	0.1277E2	0.1563E2	0.2459E2
15	0.3285E2	0.2516E2	0.1871E2	0.1374E2	0.1037E2	0.9194E3	0.8423E3	0.1021E2	0.1603E2
18	0.2617E2	0.1958E2	0.1418E2	0.1020E2	0.7464E3	0.6153E3	0.1393E2	0.7068E3	0.1137E2
α	1.192	1.323	1.466	1.609	1.749	1.814	1.348	1.895	1.851
α°)	1.146	1.275	1.417	1.564	1.699	1.802	1.857 ⁷⁾	1.794	1.769
α_*	1.333	1.481	1.666	1.905	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0

Tabelle 5.8.: Fehler und Fehlerordnungen in der $L_2(\Omega)$ -Norm

h^{-1}	$\mu=1.0$	$\mu=0.9$	$\mu=0.8$	$\mu=0.7$	$\mu=0.6$	$\mu=0.5$	$\mu=0.4$	$\mu=0.3$	$\mu=0.2$
6	0.5005E1	0.4715E1	0.4383E1	0.4019E1	0.3644E1	0.3253E1	0.2724E1	0.2461E1	0.2724E1
9	0.4023E1	0.3720E1	0.3383E1	0.3028E1	0.2672E1	0.2275E1	0.1730E1	0.1597E1	0.1622E1
12	0.3426E1	0.3129E1	0.2805E1	0.2474E1	0.2145E1	0.1768E1	0.1304E1	0.1221E1	0.1207E1
15	0.3019E1	0.2731E1	0.2424E1	0.2116E1	0.1810E1	0.1497E1	0.1096E1	0.1035E1	0.1076E1
18	0.2722E1	0.2442E1	0.2150E1	0.1877E1	0.1576E1	0.1219E1	0.1201E1	0.8308E2	0.1030E1
α	0.555	0.599	0.648	0.695	0.763	0.877	0.811	0.965	0.904
α^B)	0.539	0.585	0.639	0.698	0.765	0.882	1.120	1.066	1.279

Tabelle 5.9.: Fehler und Fehlerordnungen in der Maximumnorm

⁶⁾ Diese Werte wurden nur aus den Ergebnissen der 2 größten Netze berechnet.

⁷⁾ Der Wert für $h^{-1}=18$ kann nicht erklärt werden, zumal er nur in der L_2 -Norm aus der Reihe fällt.

⁸⁾ Diese Werte wurden nur aus den Ergebnissen der 2 größten Netze berechnet.

h^{-1}	$W^{1,2}(\Omega_T)$ -Norm	$L_2(\Omega_T)$ -Norm	Maximumnorm
6	0.2612E1	0.6409E2	0.2750E1
9	0.1466E1	0.3646E2	0.1498E1
12	0.9808E2	0.2459E2	0.9619E2
15	0.7203E2	0.1815E2	0.6825E2
18	0.5605E2	0.1417E2	0.5143E2
α	1.401	1.373	1.527
α°)	1.424	1.391	1.498

Tabelle 5.10.: Fehler im Teilgebiet Ω_T in verschiedenen Normen und bei verschiedenen Schrittweiten und daraus bestimmte Konvergenzordnungen.

5.4.4. Aufgabe (c). Bei den starken Singularitäten, die in den Lösungen gemischter Randwertaufgaben auftreten, wird die Wirkung der Netzverfeinerung besonders deutlich. Die Ergebnisse der Tests stimmen gut mit den theoretischen Aussagen überein. Insbesondere im Subgebiet ist festzustellen, daß die $W^{1,2}(\Omega_T)$ -Fehlerordnung nur $\min\{2\lambda, 1\}$ ist und nicht von λ unabhängig lineare Konvergenz erhalten wird.

h^{-1}	$\mu=1.0$	$\mu=0.9$	$\mu=0.8$	$\mu=0.7$	$\mu=0.6$	$\mu=0.5$	$\mu=0.4$	$\mu=0.3$	$\mu=0.2$
6	0.2236	0.2128	0.1995	0.1834	0.1641	0.1419	0.1196	0.1049	0.1138
9	0.2041	0.1911	0.1757	0.1575	0.1364	0.1128	0.8910E-1	0.6966E-1	0.9290E-1
12	0.1900	0.1759	0.1594	0.1403	0.1186	0.9505E-1	0.7162E-1	0.4849E-1	0.7286E-1
15	0.1791	0.1643	0.1473	0.1278	0.1063	0.8297E-1	0.5862E-1	0.3901E-1	0.7153E-1
18	0.1704	0.1552	0.1378	0.1183	0.9666E-1	0.7295E-1	0.5316E-1	0.3037E-1	0.7438E-1
α	0.247	0.287	0.337	0.399	0.481	0.601	0.754	1.124	0.433
α^{10})	0.268	0.309	0.359	0.421	0.504	0.651	0.741	1.147	— ¹¹⁾
α_*	0.333	0.370	0.417	0.476	0.556	0.667	0.833	1.	1.
								(1.111	1.667)

Tabelle 5.11.: Fehler und Fehlerordnungen in der $W^{1,2}(\Omega)$ -Norm

⁹⁾ Diese Werte wurden nur aus den Ergebnissen der 2 größten Netze berechnet.

¹⁰⁾ Diese Werte wurden nur aus den Ergebnissen der 3 feinsten Netze berechnet.

¹¹⁾ Die Entstehung der Werte in dieser Spalte kann nicht erklärt werden.

h^{-1}	$\mu=1.0$	$\mu=0.9$	$\mu=0.8$	$\mu=0.7$	$\mu=0.6$	$\mu=0.5$	$\mu=0.4$	$\mu=0.3$	$\mu=0.2$
6	0.4856E-1	0.4382E-1	0.3847E-1	0.3260E-1	0.2646E-1	0.2061E-1	0.1601E-1	0.1400E-1	0.1667E-1
9	0.3866E-1	0.3371E-1	0.2842E-1	0.2296E-1	0.1761E-1	0.1282E-1	0.9181E-2	0.7943E-2	0.9219E-2
12	0.3251E-1	0.2769E-1	0.2271E-1	0.1775E-1	0.1308E-1	0.9070E-2	0.6115E-2	0.4749E-2	0.6165E-2
15	0.2829E-1	0.2368E-1	0.1901E-1	0.1449E-1	0.1051E-1	0.6981E-2	0.4490E-2	0.3543E-2	0.4860E-2
18	0.2522E-1	0.2079E-1	0.1641E-1	0.1233E-1	0.8528E-2	0.5455E-2	0.4533E-2	0.2443E-2	0.4308E-2
α	0.597	0.679	0.776	0.887	1.025	1.203	1.223	1.578	1.259
α^{12})	0.626	0.707	0.801	0.899	1.052	1.251	0.762 ¹³)	1.627	0.891
α_*	0.667	0.741	0.833	0.952	1.111	1.333	1.667	2.0	2.0

Tabelle 5.12.: Fehler und Fehlerordnungen in der $L_2(\Omega)$ -Norm

h^{-1}	$\mu=1.0$	$\mu=0.9$	$\mu=0.8$	$\mu=0.7$	$\mu=0.6$	$\mu=0.5$	$\mu=0.4$	$\mu=0.3$	$\mu=0.2$
6	0.1479	0.1430	0.1359	0.1262	0.1151	0.1003	0.8207E-1	0.6196E-1	0.5523E-1
9	0.1416	0.1353	0.1268	0.1156	0.1011	0.8312E-1	0.6264E-1	0.4120E-1	0.4734E-1
12	0.1369	0.1291	0.1190	0.1062	0.9039E-1	0.7168E-1	0.5114E-1	0.2912E-1	0.4040E-1
15	0.1320	0.1233	0.1122	0.9853E-1	0.8222E-1	0.6337E-1	0.4309E-1	0.2317E-1	0.3971E-1
18	0.1276	0.1181	0.1064	0.9229E-1	0.7558E-1	0.5693E-1	0.3813E-1	0.1863E-1	0.4065E-1
α	0.132	0.172	0.222	0.285	0.382	0.514	0.702	1.096	0.307
α^{14})	0.173	0.219	0.276	0.346	0.441	0.568	0.726	1.099	--- ¹⁵)

Tabelle 5.13.: Fehler und Fehlerordnung in der Maximumnorm

¹²) Diese Werte wurden nur aus den Ergebnissen der 3 feinsten Netze berechnet.

¹³) Die Entstehung des Werts für $h^{-1}=18$ kann nicht erklärt werden.

¹⁴) Diese Werte wurden nur aus den Ergebnissen der 3 feinsten Netze berechnet.

¹⁵) Die Entstehung der Werte in dieser Spalte kann nicht erklärt werden.

h^{-1}	$W^{1,2}(\Omega_T)$ -Norm	$L_2(\Omega_T)$ -Norm	Maximumnorm
6	0.1167	0.3332E1	0.8578E1
9	0.8726E1	0.2476E1	0.6573E1
12	0.7137E1	0.2019E1	0.5427E1
15	0.6116E1	0.1728E1	0.4656E1
18	0.5399E1	0.1525E1	0.4106E1
α	0.702	0.712	0.670
α^{16})	0.688	0.692	0.688
α_*	0.666		

Tabelle 5.14.: Fehler im Teilgebiet Ω_T in verschiedenen Normen und bei verschiedenen Schrittweiten und daraus bestimmte Konvergenzordnungen.

5.4.5. Zusammenfassung. (i) Die Analyse der Testergebnisse zeigt, daß die Netzgraduierung ein geeignetes Mittel zur Verringerung der Fehler und zur Erhöhung der Approximationsordnung ist. Die Fehlerabschätzungen aus den Kapiteln 3. und 4. konnten größtenteils bestätigt werden.

(ii) Die meisten Abweichungen werden vermutlich durch das Fehlen eines regulären Anteils in der Lösung verursacht. Von weiteren diesbezüglichen Tests wurde jedoch abgesehen, denn:
 - Was ist eine "beliebige" $W^{2,2}(\Omega)$ -Funktion, die als regulärer Anteil geeignet ist (d.h., die durch Netzgraduierung nicht in ihren Approximationseigenschaften positiv beeinflußt wird)?

- Selbst wenn man eine geeignet scheinende Funktion gefunden hat, entsteht die Frage der Wichtung. Mit einem hinreichend kleinen oder großen Faktor kann man wahrscheinlich die Ergebnisse in einem solchen Maße beeinflussen, daß sie als auch nicht aussagekräftiger als die durchgeführten Tests betrachtet werden müssen.

Eine weitere Fehlerursache kann im Übergang von " $\leq Ch^\alpha$ " zu " $=Ch^\alpha$ " liegen. Zum einen ist bei " \leq " auch eine in Einzelbeispielen höhere Konvergenzordnung eingeschlossen, zum anderen kann C durchaus von h abhängig sein; es ist lediglich die Existenz einer von h unabhängigen oberen Schranke bekannt.

(iii) Es ist festzustellen, daß es sich durchaus lohnt, stärker als unbedingt für die optimale Konvergenzordnung nötig zu verfeinern. Die günstigste Wahl des Steuerparameters μ hängt aber von der betrachteten Fehlernorm ab.

¹⁶) Diese Werte wurden nur aus den Ergebnissen der 3 feinsten Netze berechnet.

(iv) Bei allen Tests wurde in z-Richtung nicht verfeinert, d.h., bei der Graduierung entstanden "langgestreckte Elemente". (Bei den Elementen, die die Kante berühren, stehen Inkugel- und Umkugeldurchmesser im Verhältnis $h^{1/\mu}:h$, d.h., $\approx 1:10^5$ bei $\mu=0.2$ und $h^{-1}=18$.) Diese beeinflussten die Testergebnisse jedoch nicht negativ.

5.4.6. Bemerkung zu den CPU-Zeiten. Tabelle 5.15. gibt einen Überblick über den Rechenzeitaufwand für die Tests. Obwohl die Zeiten durch die Rechnerauslastung beeinflusst sind (Mehrnutzersystem), geben sie Aufschluß über die Kondition der Steifigkeitsmatrix.

h^{-1}	Assemblierg. (5 Punkte)	Auflösen des Gleichungssystems ¹⁷⁾		
		Aufgabe (a)	Aufgabe (b)	Aufgabe (c)
6	1:50	0:08... 0:11	0:13... 0:45	0:12... 0:30
9	6:15	0:50... 1:30	1:10... 2:50	1:10... 2:20
12	14:35	3:20... 6:00	5:00... 9:00	4:40... 8:30
15	29:00	9:00...17:00	10:00...19:00	11:50...18:50
18	49:00	15:30...32:20	24:00...33:00	26:00...31:00

Tabelle 5.15.: Durchschnittliche CPU-Zeiten (vgl. auch Tabelle 5.1.)

5.4.7. Bemerkungen zur Vernetzung. (i) Bei der gewählten Vernetzung ergibt sich in der (x_1, x_2) -Ebene bei $\varphi = k \cdot 54^\circ$, $k=1..4$, ein Fischgrätenmuster (vgl. Abb. 5.4.). Bei glatten Lösungen ist in deren Umgebung eine Fehlerhäufung zu beobachten. Zerstört man dieses Muster, erhält man ein nicht mehr strukturiertes Fehler-Isolinienbild, beim durchgeführten Test war jedoch trotz höherer Knotenzahl der Fehler insgesamt größer.

	Fischgrätenmuster	ohne Muster
$\ u_h - I_h u; W^{1,2}(\Omega)\ $	0.011	0.023
$\ u_h - I_h u; L_2(\Omega)\ $	0.0012	0.0014
$\ u_h - I_h u; L_\infty(\Omega)\ $	0.0068	0.0070

Tabelle 5.16.: Einfluß der Netzstruktur am Beispiel der 1. Randwertaufgabe mit $u=r^2$.

¹⁷⁾ Das Gleichungssystem wurde mit dem mit unvollständiger Choleskyzerlegung vorkonditionierten Verfahren der konjugierten Gradienten gelöst.

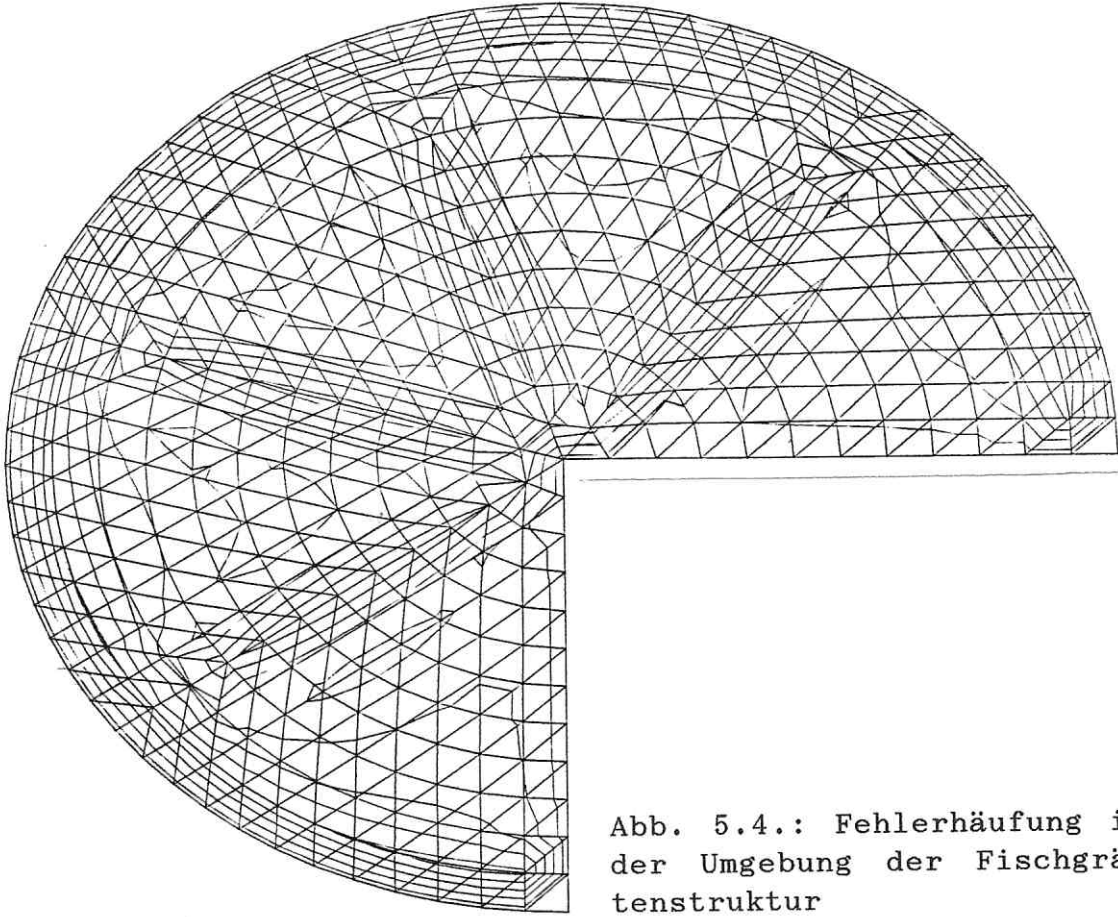


Abb. 5.4.: Fehlerhäufung in der Umgebung der Fischgrätenstruktur

(ii) Zum Vergleich wurden einige Beispiele mit einer Pentaedervernetzung gerechnet. Die Anzahl und die Koordinaten der Knotenpunkte blieben erhalten, die der Elemente reduzierte sich auf ein Drittel. Dadurch wurde das Netz symmetrisch bezüglich der Ebene $z=\frac{1}{2}$.

Zu beobachten war eine Verringerung des Fehlers in allen Beispielen: Je glatter die Lösung ist, desto günstiger sind Pentaeder.

$h^{-1}=9$		1. RWA mit $u=r^2$	2. RWA mit $u=r^2$	1.RWA mit $u=r^\lambda \sin \lambda \varphi$ $\lambda=2/3$	1.RWA mit u wie in Aufg. (a)
$W^{1,2}(\Omega)$ - Norm	Tetraeder	0.0099	0.011	0.028	0.042
	Pentaeder	0.0015	0.003	0.027	0.041
$L_\infty(\Omega)$ - Norm	Tetraeder	0.0025	0.0068	0.018	0.032
	Pentaeder	0.00024	0.0023	0.014	0.022

Tabelle 5.17.: Vergleich der Fehlernormen bei Tetraeder- und Pentaedervernetzung

Bei Pentaedern wurde eine 8-Punkte-Quadraturformel verwendet. Mehr Punkte brachten keinen Genauigkeitserfolg.

(iii) Es wurden auch einige Beispiele mit quadratischen finiten Elementen gerechnet. Die Fehler lagen in der gleichen Größenordnung wie bei den entsprechenden linearen Elementen mit halber Schrittweite (vgl. Tabelle 5.18.).

Aufgabe (a)	$\ u_h - I_h u; W^{1,2}(\Omega)\ $	$\ u_h - I_h u; L_\infty(\Omega)\ $
lineare Tetraeder $h^{-1}=12$	0.03511	0.02709
quadrat. Tetraeder $h^{-1}=6$	0.03431	0.02681
lineare Pentaeder $h^{-1}=12$	0.03401	0.01839
quadrat. Pentaeder $h^{-1}=6$	0.03071	0.01383

Tabelle 5.18.: Vergleich von linearen und quadratischen Elementen

Integriert wurde wie auch bei linearen Elementen mit 5 (Tetraeder) bzw. 8 (Pentaeder) Gaußpunkten. Eine Erhöhung der Anzahl der Integrationspunkte hatte kaum Einfluß auf das Ergebnis (weniger als 1% Änderung).

Literaturverzeichnis

Babuška, I.:

- [1988] Recent progress in the p and h-p versions of the finite element method. Numerical analysis 1987 (Dundee, 1987), 1-17. Pitman Res. Notes Math. Ser. 170, Longman Sci. Tech., Harlow 1988.

Babuška, I.; Aziz, A.K.:

- [1976] On the angle condition in the finite element method. SIAM J. Num. Anal. 13(1976)2, 214-226.

Babuška, I.; Osborn, J.:

- [1985] Finite element methods for the solution of problems with rough input data. in: Grisvard, P.; Wendland, W.; Whiteman, J.R. (eds.): Singularities and constructive methods for their treatment. Lecture Notes in Math. 1121, 1-18. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo 1985. - ix+346 S.

Babuška, I.; Rheinboldt, W.C.:

- [1978] Error estimates for adaptive finite element calculations. SIAM J. Num. Anal. 15(1978)4, 736-754.

Barnhill, R.E.; Whiteman, J.R.:

- [1975] Error analysis of Galerkin methods for Dirichlet problems containing singularities. J. Inst. Math. Applics. 15(1975), 121-125.

Beagles, A.E.; Whiteman, J.R.:

- [1985] Treatment of a re-entrant vertex in a three-dimensional Poisson problem. in: Grisvard, P.; Wendland, W.; Whiteman, J.R.: Singularities and constructive methods for their treatment. Lecture Notes in Math. 1121, 19-27. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo 1985. - ix+346 S.

- [1989] General conical singularities in three-dimensional Poisson problems. Math. Meth. Appl. Sci. 11(1989)2, 215-235.

Blum, H.; Dobrowolski, M.:

- [1982] On finite element methods for elliptic equations on domains with corners. Computing 28(1982), 53-63.

Bramble, J.H.; Hilbert, S.R.:

- [1970] Estimation of linear functionals on Sobolev spaces with application to Fourier transforms and spline interpolation. SIAM J. Num. Anal. 7(1970), 112-124.

- [1971] Bounds for the class of linear functionals with application to Hermite interpolation. Numer. Math. 16 (1971)4, 362-369.

Carey, G.F.; Oden, J.T.:

- [1983] The Texas finite element series. Vol. III: Finite Elements - Computational Aspects, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs (New Jersey) 1983. - 350 S.

Ciarlet, Ph.G.:

- [1978] The finite element method for elliptic problems. North-Holland Publishing Company, Amsterdam-New York-Oxford 1978. - 481 S.

COSAR

- [1984] COSAR/84 Nutzerhandbuch (Teil I: Grundlagen, Teil II: Eingabevorschrift). TH Magdeburg, Sektion Maschinenbau, WB Festkörpermechanik 1984. - 604+671 S.

Demkowicz, L.; Oden, J.T.:

- [1986] On a mesh optimization method based on a minimization of interpolation error. Int. J. Engrg. Sci. 24 (1986)1, 55-68.

Destuynder, P.; Djaoua, M.; Lescure, S.:

- [1981] Une nouvelle méthode de calcul de la singularité pour un problème elliptique posé sur un ouvert avec fente. C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A 293(1981), 343-346.

Dobrowolski, M.:

- [1981] Numerical approximation of elliptic interface and corner problems. Habilitationsschrift, Bonn 1981. - 129 S.
- [1985] On the numerical treatment of elliptic equations with singularities. Bericht 8505 der Bundeswehr, München 1985. - 10 S.
- [1989] Eine exakte Fehlerschranke für das Finite Elemente Verfahren auf orthogonalen Gittern. Manuskript, Erlangen 1989. - 8 S.
- [1990a] Wie groß ist der Diskretisierungsfehler beim Finite Elemente Verfahren? Z. angew. Math. Mech. 70(1990)6, T667-T668.

[1990b] Persönliche Mitteilung

Dornscheidt, G.; Schendel, U.:

- [1989] Numerische Behandlung von Singularitäten bei elliptischen Randwertaufgaben. Preprint no. A-89-12, FU Berlin 1989.

Dorr, M.R.:

- [1984] The approximation theory for the p-version of the finite element method. SIAM J. Num. Anal. 21(1984), 1181-1207.

- [1986] The approximation of solutions of elliptic boundary-value problems via the p-version of the finite element method. STAM J. Num. Anal. 23(1986)1, 58-77.
- Dreszer, J.:
- [1975] Mathematik-Handbuch für Technik und Naturwissenschaft. Fachbuchverlag. Leipzig 1975. - 1337 S.
- Edmunds, D.E.; Kufner, A.; Rakosnik, J.:
- [1985] Embeddings of Sobolev spaces with wights of power type. ZAA 4(1985)1, 25-34.
- Fritzsche, R.:
- [1989] Optimale Finite-Elemente-Approximationen für Funktionen mit Singularitäten. Dissertation A, Sektion Mathematik, TU Dresden 1989.
- Fritzsche, R.; Oswald, P.:
- [1988] Zur optimalen Gitterwahl bei Finite-Elemente-Approximationen. WZ TU Dresden 37(1988)3, 155-158.
- Gajewski, H.; Gröger, K.; Zacharias, K.:
- [1974] Nichtlineare Operatorgleichungen und Operator-differentialgleichungen. Akademie-Verlag, Berlin 1974. - 281 S.
- Grisvard, P.:
- [1976] Behavior of the solutions of an boundary value problem in a polygonal or polyhedral domain. in: Hubbard, B. (ed.): Numerical solution of partial differential equations III, SYNSPADE 1975, 207-274. Academic Press, New York 1976.
- [1985] Elliptic problems in nonsmooth domains. Pitman, Boston-London-Melbourne 1985. - 410 S.
- [1986] Problèmes aux limites dans les polygones. Mode d'emploi. EDF Bull. Direction Etudes Rech Sér. C, Math. Inform., 1(1986), 21-59.
- Guerra, F.M.; Becker, E.B.:
- [1978] Finite element analysis for the adaptive method of rezoning. TICOM Report 78 - 13, University of Texas, Austin 1978. - 167 S.
- Gui, W.; Babuška, I.:
- [1986] The h, p and h-p versions of the finite element method in 1 dimension. Numer. Math. 49(1986)6, 577-683.
- Hackbusch, W.; Trottenberg, U. (ed.):
- [1986] Proceedings of the second European conference held at the University of Cologne, Cologne, October 1-4, 1985. Lecture Notes in Math. 1228. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo 1986. - vi+335 S.

Hartwig, K.-H.; Semmler, U.:

- [1990] Tetraedernetze: Automatische Generierung, FEM-Ansätze und effektive Lösungsverfahren. Preprint no. 162, Sektion Mathematik u. FPM, TU Chemnitz 1990.

Heinrich, B.:

- [1987] Finite difference methods on irregular networks. Mathematical Research, Bd. 33, Akademie-Verlag, Berlin 1987.
- [1990a] Singularities at axisymmetric edges and their treatment by Fourier series. Preprint no. 142, Sektion Mathematik, TU Karl-Marx-Stadt 1990.
- [1990b] A singularity function for the Poisson equation in axisymmetric domains with edges. Preprint no. 143, Sektion Mathematik, TU Karl-Marx-Stadt 1990.

Heinrich, B.; Fischer, S.:

- [1989] Lösung spezieller 3D-Randwertaufgaben mittels gekoppelter Fourier-Finite-Elemente-Methode. Preprint no. 100, Sektion Mathematik, TU Karl-Marx-Stadt 1989.

Heinrich, B.; Meisel, M.:

- [1989] Integralbilanzmethode für elliptische Probleme auf lokal verfeinerten Netzen. Preprint no. 115, Sektion Mathematik, TU Karl-Marx-Stadt 1989.

Jamet, P.:

- [1976a] Estimation de l'erreur d'interpolations dans un domaine variable et application aux éléments finis quadrilatéraux dégénérés. Presses de l'Université de Montreal 1976.
- [1976b] Estimations d'erreur pour des éléments finis droits presque dégénérés. R.A.I.R.O. Anal. Numér. 10(1976) 3, 43-61.

Kellogg, R.B.:

- [1971] Singularities in interface problems. in: Hubbard, B. (ed.): Numerical solution of partial differential equations II, SYNSPADE, 351-400. Academic Press, New York-London 1971.
- [1972] Higher order singularities for interface problems. in: Aziz, A.K. (ed.): The mathematical foundations of the finite element method, 589-602. Academic Press, New York-London 1972. - 797 S.

Křížek, M.:

- [1989] On semiregular families of triangulations and linear interpolation. Equadiff VII, 1989.

Kufner, A.:

- [1980] Weighted Sopotev spaces. Teubner-Texte zur Mathematik, Bd. 31, BSB Teubner, Leipzig 1980. - 152 S.

Kufner, A.; Sändig, A.-M.:

- [1987] Some applications of weighted Sobolev spaces. Teubner-Texte zur Mathematik, Bd. 100, BSB Teubner, Leipzig 1987. - 268 S.

Lehmann, R.:

- [1986a] Computable error bounds in the finite element method. IMA J. Numer. Anal. 6(1986)3, 265-271.
- [1986b] Computable error estimates in the finite element method. in: Strehmel, K. (ed.): Numerical treatment of differential equations, 102-105. Teubner-Texte zur Mathematik, Bd. 82, BSB Teubner, Leipzig 1986. - 204 S.
- [1987] A computable finite element interpolation error bound in the uniform metric. in: Adams, E. (ed.): Discretization in differential equations and enclosures (Weissig, 1986), 137-143. Mathematical Research, Bd. 36, Akademie-Verlag, Berlin 1987. - 255 S.

Li, Z.C.; Bui, T.D.:

- [1988a] A new kind of combinations between the Ritz-Galerkin and finite element methods for singularity problems. Computing 40(1988)1, 29-50.
- [1988b] Generalised hybrid-combined methods for the singularity problems of homogeneous elliptic equations. Internat. J. Numer. Methods Engrg. 26(1988)4, 785-803.

Maz'ja, V.G.; Roßmann, J.:

- [1984] Über die Lösbarkeit und die Asymptotik der Lösungen elliptischer Randwertaufgaben in Gebieten mit Kanten I, II, III. Preprints P-Math-07/84, 30/84, 31/84, AdW der DDR, Institut für Mathematik, Berlin 1984.
- [1988] Über die Asymptotik der Lösungen elliptischer Randwertaufgaben in der Umgebung von Kanten. Math. Nachr. 138(1988), 27-53.

Meisel, M.:

- [1990] Integralbilanzmethode für Randwertaufgaben mit Lösungen im Sobolevraum $W_2^{1+\tau}$. Dissertation A, Sektion Mathematik, TU Chemnitz 1990. - 152 S.

Michavila, F.:

- [1987] On different numerical methods to solve singular boundary problems. in: Ortiz, E.L. (ed.): Numerical approximation of partial differential equations, 109-120. Elsevier Science Publishers B.V. (North Holland), 1987. - 433 S.

Michlin, S.G.:

[1976] Approximation auf dem kubischen Gitter. Akademie-Verlag, Berlin 1976. - 195 S.

[1978] Partielle Differentialgleichungen in der mathematischen Physik. Akademie-Verlag, Berlin 1978. - 519 S.

Nečas, J.:

[1967] Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques. Academica, Prague 1967. - 351 S.

Nitsche, J.A.; Schatz, A.H.:

[1974] Interior estimates for Ritz-Galerkin methods. Math. Comp. 28(1974), 937-958.

Oden, J.T.; Reddy, J.N.:

[1976] An introduction to the mathematical theory of finite elements. John Wiley & Sons Inc., New York-London-Sydney-Toronto 1976. - 429 S.

von Petersdorff, T.:

[1989] Randwertprobleme der Elastizitätstheorie für Polyeder - Singularitäten und Approximationen mit Randelementmethoden. Dissertation, TH Darmstadt 1989. - 133 S.

von Petersdorff, T.; Stephan, E.P.:

[1988] Decompositions in edge and corner singularities for the solution of the Dirichlet problem of the Laplacian in a polyhedron. Preprint no. 1150, Fachbereich Mathematik, TH Darmstadt 1988.

Raugel, G.:

[1978] Résolution numérique par une méthode d'éléments finis du problème Dirichlet pour le Laplacien dans un polygone. C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A 286 (1978)18, A791-A794.

Rempel, S.:

[1987] Regularity for a class of degenerate problems. Preprint P-Math-06/87, AdW IMath, Berlin 1987.

[1989] Corner singularity for transmission problems in three dimensions. Preprint P-Math-03/89, AdW IMath, Berlin 1989.

Rjasanow, S.:

[1986] Dokumentation und theoretische Grundlagen zum Programm SOLKLZ. Preprint no. 15, Sektion Mathematik, TU Karl-Marx-Stadt 1986.

Roßmann, J.:

[1988] Gewichtete Sobolev-Slobodezkij-Räume und Anwendungen auf elliptische Randwertaufgaben in Gebieten mit Kanten. Dissertation B, Sektion Mathematik, Universität Rostock 1988.

- [1990] The asymptotics of the solutions of elliptic variational problems in domains with edges. ZAA 9(1990)6, 565-578.
- Sändig, A.-M.:
- [1989] Persönliche Mitteilung
- [1990] Error estimates for finite-element solutions of elliptic boundary value problems in non-smooth domains. ZAA 9(1990)2, 133-153.
- Schatz, A.H.; Wahlbin, L.B.:
- [1978] Maximum norm estimates in the finite element method on plane polygonal domains, part 1. Math. Comp. 32 (1978)141, 73-109.
- [1979] Maximum norm estimates in the finite element method on plane polygonal domains, part 2. Math. Comp. 33 (1979)146, 465-492.
- Semmler, U.:
- [1987] Finite-Elemente-Programmsystem FEPAS-3D für die Analyse dreidimensionaler Probleme. Preprint no. 49, Sektion FPM, TU Karl-Marx-Stadt 1987.
- [1989] Vorkonditionierungen für konjugierte Gradientenverfahren zur Lösung großdimensionierter FEM-Systeme. Preprint no. 92, Sektion FPM, TU Karl-Marx-Stadt 1989.
- [1990a] Zu einigen Fragen der Lösung großer 3D-FEM-Systeme mittels iterativer Verfahren. Preprint no. 147, Sektion FPM, TU Karl-Marx-Stadt 1990.
- [1990b] Ein System zur Verwaltung großer Datenfelder variabler Länge in Rechnern beliebiger Hauptspeichergröße. Preprint no. 148, Sektion FPM, TU Karl-Marx-Stadt 1990.
- Smirnow, W.I.:
- [1976] Lehrgang der höheren Mathematik, Teil V. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1976.
- Stephan, E.; Whiteman, J.R.:
- [1981] Singularities of the Laplacian at corners and edges of three-dimensional domains and their treatment with finite element methods. Techn. Rep. BICOM 81/1, Ins. Comp. Math. Brunel, 1981.
- [1988] Singularities of the Laplacian at corners and edges of three-dimensional domains and their treatment with finite element methods. Math. Meth. Appl. Sci. 10(1988)3, 339-350.

Strang, G.; Fix, G.:

- [1973] An analysis of the finite element method. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs (New Jersey) 1973.

Walden, H.; Kellogg, R.B.:

- [1977] Numerical determination of the fundamental eigenvalue for the Laplace-operator on a spherical domain. J. Eng. Math. 11(1977), 299-318.

Whiteman, J.R.:

- [1981] Finite element methods for singularities in two- and three-dimensions. Techn. Rep. BICOM 81/4, Ins. Comp. Math. Brunel, 1981.
- [1986] Singularities in two- and three-dimensional elliptic problems and finite element methods for their treatment. Equadiff 6 (Brno, 1985), Lecture Notes in Math. 1192, 345-352. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo 1986.
- [1987] Finite element methods for treating problems involving singularities, with applications to linear elastic fracture. in: Ortiz, E.L. (ed.): Numerical approximation of partial differential equations, 109-120. Elsevier Science Publishers B.V. (North Holland), Amsterdam-New York 1987. - xii+433 S.

Whiteman, J.R.; Schleicher, K.T.:

- [1984] Introduction to the treatment of singularities in elliptic boundary value problems using finite element techniques. in: Griffiths, D.F. (ed.): The mathematical basis of finite element methods, 169-183. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York 1984. - v+189 S.

Whiteman, J.R.; Thompson, G.M.:

- [1984] Finite element calculations of parameters for singularities in problems of fracture. Techn. Rep. BICOM 84/3, Ins. Comp. Math. Brunel, 1984.
- [1985] Finite element calculations of parameters for singularities in problems of fracture. in: The mathematics of finite elements and applications (MAFELAP V, Uxbridge, 1984), 27-37. Academic Press, London-New York 1985.

Wigley, N.M.:

- [1987] Stress intensity factors and improved convergence estimates at a corner. SIAM J. Numer. Anal. 24(1987) 2, 350-354.

Wloka, J.:

- [1982] Partielle Differentialgleichungen. BSB Teubner, Leipzig 1982. - 500 S.

Zienkiewicz, O.C.:

[1983] Methode der finiten Elemente. Fachbuchverlag, Leipzig 1983. - 743 S.

Кондратьев, В.А.:

[1967] Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками. Труды Моск. Матем. Общ. 16(1967), 209-292.231.2134.2

[1970] О гладкости решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка в кусочно-гладкой области. Дифференциальные уравнения 6(1970)10, 1831-1843.

[1977] Особенности решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка в окрестности ребра. Дифференциальные уравнения 13(1977)1, 2027-2032.

Кондратьев, В.А.; Олейник, О.А.:

[1983] Краевые задачи для уравнения с частными производными в негладких областях. Успехи мат. наук 38(1983)2, 3-76.

Лазаров, Р.Д.:

[1981] К вопросу о сходимости разностных схем для обобщенных решений уравнения Пуассона. Дифф. уравн. 17(1981)7. 1285-1303.

Мазья, В.Г.; Пламеневский, Б.А.:

[1983а] Первая краевая задача для классических уравнений математической физики в областях с кусочно-гладкими границами, часть I. ZAA 2(1983)4, 335-359.

[1983б] Первая краевая задача для классических уравнений математической физики в областях с кусочно-гладкими границами, часть II. ZAA 2(1983)6, 523-551.

Мысовских, И.П.:

[1981] Интерполяционные кубатурные формулы. Наука, Москва 1981. - 336 S.

Никишкин, В.А.:

[1979] Особенности решения задачи Дирихле для эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка в окрестности ребра. Вестник Московского университета, серия математика 34(1979)2, 51-62.

Оганесян, Л.А.; Ривкинд, В.Я.; Руховец, Л.А.:

[1974] Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений - часть II. Дифференциальные уравнения и их применение - труды семинара, выпуск 8, Вильнюс 1974. - 322 S.

Оганесян, Л.А.; Руховец, Л.А.:

[1968] О вариационно-разностных схемах для линейных эллиптических уравнений второго порядка в двумерной области с кусочно-гладкой границей. ЖВММФ 8(1968)1, 97-114.

[1979] Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Изд-во АН Армянской ССР, Ереван 1979. - 235 с.

Сиганевич, Л.Г.:

[1988] О наилучшей оценке погрешности линейной интерполяции на треугольнике функций из $W_2^2(T)$. Докл. Акад. Наук СССР 300(1988)4, 811-814.

Шайдуров, В.В.:

[1989] Многосеточные методы конечных элементов. Наука, Москва 1989. - 288 с.

AnlageDas 3D-Finite-Elemente-Programmsystem FEMPS3DInhalt:

1. Vorbemerkungen
 2. Verarbeitbare Problemstellungen
 3. Netzgenerierung
 4. Randbedingungen
 5. Aufbau des Gleichungssystems (Assemblierung)
 6. Quadraturformeln
 7. Auflösung des Gleichungssystems
 8. Auswertung (Postprocessing)
 9. Allgemeiner Ablauf
 10. Belastbarkeit des Programms
 11. Nutzung zu nichtakademischen Zwecken
 12. Bewertung
-

1. Vorbemerkungen

Die Entwicklung des FEM-Programmsystems FEMPS3D wurde durch den Wunsch von Praxispartnern der Sektion Mathematik der TU Chemnitz motiviert, schnelle Spezialprogramme zur Lösung von Wärmeleitproblemen innerhalb des CAD-Prozesses zur Verfügung zu haben. Außerdem sollte Experimentalsoftware zur Untermauerung theoretischer Resultate der numerischen Analysis durch praktische FEM-Rechnungen geschaffen werden.

Das Programm paßt sich in die Softwareentwicklungsstrategie der Sektion ein (vgl. [Hartwig/Semmler 1990]). Die Entwicklungsarbeiten bauen auf Erfahrungen mit 2D-Finite-Elemente-Programmsystemen auf [Jung 1988]. Zur Lösung des FEM-Gleichungssystems konnte auf das Programmpaket SOLKLZ, die Realisierung des Verfahrens der konjugierten Gradienten mit verschiedenen Vorkonditionierungen [Rjasanow 1986], zurückgegriffen werden.

Im gesamten Entwicklungsprozeß wurde Wert auf Nutzerfreundlichkeit gelegt. Das Programm ist dialogorientiert aufgebaut, in gewissem Maße selbsterklärend und robust. (Unsinnige Eingaben werden weitestgehend zurückgewiesen.) Es wurde darauf geachtet, daß der Nutzer nur die Geometrie, nicht aber die interne Datenstruktur zu kennen braucht. Wo nötig, sind Koordinatenwerte einzugeben, niemals Nummern von Knoten oder Elementen. Dadurch wird auch die Anzahl der notwendigen Eingaben nicht von der gewählten Vernetzung, insbesondere der Schrittweite, beeinflußt.

2. Verarbeitbare Problemstellungen

Mit FEMPS3D kann ein elliptisches Randwertproblem für eine skalare Funktion über einem dreidimensionalen Gebiet in verallgemeinerter Formulierung gelöst werden, wobei (i.allg. in-

homogene) Randbedingungen 1., 2. und 3. Art auftreten können:
 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet mit dem Rand $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$ für $i \neq j$, und bezeichne

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \kappa \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Gamma_3} \sigma uv \, d\Gamma$$

$$(F, v) := \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma_2} g_2 v \, d\Gamma + \int_{\Gamma_3} g_3 v \, d\Gamma$$

$$V_0 := \{v \in W^{1,2}(\Omega) : v|_{\Gamma_1} = 0\}$$

$$V_* := \{v \in W^{1,2}(\Omega) : v|_{\Gamma_1} = g_1\}$$

dann lautet die Aufgabe: Finde $u \in V_*$, so daß

$$\forall v \in V_0 \quad a(u, v) = (F, v).$$

Die Daten müssen hinreichend glatt sein, damit die Integrale existieren.

3. Netzgenerierung

Mit FEMPS3D kann kein Netz erstellt werden, es muß beim Start des Programms bereits vorhanden und in einer Datei abgelegt sein. Es können Hexaederelemente (8 bzw. 20 Knoten, je nachdem, ob mit linearen oder quadratischen Ansatzfunktionen gerechnet werden soll), Pentaederelemente (6/15) und Tetraederelemente (4/10) der Randknoten-(Serendipity-)Klasse verwendet werden (vgl. z.B. [Zienkiewicz 1983, Kap.7]).

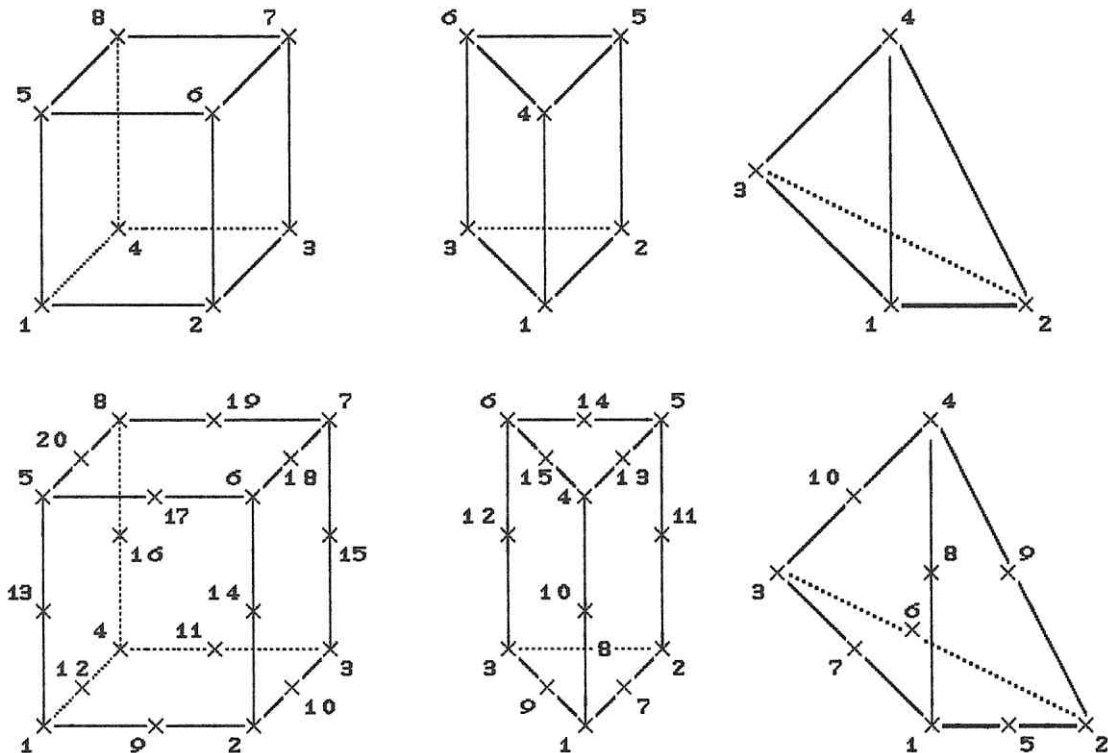


Abb. 1: Elementtypen mit Knotennummerierung nach FEMDAS [1986, Kap. 3.5.4.]-Standard

Es ist jeder beliebige Netzgenerator einsetzbar, wenn er nur o.g. Elementtypen verwendet. Gegebenenfalls wird ein Adapterprogramm benötigt, das die Ausgabedatei des Netzgenerators in eine Eingabedatei für FEMPS3D konvertiert. Gute Erfahrungen wurden mit dem Netzgenerator PCDTRI (vgl. [Hartwig/Semmler 1990] und [Hartwig et al. 1990]) gesammelt; hier kommt man ohne Adapter aus. Aber auch mit COSAR [1984] erstellte Netze wurden schon verwendet.

4. Randbedingungen

Die Grenzen von Γ_1 , Γ_2 und Γ_3 müssen mit Elementgrenzen des Oberflächennetzes übereinstimmen. Auf Γ_1 erhalten alle Knoten den exakten Wert zugewiesen, diese werden beim Aufbau der Steifigkeitsmatrix und der rechten Seite eingearbeitet. Die Integrale über Γ_2 und Γ_3 werden numerisch berechnet, die entstehenden (Oberflächen-)Elementsteifigkeitsmatrizen und Element-Rechte-Seiten werden entsprechend aufaddiert.

5. Aufbau des Gleichungssystems (Assemblierung)

Die Matrix wird in der am meisten Speicherplatz sparenden Art, der Kompaktdatei (vgl. z.B. [Rjasanow 1986]), gespeichert. Das bedeutet, daß nur Nichtnullelemente des oberen Dreiecks (Ausnutzung der Symmetrie) der Matrix und die zugehörigen Indizes Platz zugewiesen bekommen. Deshalb wird im 1. Schritt bei der Assemblierung aus der Netztopologie die Struktur der Matrix ermittelt. Danach werden (Volumen- und Oberflächen-) Elementsteifigkeitsmatrizen und Element-Rechte-Seiten (Elementlastvektoren) durch numerische Auswertung der Integrale ermittelt (Quadraturformeln siehe 6.), ggf. die Randbedingungen 1. Art eingearbeitet und zur großen Matrix aufsummiert. In einem letzten Schritt werden evtl. durch Auslöschung mehrerer Summanden entstandene Nullelemente aus der Matrix entfernt.

6. Quadraturformeln

Da nur wenige Erfahrungen vorlagen und FEMPS3D auch als Experimentalsoftware eingesetzt wird, ist eine Auswahl verschiedener Quadraturformeln programmiert (vgl. Tabelle 1) [Мысовских 1981] [Altenbach/Sacharov 1982, Kap.3.5.5.] [Zienkiewicz 1983, Kap. 8. und 11.].

Die optimale Integrationsformel (möglichst wenig Integrationspunkte, aber genau genug) hängt von der Glattheit der Funktionen κ , f , σ , g_2 und g_3 und vom Grad der Ansatzfunktionen ab. Beim Laplace-Operator und konstanten rechten Seiten können für Hexaederelemente 6 Punkte bei linearem Ansatz und 14 Punkte bei quadratischem Ansatz empfohlen werden. Bei Tetraederelementen mit linearem Ansatz integriert 1 Punkt bereits exakt. Für unerfahrene Nutzer werden Standardwerte angeboten, die natürlich nicht optimal sein müssen.

Elementtyp	Anz. d. I.-Pkt.	Erklärung	integriert exakt $x^i y^j$ bzw. $x^i y^j z^k$
Viereck	1	Schwerpunkt	$i, j \leq 1$
	4	2x2 Gaußpunkte	$i, j \leq 3$
	9	3x3 Gaußpunkte	$i, j \leq 5$
Dreieck	1	Schwerpunkt	$i+j \leq 1$
	3	Seitenmitten	$i+j \leq 2$
	4	Gaußpunkte	$i+j \leq 3$
	7	Gaußpunkte	$i+j \leq 5$
Hexaeder	1	Schwerpunkt	$i, j, k \leq 1$
	8	Gaußpunkte	$i, j, k \leq 3$
	27	Gaußpunkte	$i, j, k \leq 5$
	6	Flächenmittelpunkte	$i+j+k \leq 3$
	14	verkürzte Formel nach Irons	$i+j+k \leq 5$
Pentaeder	1	Schwerpunkt	$i+j \leq 1, k \leq 1$
	3	3 (Dreieck) x1 (z-Richtung)	$i+j \leq 2, k \leq 1$
	4	4 (Dreieck) x1 (z-Richtung)	$i+j \leq 3, k \leq 1$
	6	3 (Dreieck) x2 (z-Richtung)	$i+j \leq 2, k \leq 3$
	8	4 (Dreieck) x2 (z-Richtung)	$i+j \leq 3, k \leq 3$
	12	4 (Dreieck) x3 (z-Richtung)	$i+j \leq 3, k \leq 5$
	14	7 (Dreieck) x2 (z-Richtung)	$i+j \leq 5, k \leq 3$
	21	7 (Dreieck) x3 (z-Richtung)	$i+j \leq 5, k \leq 5$
Tetraeder	1	Schwerpunkt	$i+j+k \leq 1$
	4	Gaußpunkte	$i+j+k \leq 2$
	5	Gaußpunkte	?
	11	Gaußpunkte	$i+j+k \leq 4$
	14	Gaußpunkte	$i+j+k \leq 5$

Tabelle 1: In FEMPS3D realisierte Quadraturformeln

7. Auflösung des Gleichungssystems

Das Gleichungssystem wird mit SOLKLZ gelöst. SOLKLZ [Rjasanow 1986] ist eine Realisierung des Verfahrens der konjugierten Gradienten für kompakt gespeicherte Matrizen. Als Vorkonditionierungen können im Dialog gewählt werden:

- die unvollständige Cholesky-Zerlegung IC(0)
- die erweiterte unvollständige Cholesky-Zerlegung IC(1)
- die modifizierte unvollständige Cholesky-Zerlegung MIC und
- die Methode der genäherten Faktorisierung MAF.

Für keine der Vorkonditionierungen konnte, insbesondere bei Aufgaben mit quadratischen Ansatzfunktionen, uneingeschränkte

Ausführbarkeit für die FEM-Steifigkeitsmatrizen gezeigt werden (vgl. [Rjasanow 1986] und die dort zitierte Literatur). Meldet sich das Verfahren mit Fehler zurück, muß man eine andere Methode wählen. MAF ist sehr anfällig, aber bei Durchführbarkeit besonders schnell. Empfohlen werden kann IC(0). Wenn alle Möglichkeiten versagen, kann man auch ohne Vorkonditionierung arbeiten. Das dauert i.allg. sehr lange, führt aber immer zur Lösung. Allerdings ist der Fall, daß keine der angegebenen Vorkonditionierungen durchführbar ist, beim Autor noch nie eingetreten.

Als Abbruchschranken für den iterativen Algorithmus wurden $\varepsilon=10^{-5}$ oder 200 Iterationen als Standard gesetzt. Diese Werte sind aus der Erfahrung sinnvoll. Es ist aber möglich, sie im Dialog zu ändern. Denkbar wäre eine Vergrößerung von ε bei großen Beispielen mit sehr fehlerbehafteten Eingabedaten und eine Verkleinerung bei akademischen Aufgaben, um sicherzugehen, daß der FEM-Approximationsfehler nicht von Fehlern aus der Auflösung verfälscht wird.

Andere Algorithmen sind leicht einbaubar, wenn sie für Matrizen in Kompaktspeicherweise programmiert sind.

8. Auswertung (Postprocessing)

Es wurde ein Dialogprogramm erarbeitet, mit dem verschiedenste Angaben zur abgelaufenen Rechnung abgefragt und weiterverarbeitet werden können. Die Ausgabe kann außer auf den Bildschirm noch in Dateien zum Drucken/Plotten erfolgen. Ausgegeben werden können Angaben zum Netz, zu den verwendeten Quadraturformeln, zu den in den einzelnen Schritten benötigten CPU-Zeiten, zum gelösten Gleichungssystem (Vorkonditionierungsmethode, benötigte Iterationszahl, Fehlernormen,...), zum benötigten Speicherplatz, Wertetabellen (je nach Wunsch in verschiedenen Teilbereichen), Isolinien- und Lösungsgebirgsdarstellungen auf Teilen der Oberfläche bzw. geeigneten Schnittflächen [Hartwig et al. 1990].

Akademische Rechnungen unterscheiden sich von Nutzrechnungen häufig dadurch, daß die exakte Lösung der Randwertaufgabe bekannt ist. In diesem Fall interessieren Angaben zum Fehler (Differenz zwischen exakter und FEM-Lösung). Für die damit vergleichbare Differenz zwischen der Interpolante der exakten Lösung und der FEM-Lösung können Wertetabellen und graphische Darstellungen ausgegeben sowie Normen (Maximumnorm, Energienorm und L_2 -Norm) berechnet werden.

9. Allgemeiner Ablauf

Vor dem Start von FEMPS3D ist das Finite-Elemente-Netz zu generieren und in einer Datei abzuspeichern (vgl. 3.). Außerdem sind in das Programmsystem Funktionsunterprogramme für die Koeffizienten α und ϵ , die rechten Seiten f , g_2 und g_3 und bei akademischen Rechnungen für die Lösung u einzubinden.

Im allgemeinen wird man mit FEMPS3D die Schritte Einlesen des Netzes, Charakterisierung der Randbedingungen, Generierung der Steifigkeitsmatrix und der rechten Seite, Lösen des Gleichungssystems und Auswertung der Rechnung abarbeiten. Alle dazu nötigen Daten werden im Dialog eingegeben.

Von diesem Schema kann man jedoch abweichen: Wenn zur Auswertung keine Zeit mehr ist, kann man die Lösung in einer Datei abspeichern und später wieder einlesen. Für die akademischen Rechnungen wurden Routinen zum Graduieren des Netzes geschaffen. Es ist möglich, zum Test anderer Vorkonditionierungen das Gleichungssystem nochmals zu lösen oder mit anderen Quadraturformeln den gesamten Assemblierungsprozeß zu wiederholen.

10. Belastbarkeit des Programms

Falls genügend Rechenzeit und Hauptspeicher zur Verfügung steht, ist es mit der derzeit realisierten Variante von FEMPS3D möglich, Netze mit maximal 32767 ($2^{15}-1$) Knoten zu bearbeiten.

Die größten Testbeispiele wurden mit 16606 Knoten, 87480 Tetraedern gerechnet. Zur Assemblierung wurden bei 5 Integrationspunkten rund 40 Minuten und zum Lösen des Gleichungssystems rund 30 Minuten benötigt. (Die Assemblierungszeit ist abhängig von der Anzahl der Operationen, die zur Berechnung der Funktionswerte (eingebundene problemementsprechende FUNCTION-Unterprogramme) benötigt werden. Netz und Randbedingungen haben Einfluß auf die Eigenschaften der Matrix und damit auf die Zeit zur Auflösung.)

Alle Rechnungen wurden unter dem Betriebssystem VMS auf 32-Bit-Technik mit virtueller Hauptspeicherverwaltung durchgeführt.

11. Nutzung zu nichtakademischen Zwecken

Die Anwendbarkeit von FEMPS3D zu praktischen Zwecken soll durch einige Zeichnungen illustriert werden. Abb.2 zeigt ein Tetraedernetz für ein Viertel des Kolbenoberteils eines Benzinmotors. Die Isolinien sind hier der Übersichtlichkeit wegen in ein Geometriemodell (CAD-Modell) eingezeichnet (Abb. 3). Ein relativ grobes Netz aus Hexaedern und Pentaedern mit direkt eingezeichneten Isolinien ist in Abb.4 und 5 zu sehen.

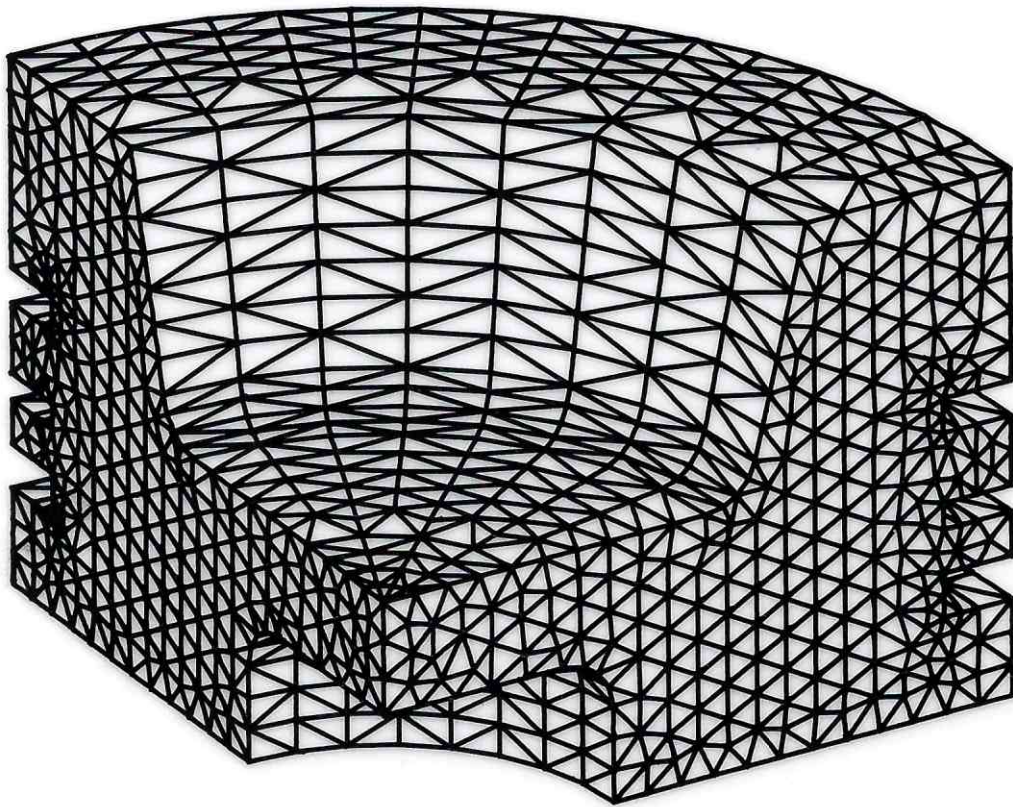


Abb. 2: Tetraedervernetzung eines Kolbenoberteils

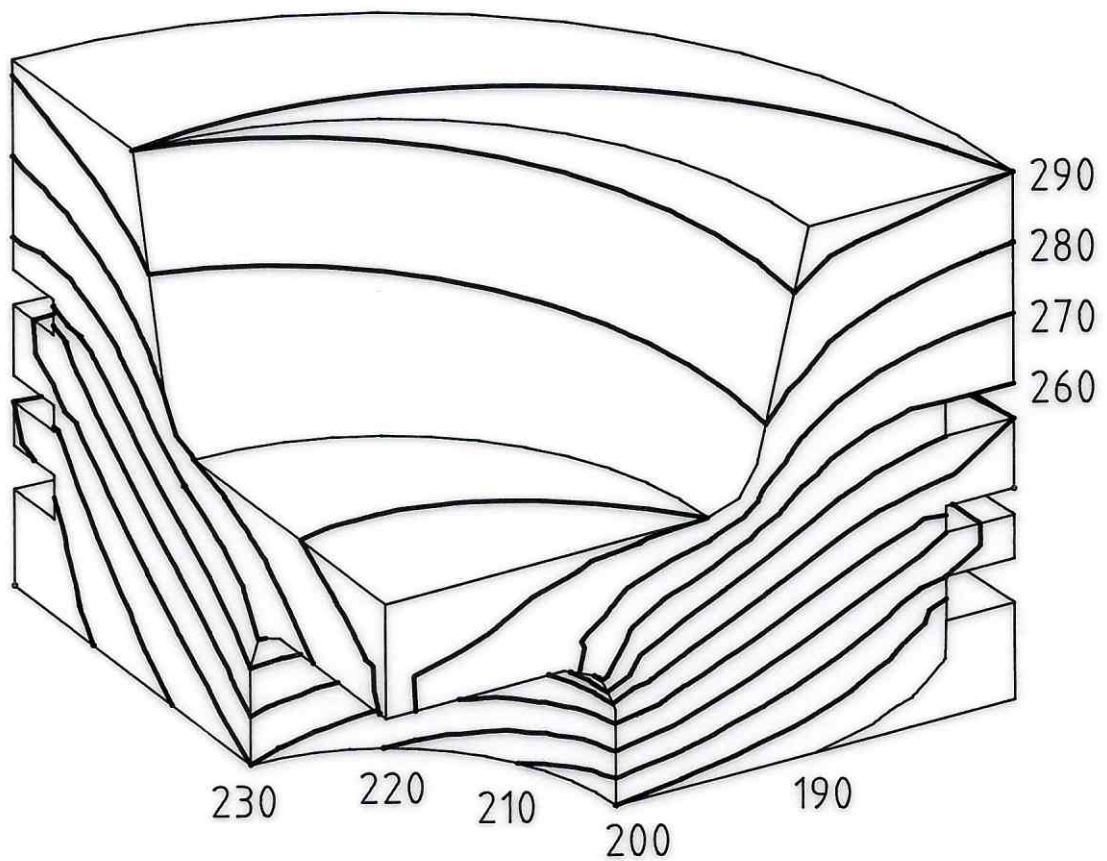


Abb. 3: Isolinien der Temperatur

Vernetzung mit Hexaedern und Pentaedern

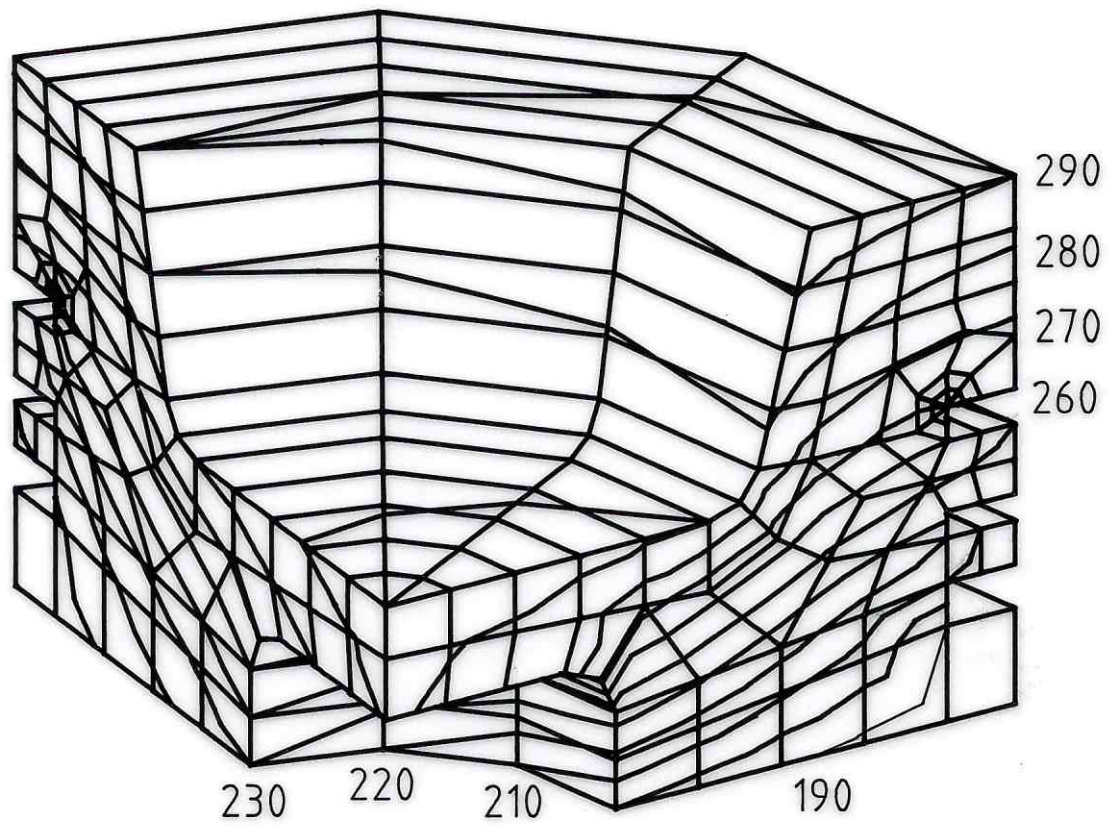


Abb. 4: Ansicht von schraeg oben

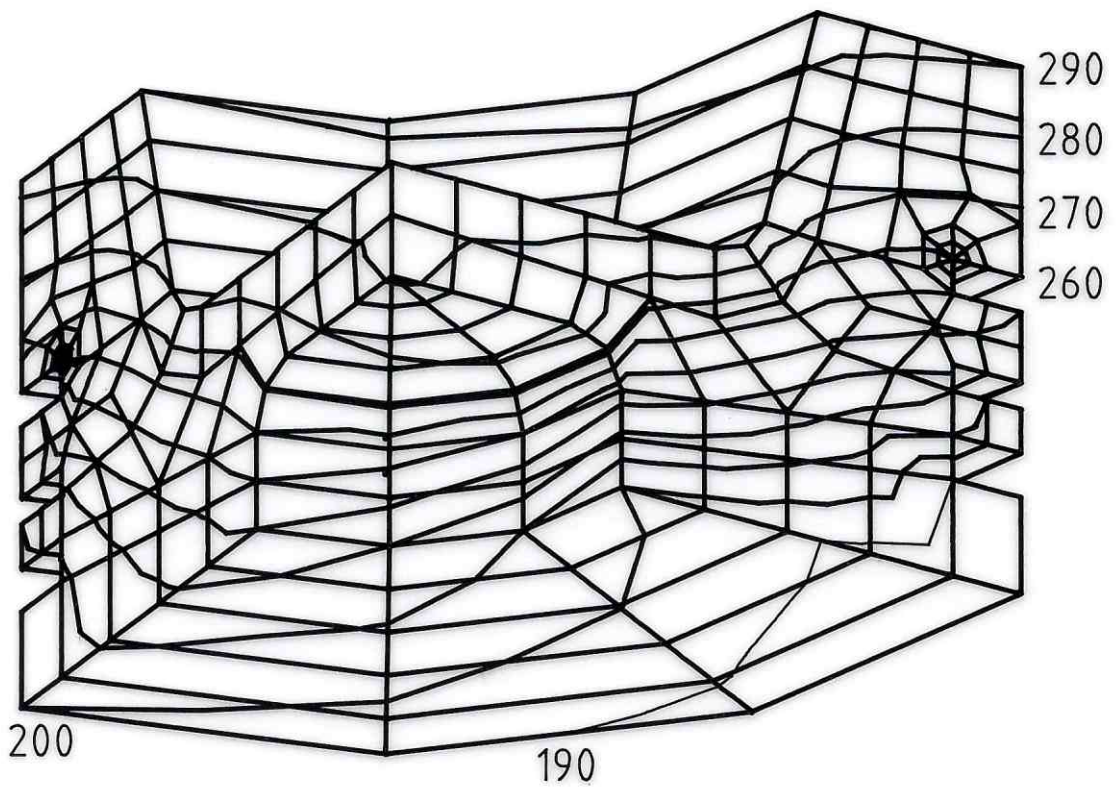


Abb. 5: Ansicht von schraeg unten

12. Bewertung

Mit FEMPS3D ist ein nutzerfreundliches Finite-Elemente-Programmsystem entstanden; Ein- und Ausgabe sind dialogorientiert, und der Nutzer kommt mit einem Minimum an Informationen über das Netz (die Datenstruktur muß ihm nicht bekannt sein!) und die Algorithmen aus. Durch die Verwendung der Kompaktspeichertechnik für die Steifigkeitsmatrix ist FEMPS3D sehr platzsparend und erlaubt dadurch auch recht feine Vernetzungen. Das moderne iterative Lösungsverfahren ist eine der Ursachen für relativ kurze Rechenzeiten. Dadurch werden Variantenrechnungen im CAD-Prozeß gut unterstützt.

FEMPS3D ist gut geeignet für numerische Experimente. Es können FEM-Rechnungen mit linearen und quadratischen Ansatzfunktionen durchgeführt werden. Eine große Vielfalt von Integrationsformeln und mehrere Vorkonditionierungsmethoden zur schnellen Lösung des Gleichungssystems werden angeboten. Durch den gut strukturierten Aufbau kann das Programm leicht erweitert werden.

Die Menügestaltung mag anspruchsvollen Nutzern nicht schön genug sein. Der Verzicht auf Windowtechnik kann jedoch beim Übergang zu anderer Hardware auch ein Vorteil sein.

Im Vergleich zu anderen Programmsystemen fehlt die Vielfalt bezüglich der verarbeitbaren Problemstellungen, z.B. aus der Elastizitätstheorie. Bei einer diesbezüglichen Erweiterung wären auch andere Vorkonditionierungsmethoden empfehlenswert (vgl. [Semmler 1989, 1990a]).

Substrukturtechniken sind in FEMPS3D nicht realisiert.

Literatur:

Altenbach, J.; Sacharov, A.S. (ed.):

[1982] Die Methode der finiten Elemente in der Festkörpermechanik. Fachbuchverlag, Leipzig 1982. - 496 S.

COSAR

[1984] COSAR/84 Nutzerhandbuch (Teil I: Grundlagen, Teil II: Eingabevorschrift). TH Magdeburg, Sektion Maschinenbau, WB Festkörpermechanik 1984. - 604+671 S.

FEMDAS

[1986] FEM-Datenschnittstelle FEMDAS, Entwurf zum DDR-Standard, TGL 44640. Amt für Standardisierung, Meßwesen und Warenprüfung, Berlin 1986.

Hartwig, K.-H.; Liebermann, H.; Strauch, M.:

[1990] Geometrieorientiertes Pre- und Postprocessing für Finite Elemente- bzw. Finite Differenzenmethoden. in: Problemseminar Computergeometrie, Gaußig 1990. (erscheint in der Schriftenreihe des WBZ Computer-mathematik der TU Dresden)

Hartwig, K.-H.; Semmler, U.:

- [1990] Tetraedernetze: Automatische Generierung, FEM-Ansätze und effektive Lösungsverfahren. Preprint no. 162, Sektion Mathematik u. FPM, TU Chemnitz 1990.

Jung, M.:

- [1988] Das Multigridprogrammsystem FEMGP zur Lösung elliptischer und parabolischer Differentialgleichungen (Version 09.88) Programmdokumentation, Sektion Mathematik, TU Karl-Marx-Stadt 1988.

- [1989] Eine Einführung in die Theorie und Anwendung von Mehrgitterverfahren. Wiss. Schriftenreihe der TU Karl-Marx-Stadt, Heft 9/1989.

Мысовских, И.П. (Mysovskih, I.P.):

- [1981] Интерполяционные кубатурные формулы. Наука, Москва 1981. - 336 S.

Rjasanow, S.:

- [1986] Dokumentation und theoretische Grundlagen zum Programm SOLKLZ. Preprint no. 15, Sektion Mathematik, TU Karl-Marx-Stadt 1986.

Semmler, U.:

- [1987] Finite-Elemente-Programmsystem FEPAS-3D für die Analyse dreidimensionaler Probleme. Preprint no. 49, Sektion FPM, TU Karl-Marx-Stadt 1987.

- [1989] Vorkonditionierungen für konjugierte Gradientenverfahren zur Lösung großdimensionierter FEM-Systeme. Preprint no. 92, Sektion FPM, TU Karl-Marx-Stadt 1989.

- [1990a] Zu einigen Fragen der Lösung großer 3D-FEM-Systeme mittels iterativer Verfahren. Preprint no. 147, Sektion FPM, TU Karl-Marx-Stadt 1990.

- [1990b] Ein System zur Verwaltung großer Datenfelder variabler Länge in Rechnern beliebiger Hauptspeichergröße. Preprint no. 148, Sektion FPM, TU Karl-Marx-Stadt 1990.

Zienkiewicz, O.C.:

- [1983] Methode der finiten Elemente. Fachbuchverlag, Leipzig 1983. - 743 S.

Erklärung

Ich erkläre, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur angefertigt habe.

Chemnitz, am 18.12.1990

Thesen

zur Dissertation A

Finite-Elemente-Methoden über lokal verfeinerten Netzen
für elliptische Probleme in Gebieten mit Kanten

zur Erlangung des akademischen Grades eines "Dr.rer.nat."

an der Technischen Universität Chemnitz

vorgelegt von Dipl.-Math. Thomas Apel

Chemnitz, den 18.12.1990

1. Die Lösung elliptischer Randwertprobleme 2. Ordnung in Gebieten mit Ecken und Kanten weist i.allg. Singularitäten auf. Diese führen zur Verringerung der Konvergenzordnung der Finite-Elemente-Methode in ihrer klassischen Version.

2. Durch geeignete Anpassung der Finite-Elemente-Methode in der Umgebung der Ecken und Kanten ist es möglich, die Konvergenzordnung zu verbessern und sogar die gleiche Ordnung wie bei Aufgaben mit glatten Lösungen zu erzielen. Indem analytische Erkenntnisse über die Eigenschaften der Lösung ausgenutzt werden, kann diese Anpassung zum einen durch eine Aufnahme singulärer Lösungsanteile in den Finite-Elemente-Raum erfolgen (Singularfunktionenmethode). Eine andere Möglichkeit besteht in einer gezielten Verfeinerung des Netzes an den Stellen, wo Lösungssingularitäten zu erwarten sind.

3. Eine Netzsteuerung derart, daß für alle Tetraederelemente Δ gilt:

$$\begin{aligned} h_{\Delta} &\sim hr_{\Delta}^{1-\mu}, & \text{falls } r_{\Delta} > 0, \\ h_{\Delta} &\sim h^{1/\mu}, & \text{falls } r_{\Delta} = 0, \end{aligned}$$

ist für Randwertaufgaben in Gebieten mit Kanten dafür geeignet, asymptotisch optimale Konvergenzresultate zu erzielen. Hierbei bezeichnen h den globalen Diskretisierungsparameter, h_{Δ} den Durchmesser eines Tetraederelements Δ , r_{Δ} dessen Abstand zu Kante und $\mu \in (0,1]$ den Netzsteuerparameter.

4. Die Anzahl der Elemente in der Vernetzung bleibt für einen Netzgraduierungsparameter $\mu > \frac{1}{3}$ in der gleichen Größenordnung wie bei nicht verfeinerten Netzen.

5. Gebiete mit gekrümmter Oberfläche sind nicht exakt vernetzbar. Der entstehende Fehler ist jedoch abschätzbar und bei geeigneter Vernetzung hinreichend klein.

6. Sowohl für die 1. als auch für die 2./3. Randwertaufgabe in Gebieten Ω mit einer Kante gilt für die Differenz zwischen der exakten Lösung u und einer geeignet mit Hilfe des Interpolationsoperators definierten approximierenden Funktion v_h :

$$\begin{aligned} \|u - v_h; W^{1,2}(\Omega)\| &\leq \begin{cases} Ch \|f; L_2(\Omega)\| & \text{für } \mu < \lambda \\ Ch^{(\lambda - \varepsilon)/\mu} \|f; L_2(\Omega)\| & \text{für } \mu \geq \lambda \end{cases} \\ \|u - v_h; L_2(\Omega)\| &\leq \begin{cases} Ch^2 \|f; L_2(\Omega)\| & \text{für } \mu < \frac{1}{2}(1 + \lambda) \\ Ch^{(1 + \lambda - \varepsilon)/\mu} \|f; L_2(\Omega)\| & \text{für } \mu \geq \frac{1}{2}(1 + \lambda) \end{cases} \end{aligned}$$

und für den Finite-Elemente-Fehler:

$$\begin{aligned} \|u - u_h; W^{1,2}(\Omega)\| &\leq \begin{cases} Ch \|f; L_2(\Omega)\| & \text{für } \mu < \lambda \\ Ch^{(\lambda - \varepsilon)/\mu} \|f; L_2(\Omega)\| & \text{für } \mu \geq \lambda \end{cases} \\ \|u - u_h; L_2(\Omega)\| &\leq \begin{cases} Ch^2 \|f; L_2(\Omega)\| & \text{für } \mu < \lambda \\ Ch^{2(\lambda - \varepsilon)/\mu} \|f; L_2(\Omega)\| & \text{für } \mu \geq \lambda \end{cases} \end{aligned}$$

Dabei sind $\mu \in (0,1]$ der Netzsteuerparameter, $\lambda \in (\frac{1}{2}, 1)$ ein die Qualität der Lösung charakterisierender Parameter (Singularitätenexponent), ε eine beliebig kleine positive reelle Zahl, h der globale Diskretisierungsparameter, C eine nur von der Aufgabenstellung abhängige Konstante und f die rechte Seite.

Ähnliche Aussagen können für Probleme in Polyedergebieten getroffen werden.

7. Die erhaltenen Fehlerabschätzungen sind optimal in dem Sinne, daß man in der betrachteten Klasse Aufgaben finden kann, für die im unverfeinerten Netz ($\mu=1$) gilt:

$$\|u - u_h; W^{1,2}(\Omega)\| \geq Ch^{\lambda}$$

8. Während sich bei der Singulärfunktionsmethode die Kondition der Steifigkeitsmatrix gegenüber Aufgaben mit regulären Lösungen verschlechtert, besitzt diese bei einer Netzverfeinerung mit einem Steuerparameter $\mu > \frac{1}{3}$ die gleiche Kondition wie bei regulären Aufgaben.

9. In Teilgebieten, die die Kante nicht enthalten, führt auch die Standard-Finite-Elemente-Methode (ohne Netzverfeinerung) mit linearen Elementen zur optimalen Konvergenzordnung in der $W^{1,2}$ -Norm. Die Größe der Konstante in der Fehlerabschätzung hängt dabei stark vom Abstand des Teilgebiets zur Kante ab.

10. Der folgende, aus 2 Schritten bestehende Algorithmus besitzt Vorteile bei der praktischen Umsetzung von Finite-Elemente-Problemen und liefert eine optimale Konvergenzrate:

(i) Man löse das Finite-Elemente-Problem über dem Gesamtgebiet über einem unverfeinerten Netz.

(ii) Man verbessere die Näherungsfunktion durch Lösen eines Finite-Elemente-Problems über einem verfeinerten Netz in der Umgebung der Kante. Die fehlenden Randbedingungen werden mit Hilfe der Lösung des 1. Schritts generiert.

11. Die Fehleranalyse hat nur dann größere Bedeutung, wenn die vorhergesagte asymptotische Ordnung auch bei praktischen Rechnungen mit vertretbarem Aufwand erreicht werden kann. Die folgende Aufgabenstellung ist für die betrachtete Klasse von Dirichletproblemen repräsentativ, d.h., Tests mit dieser Aufgabe sind aussagekräftig:

$$\text{Gesucht ist } u \in V_* : a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in V_0$$

$$\text{mit } a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \quad (f, v) = - \int_{\Omega} \Delta(r^{\frac{3}{2}} \chi \sin^{\frac{3}{2}} \varphi) v \, dx$$

$$\chi = (r^2 + z^2)^{-1/12} \left(\ln(10^{-3} (r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}) \right)^{-1}$$

$$\Omega = \{(y_1, y_2, y_3) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < r < 1, 0 < \varphi < \frac{3}{2}\pi, 0 < z < 1\}$$

$$V_0 = \{v \in W^{1,2}(\Omega) : v|_{\varphi=0} = 0, v|_{\varphi=\frac{3}{2}\pi} = 0, v|_{r=1} = 0\}$$

$$V_* = \{v \in W^{1,2}(\Omega) : v|_{\varphi=0} = 0, v|_{\varphi=\frac{3}{2}\pi} = 0, v|_{r=1} = \chi \sin^{\frac{3}{2}} \varphi\}$$

Das Problem kann analog mit natürlichen Randbedingungen formuliert werden.

12. Die gezeigten asymptotischen Konvergenzordnungen können bereits bei Rechnungen mit grober Schrittweite bestätigt werden.

13. In den praktischen Rechnungen hat sich gezeigt, daß es günstig ist, stärker als unbedingt für die optimale Konvergenzordnung notwendig zu verfeinern.

14. Die Charakterisierung der Lösung von Randwertaufgaben über Gebieten mit Ecken und Kanten in gewichteten Sobolev- und Sobolev-Slobodezkij-Räumen ist für die Abschätzung von Approximationsfehlern gut geeignet.

15. Für eine große Klasse dreidimensionaler Gebiete ist es möglich, Funktionen aus Sobolevräumen mit Gewicht mit Hilfe eines beschränkten linearen Operators über den Rand hinaus fortzusetzen.

16. Die Mittelung von Funktionen nach Steklov ist geeignet, die Glattheitseigenschaften von Funktionen zu verbessern. Durch Mittelung des singulären Lösungsanteils ist es möglich, den Interpolationsoperator auf eine $W^{2,2}(\Omega)$ -Funktion anzuwenden und Standard-Abschätztechniken zu nutzen. Die Differenz zwischen exakter und gemittelter Lösungsfunktion kann mit Hilfe des verallgemeinerten Stetigkeitsmoduls abgeschätzt werden.

17. Die am Beispiel elliptischer Randwertaufgaben mit natürlichen Randbedingungen demonstrierte Beweistechnik mit Hilfe der Steklov-Mittelung des singulären Lösungsanteils benötigt keine Aussage über die Stetigkeit der Lösung und ist deshalb für eine größere Klasse von Aufgaben durchführbar. Gedacht wird dabei an eine zukünftige Anwendung dieser Technik auf Probleme mit gemischten Randbedingungen bzw. unstetigen Koeffizienten, deren Lösungen in Sobolevräumen charakterisiert werden, die einen Schluß auf Stetigkeit mit Hilfe der Einbettungssätze i.allg. nicht gestatten.

18. Bei der Finite-Elemente-Fehlerabschätzung für die 1. Randwertaufgabe ist es ausreichend, die Zugehörigkeit der Lösung zu bestimmten Sobolevräumen mit Gewicht zu kennen. Eine Lösungsdarstellung wird nicht benötigt.

19. Der lokale Interpolationsfehler kann auch bei finiten Elementen abgeschätzt werden, deren Ausdehnung in verschiedenen Richtungen von unterschiedlicher Größenordnung ist. Diese Elemente erfüllen nicht die bekannte Zlámal-Bedingung, die besagt, daß In- und Umkugeldurchmesser von gleicher Größenordnung sind.

20. Zur lokalen Interpolationsfehlerabschätzung ist ein aus der Literatur bekannter Satz geeignet, welcher eine Verallgemeinerung der Poincaré-Ungleichung darstellt.

21. Für Simplexelemente Δ mit N achsenparallelen Kanten gelten für alle $v \in W^{2,2}(\Delta)$ die folgenden Abschätzungen:

$$|v - \Pi v; W^{1,p}(\Delta)| \leq C(\hat{\Delta}) \sum_{i,j=1}^N h_j \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}; L_p(\Delta) \right\| \quad (*)$$

falls $N=2$ oder $p > 2$ und

$$\|v - \Pi v; L_q(\Delta)\| \leq C(\hat{\Delta}) (h_1 h_2 h_3)^{1/q-1/p} \sum_{i,j=1}^N h_i h_j \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}; L_p(\Delta) \right\|$$

für beliebige $p, q \in [1, \infty)$.

Dabei sind Π der Operator der (affin) linearen Interpolation, h_i ($i=1..N$) die Ausdehnung von Δ in Richtung der Koordinatenachsen und $N \in \{2, 3\}$ die Raumdimension.

22. Die Abschätzung (*) kann im zweidimensionalen Fall konstruktiv bewiesen werden.

23. Die Nutzung einer anisotropen Vernetzung in der Umgebung von Kanten kann empfohlen werden, obwohl ein globaler Konvergenzbeweis noch aussteht.

24. Das Programmsystem FEMPS3D stellt ein leistungsfähiges Finite-Elemente-Software-Paket für skalare elliptische Differentialgleichungen 2. Ordnung in dreidimensionalen Gebieten dar, das für numerische Tests gut geeignet ist.