

Vorlesung

Elektrische Maschinen und Antriebe

Grundlagen und stationärer Betrieb

Vorlesungsscript zu den Modulen:

3400: Einführung in Electric Mobility, Grundlagen elektrischer Maschinen

3412: Elektrische Maschinen und Antriebe für Electric Mobility

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	2
1 Grundlagen	4
1.1 <i>Maxwellsche Gleichungen</i>	4
1.2 <i>Zählpeilsysteme</i>	12
1.3 <i>Energien und Kräfte, Leistung</i>	13
1.4 <i>Komplexe Wechselstromrechnung</i>	20
1.5 <i>Schaltungen bei Drehstromsystemen</i>	21
1.6 <i>Symmetrische Komponenten</i>	22
1.7 <i>Gegeninduktivität</i>	23
2 Gleichstrommaschine	24
2.1 <i>Prinzipieller Aufbau</i>	24
2.2 <i>Spannungserzeugung, Drehmomentbildung und Kommutierung</i>	25
2.3 <i>Polpaarzahl, Wicklungsausführung</i>	27
2.4 <i>Hauptgleichungen der Gleichstrommaschine</i>	30
2.5 <i>Induzierte Spannung und Drehmoment, detaillierte Betrachtung</i>	34
2.6 <i>Fremderregte Gleichstrommaschine</i>	37
2.7 <i>Permanentmagneterregte Gleichstrommaschine</i>	40
2.8 <i>Gleichstromnebenschlussmaschine</i>	45
2.9 <i>Gleichstromreihenschlussmaschine</i>	47
2.10 <i>Gleichstromdoppelschlussmaschine</i>	49
2.11 <i>Erzeugung einer variablen Klemmenspannung</i>	50
2.12 <i>Ankerrückwirkung</i>	51
2.13 <i>Stromwendespannung, Wendepole</i>	53
3 Drehfeldtheorie	56
3.1 <i>Aufbau des Stators einer Drehstrommaschine</i>	56
3.2 <i>Strombelag</i>	57
3.3 <i>Wechsel- und Drehdurchflutung</i>	59
3.4 <i>Wicklungsfaktor</i>	66
3.5 <i>Strombelag und Induktion</i>	72
3.6 <i>Induzierte Spannung und Schlupf</i>	76
3.7 <i>Drehmoment und Leistung</i>	81
4 Asynchronmaschine	86
4.1 <i>Aufbau und Ersatzschaltbild</i>	86
4.2 <i>Widerstände und Induktivitäten</i>	90
4.3 <i>Betriebsverhalten</i>	93
4.4 <i>Käfigläufer</i>	108

4.5 Möglichkeiten zur Drehzahlstellung	116
4.6 Stern-Dreieck-Schaltung	119
4.7 Doppeltgespeiste Asynchronmaschine	120
5 Synchronmaschine	124
5.1 Ersatzschaltbild und Zeigerdiagramm	124
5.2 Ausführungsformen.....	128
5.3 Betrieb am starren Netz.....	129
5.4 Inselbetrieb.....	134
5.5 Schenkelpolsynchronmaschine	137
6 Permanentmagneterregte Maschine.....	141
6.1 Permanentmagneterregte Synchronmaschine.....	141
6.2 Elektronisch kommutierter Gleichstrommotor.....	142
7 Reluktanzmaschine.....	150
7.1 Synchrone Reluktanzmaschine	150
7.2 Geschaltete Reluktanzmaschine	151
8 Kleinmaschinen für Einphasenbetrieb	160
8.1 Allgemeines.....	160
8.2 Universalmotor.....	161
8.3 Einphasenasynchronmaschine	163
9 Transformator.....	166
9.1 Idealer Transformator (verlustfrei und streuungslos)	166
9.2 Verlustfreier Transformator	169
9.3 Technischer Transformator.....	170
9.4 Ersatzschaltbild.....	171
9.5 Wahl des Übersetzungsverhältnisses „ü“	173
9.6 Betriebsverhalten.....	176
9.7 Wachstumsgesetze.....	184
9.8 Konstruktionsformen.....	185
9.9 Drehstromtransformator	186
9.10 Spartransformator.....	191
9.11 Stromtransformator, Stromwandler	192
10 Literatur	193

1 Grundlagen

1.1 Maxwell'sche Gleichungen

Die Maxwell'schen Gleichungen in Differentialform

Die Grundlage für alle folgenden Betrachtungen sind die Maxwell'schen Gleichungen. In Differentialform lauten diese (die zeitliche Änderung des Verschiebungsstromes \vec{D} kann bei den hier betrachteten technischen Systemen immer gegenüber der Stromdichte \vec{J} vernachlässigt werden):

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt} \approx \vec{J} \quad (1. \text{ Maxwell'sche Gleichung})$$

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \quad (2. \text{ Maxwell'sche Gleichung})$$

Die Kontinuitätsgesetze lauten:

$$\text{div}\vec{B} = 0 \quad (3. \text{ Maxwell'sche Gleichung})$$

$$\text{div}\vec{D} = \rho \quad (4. \text{ Maxwell'sche Gleichung})$$

und die Materialgesetze lauten:

$$\vec{B} = \mu\vec{H},$$

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E},$$

$$\vec{J} = \gamma\vec{E}.$$

Hierbei bedeuten die einzelnen Variablen:

\vec{H} das Vektorfeld der magnetischen Feldstärke;

\vec{J} das Vektorfeld der elektrischen Stromdichte;

\vec{D} das Vektorfeld des Verschiebungsstromes;

\vec{E} das Vektorfeld der elektrischen Feldstärke;

\vec{B} das Vektorfeld der magnetischen Flussdichte;

ρ das Skalarfeld der Ladungsdichte;

μ das Skalarfeld der relativen Permeabilität (in Vakuum bzw. Luft gilt: $\mu = \mu_0$);

ϵ das Skalarfeld der relativen Dielektrizität (in Vakuum bzw. Luft gilt: $\epsilon = \epsilon_0$);

γ das Skalarfeld der elektrischen Leitfähigkeit.

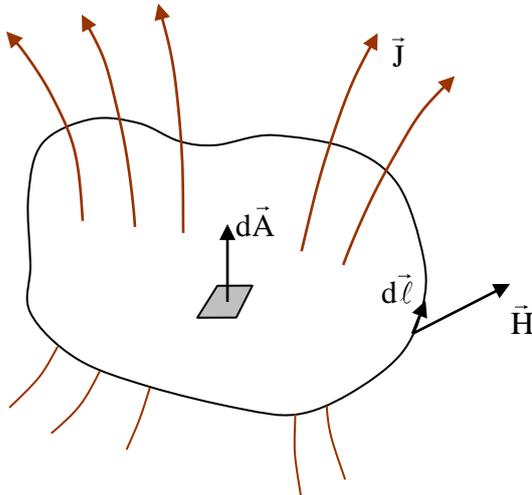
Der Ausdruck Vektorfeld bedeutet, dass die gerichtete Größe (Vektor) von allen (i.a. drei) Ortskoordinaten abhängig ist; der Ausdruck Skalarfeld bedeutet, dass die skalare Größe von allen Ortskoordinaten abhängig ist.

Bei homogenen, isotropen Materialien reduzieren sich die Skalarfelder μ , ϵ und γ zu ortsunabhängigen Materialkonstanten.

Die Maxwell'schen Gleichungen in Integralform

Das Durchflutungsgesetz (1. Maxwell'sche Gleichung in Integralform)

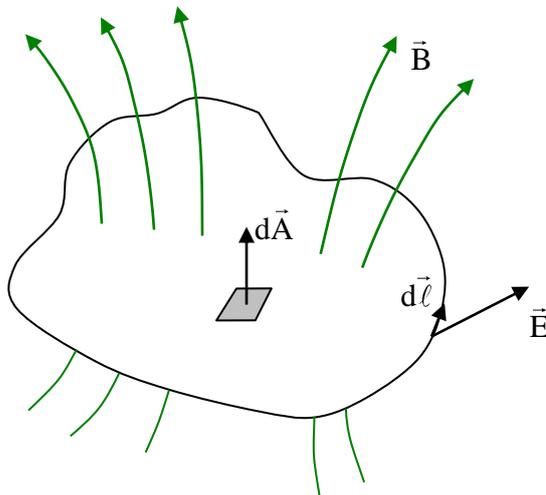
$$\oint \vec{H} d\vec{\ell} = \int_A \vec{J} d\vec{A} \quad (\text{Verschiebungsstrom vernachlässigt})$$



Das Linienintegral der magnetischen Feldstärke \vec{H} längs eines in sich geschlossenen räumlichen Integrationsweges $\vec{\ell}$ („magnetische Umlaufspannung“) ist gleich dem gesamten elektrischen Strom, der durch die so begrenzte Fläche A hindurchtritt („Durchflutung“).

Das Induktionsgesetz (2. Maxwell'sche Gleichung in Integralform)

$$\oint \vec{E} d\vec{\ell} = - \frac{d}{dt} \int_A \vec{B} d\vec{A}$$



Das Linienintegral der elektrischen Feldstärke \vec{E} längs eines in sich geschlossenen räumlichen Integrationsweges $\vec{\ell}$ („elektrische Umlaufspannung“) ist gleich der negativen totalen zeitlichen Änderung des gesamten magnetischen Flusses, der durch die so begrenzte Fläche A hindurchtritt.

Hierbei ist $\int_A \vec{B} d\vec{A} = \Phi$ der magnetische Fluss.

Richtungsregel

Die positive Richtung der Vektoren $d\vec{\ell}$ und \vec{A} sind einander wie bei einer Rechtsschraube zugeordnet.

Die 3. Maxwellsche Gleichung in Integralform

$$\oint_A \vec{B} d\vec{A} = 0$$

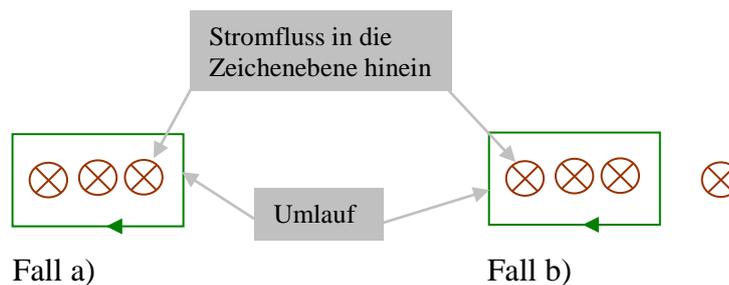
Die 4. Maxwellsche Gleichung in Integralform

$$\oint_A \vec{D} d\vec{A} = \int_V \rho dV$$

Beispiele zum Durchflutungsgesetz (1. Maxwellsche Gleichung in Integralform)

Das Durchflutungsgesetz ist ein Bilanzgesetz. Es gibt den Zusammenhang zwischen elektrischer Durchflutung und magnetischer Umlaufspannung an; es erlaubt jedoch nicht ohne weiteres die Berechnung der magnetischen Feldstärke selbst. Zur Berechnung der magnetischen Feldstärke \vec{H} bei vorgegebener Durchflutung sind zusätzliche Angaben über den Feldverlauf erforderlich (z.B. Symmetriebedingungen oder vereinfachende Annahmen).

1. Beispiel:



- Die Durchflutung, der Integrationsweg und die magnetische Umlaufspannung sind in beiden Fällen gleich.
- Die Verteilung der magnetischen Feldstärke längs des Integrationsweges ist aber (wegen des zusätzlichen Stromes im Fall b)) unterschiedlich.
- Die Berechnung der magnetischen Feldstärke ist in beiden Fällen zunächst nicht möglich.

2. Beispiel:

Berechnung des magnetischen Feldes eines geraden, stromdurchflossenen Leiters (mit dem Radius R) in Luft.

Aufgrund der Symmetrie ist der Betrag der Feldstärke bei konstantem Abstand r vom Mittelpunkt des Leiters konstant.

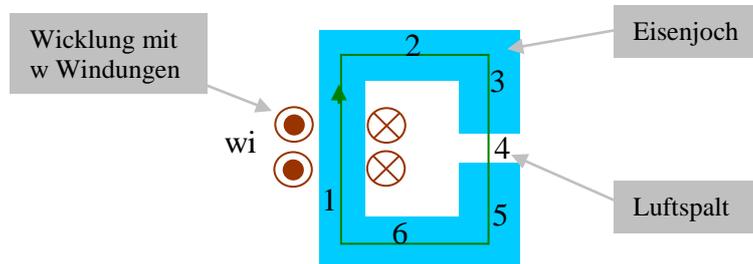
Für den Außenraum gilt: $\oint \vec{H} d\vec{\ell} = H_a 2\pi r_a = J\pi R^2 \rightarrow H_a = \frac{J R^2}{2 r_a}$

Für den Innenraum gilt (J sei gleichmäßig im Leiterquerschnitt verteilt):

$$\oint \vec{H} d\vec{\ell} = H_i 2\pi r_i = J\pi r_i^2 \rightarrow H_i = \frac{J}{2} r_i$$

3. Beispiel:

Magnetischer Kreis:



Es werden folgende vereinfachende Annahmen getroffen:

- Der magnetische Kreis kann in eine endliche Anzahl von Abschnitten ($v = 1 \dots 6$) unterteilt werden.
- H_v sei je Abschnitt konstant.
- Ein geschlossener Umlauf kann über eine mittlere Feldlinienlänge beschrieben werden.
- Der Streufluss ist vernachlässigbar: $\Phi_v = \Phi = \text{const.}$

Das Durchflutungsgesetz ergibt dann:

$$\oint \vec{H} d\vec{\ell} = \sum_{v=1}^6 H_v \ell_v = wi \quad \text{mit} \quad H_v = \frac{B_v}{\mu_v}; \quad B_v = \frac{\Phi_v}{A_v}.$$

Für $\mu_{Fe,v} \rightarrow \infty$ folgt weiter: $\oint \vec{H} d\vec{\ell} = H_4 \ell_4 = wi$.

Hieraus folgt: $B_4 = \mu_0 \frac{wi}{l_4}$ und $\Phi_4 = \Phi = B_4 A_4$.

Also folgt für die Flussdichte in den einzelnen Abschnitten: $B_v = B_4 \frac{A_4}{A_v}$

Beispiele zum Induktionsgesetz (2. Maxwellsche Gleichung in Integralform)

In einer geschlossenen Leiterschleife („Integrationsweg“) entsteht eine elektrische Umlaufspannung, wenn sich der mit dieser Schleife verkettete magnetische Fluss zeitlich ändert:

$$\oint \vec{E} d\vec{\ell} = - \frac{d}{dt} \int_A \vec{B} d\vec{A} = - \frac{d}{dt} \Phi \quad (\text{Umlaufspannung} = \text{„magnetischer Schwund“})$$

Betrachtet man nun eine Wicklung mit w Windungen, so lautet das Induktionsgesetz:

$$\oint \vec{E} d\vec{\ell} = - \frac{d}{dt} w \int_A \vec{B} d\vec{A} = - \frac{d}{dt} w \Phi = - \frac{d}{dt} \Psi$$

Die zeitliche Änderung des Flusses kann erfolgen durch:

- Zeitliche Änderung der Induktion bei ruhender Leiterschleife.
- Bewegung der Leiterschleife (ganz oder in Teilen) relativ zum ruhenden Magnetfeld.

Diese Unterscheidung hängt offenbar nur von der Wahl des Koordinatensystems ab.

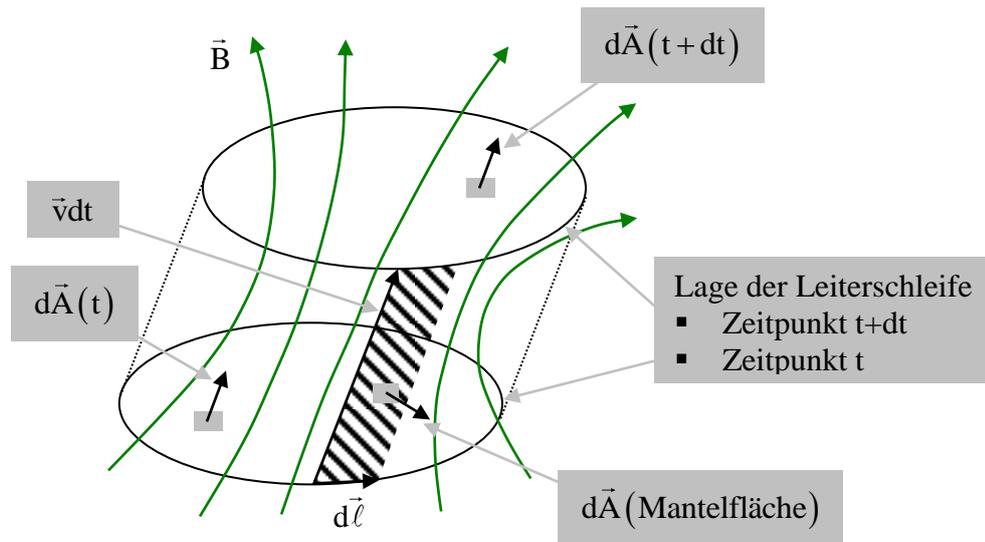
1. Beispiel: Ruhende Wicklung, zeitlich veränderliche Induktion

Es gilt:

$$\oint \vec{E} d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \Psi = -\frac{\partial \Psi}{\partial i} \frac{di}{dt} = -L \frac{di}{dt} \quad (\text{Transformationsspannung})$$

2. Beispiel: Bewegte Wicklung, zeitlich konstante Induktion

Es wird die folgende Bewegung einer Leiterschleife untersucht:



Aus $\text{div} \vec{B} = 0$ folgt: $\oint_A \vec{B} d\vec{A} = \int_{A(t+dt)} \vec{B} d\vec{A} - \int_{A(t)} \vec{B} d\vec{A} + \int_{\text{Mantelfläche}} \vec{B} d\vec{A} = 0$.

Die Änderung der Flussverketzung mit der betrachteten Wicklung beträgt:

$$d\Psi = \int_{A(t+dt)} \vec{B} d\vec{A} - \int_{A(t)} \vec{B} d\vec{A}$$

Für die Mantelfläche gilt: $d\vec{A} = -(\vec{v} dt \times d\vec{\ell}) = -dt(\vec{v} \times d\vec{\ell})$.

Somit folgt: $\int_{\text{Mantelfläche}} \vec{B} d\vec{A} = -dt \oint \vec{B} (\vec{v} \times d\vec{\ell}) = -dt \oint (\vec{B} \times \vec{v}) d\vec{\ell} = dt \oint (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{\ell}$

Also folgt weiter: $d\Psi + dt \oint (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{\ell} = 0 \Rightarrow -\frac{d\Psi}{dt} = \oint (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{\ell}$

Insgesamt gilt:

$$\oint \vec{E} d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \Psi = \oint (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{\ell} \quad (\text{Bewegungsspannung})$$

3. Beispiel: Kurzschluss einer Leiterschleife:

Eine Leiterschleife (Querschnitt A_L , Leitfähigkeit γ und Widerstand R) wird von einem veränderlichen Magnetfeld durchdrungen. Aus

$$\oint \vec{E} d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \Psi$$

folgt mit $\vec{J} = \gamma \vec{E}$:

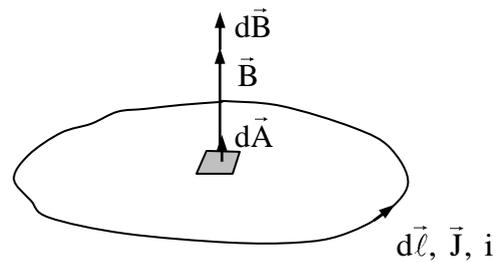
$$\oint \frac{\vec{J}}{\gamma} d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \Psi$$

Da auf jedem Ort der Leiterschleife die Richtungen von $d\vec{\ell}$ und \vec{J} übereinstimmen,

gilt weiter mit $J = \frac{i}{A_L}$:

$$i \oint \frac{d\ell}{\gamma A_L} = iR = -\frac{d}{dt} \Psi \quad \Rightarrow \quad 0 = iR + \frac{d}{dt} \Psi$$

Für $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} > 0$ muss $\vec{J} = \gamma \vec{E}$ also entgegengesetzt zur Zählrichtung fließen.



Lenzsche Regel: Der durch Induktionsänderung hervorgerufene Strom ist so gerichtet, dass sein Magnetfeld der induzierenden Induktionsänderung entgegenwirkt.

4. Beispiel: Leerlauf einer Leiterschleife:

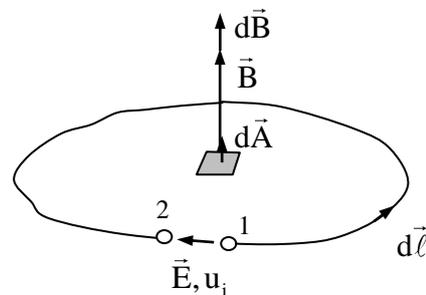
Wird die obige Leiterschleife aufgetrennt, so entsteht die nebenstehende Situation:

Es gilt: $\oint \vec{E} d\vec{\ell} = \int_2^1 \vec{E} d\vec{\ell} + \int_1^2 \vec{E} d\vec{\ell}$, wobei die

Richtung von $d\vec{\ell}$ die Ausführung des Integrals bestimmt. Da auf dem Weg von „1“ nach „2“ die Leitfähigkeit γ endlich ist, der Strom (und damit auch die Stromdichte) wegen der offenen Klemmen aber Null ist, gilt mit $\vec{J} = \gamma \vec{E}$ auch $\vec{E} = 0$. Damit bleibt übrig:

$$\oint \vec{E} d\vec{\ell} = \int_2^1 \vec{E} d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \Psi = -u_i^1$$

Anmerkung: Das Minuszeichen gilt nur für die hier dargestellte Zuordnung der positiven Richtungen!

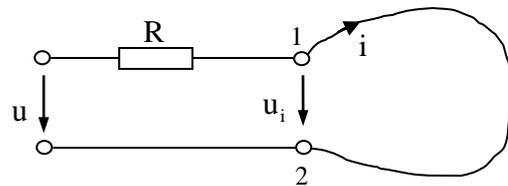


¹ In der Feldtheorie wird häufig $\oint \vec{E} d\vec{\ell} = u_i$ definiert; die hier verwendete Definition von u_i hat sich aber bei elektrischen Maschinen als zweckmäßig erwiesen und wird deshalb weiterhin verwendet.

5. Beispiel: Im allgemeinen Fall wird die Spannung an den äußeren Klemmen durch eine Spannungsquelle auf dem Wert u gehalten; es fließt ein Strom i .

$$u = Ri + u_i = Ri + \frac{d}{dt} \Psi$$

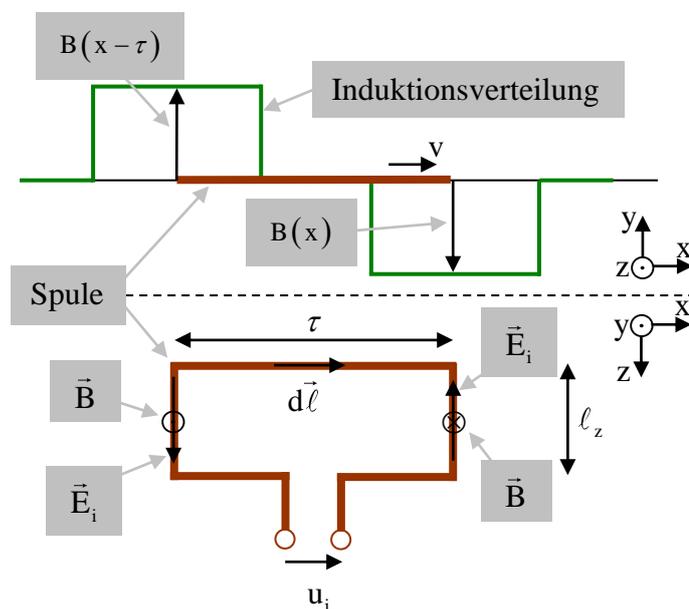
Auch hier richten sich die Vorzeichen nach den vereinbarten positiven Richtungen.



6. Beispiel: Bewegte Spule im ruhenden Magnetfeld

Gegeben sei eine ebene, rechteckförmige Spule mit einer Windung (die Ausdehnung in x -Richtung sei τ , die Ausdehnung in z -Richtung sei ℓ_z ; siehe nebenstehende Zeichnung). Diese Spule bewege sich in x -Richtung mit der Geschwindigkeit v durch ein ortsfestes, zeitlich konstantes, treppenförmiges Magnetfeld mit $B(x) = -B(x - \tau)$. Es gilt dann:

$$\begin{aligned} u_i &= -\oint \vec{E}_i d\vec{\ell} \\ &= -\oint (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{\ell} \\ &= 2v |B(x)| \ell_z \end{aligned}$$

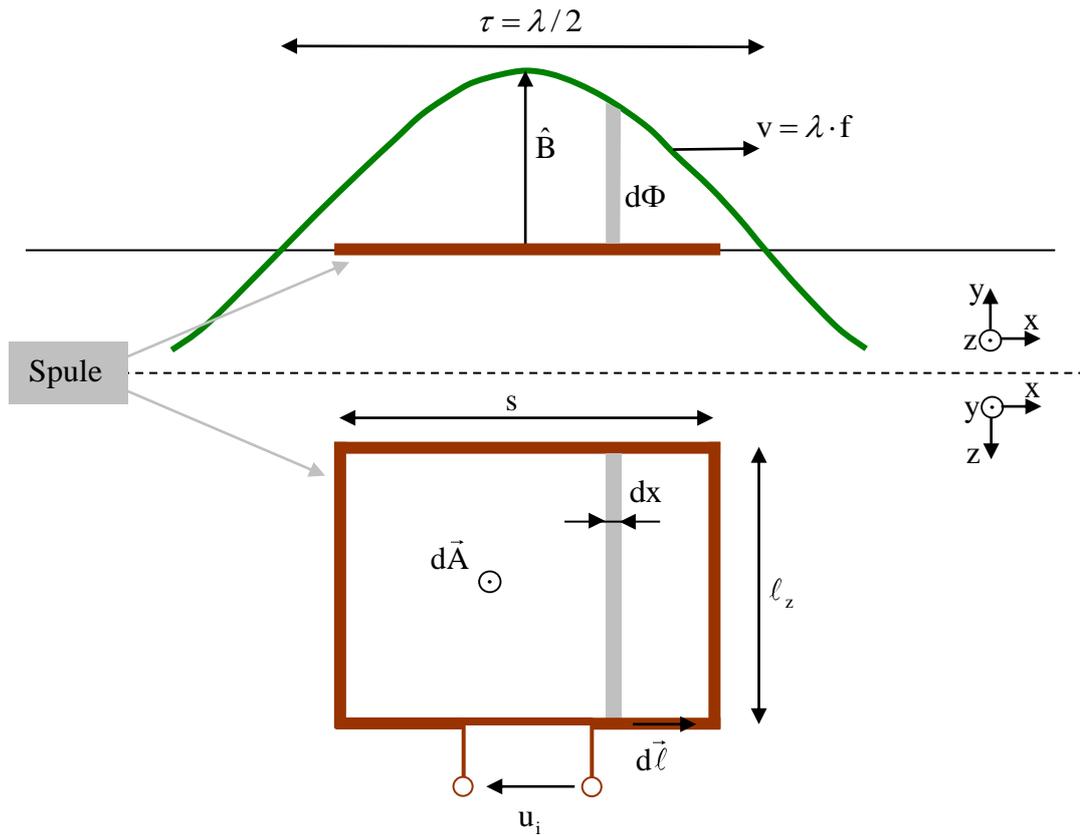


Auch hier richten sich die Vorzeichen nach den vereinbarten positiven Richtungen von Umlaufsinn und Spannung.

Bei konstanter Geschwindigkeit v entspricht der zeitliche Verlauf der induzierten Spannung dem räumlichen Verlauf der Induktion.

7. Beispiel: Ruhende Spule in einem bewegten Magnetfeld:

Gegeben sei eine ebene, ruhende, rechteckförmige Spule mit w Windungen und ein magnetisches Wanderfeld $B(x, t) = \hat{B} \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{\tau} x\right)$ mit der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$, dem Phasenwinkel φ und der Polteilung τ (halbe Wellenlänge). Die Ausdehnung der Spule in Bewegungsrichtung des Wanderfeldes (x -Richtung) betrage s (wirksame Breite), die Ausdehnung senkrecht zur Bewegungsrichtung (z -Richtung) betrage ℓ_z (wirksame Länge).



Der verkettete Fluss berechnet sich zu:

$$\begin{aligned}
 \Psi &= w \int_A \mathbf{B}(x, t) d\mathbf{A} = w \hat{B}_z \int_{-s/2}^{s/2} \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{\tau} x\right) dx \\
 &= w \hat{B}_z \int_{-s/2}^{s/2} \left[\cos(\omega t + \varphi) \cos\left(-\frac{\pi}{\tau} x\right) - \sin(\omega t + \varphi) \sin\left(-\frac{\pi}{\tau} x\right) \right] dx \\
 &= w \hat{B}_z \left[\cos(\omega t + \varphi) \left(-\frac{\tau}{\pi}\right) \sin\left(-\frac{\pi}{\tau} x\right) - \sin(\omega t + \varphi) \left(-\frac{\tau}{\pi}\right) \left(-\cos\left(-\frac{\pi}{\tau} x\right)\right) \right]_{-s/2}^{s/2} \\
 &= w \hat{B}_z \cos(\omega t + \varphi) \left(-\frac{\tau}{\pi}\right) \left[\sin\left(-\frac{\pi s}{\tau 2}\right) - \sin\left(\frac{\pi s}{\tau 2}\right) \right] \\
 &= w \hat{B}_z \cos(\omega t + \varphi) \frac{\tau}{\pi} 2 \sin\left(\frac{s \pi}{\tau 2}\right) \\
 &= w \xi \frac{2}{\pi} \hat{B}_z \tau l_z \cos(\omega t + \varphi), \quad \xi = \sin\left(\frac{s \pi}{\tau 2}\right) \leq 1 \quad (\text{Sehnungsfaktor})
 \end{aligned}$$

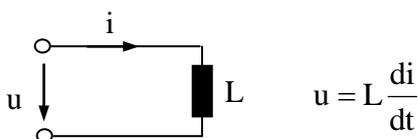
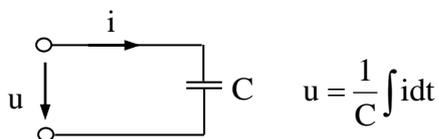
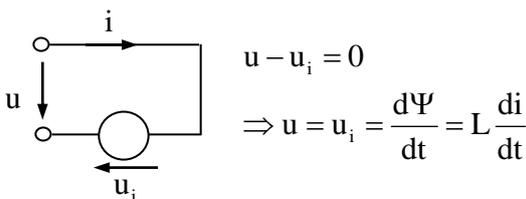
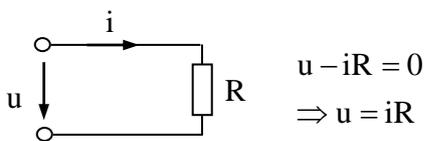
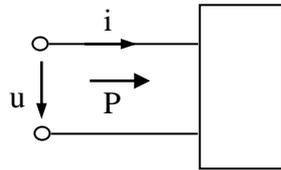
Die induzierte Spannung ist dann (die positiven Richtungen von $d\vec{A}$ und \vec{B} bzw. $d\vec{B}$ stimmen überein):

$$u_i = \frac{d}{dt} \Psi = -\omega \hat{\Psi} \sin(\omega t + \varphi), \quad \text{mit } \hat{\Psi} = w \xi \frac{2}{\pi} \hat{B}_z \tau l_z.$$

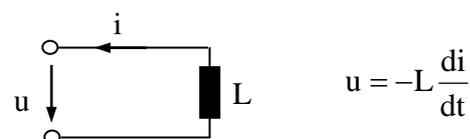
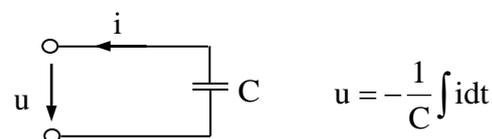
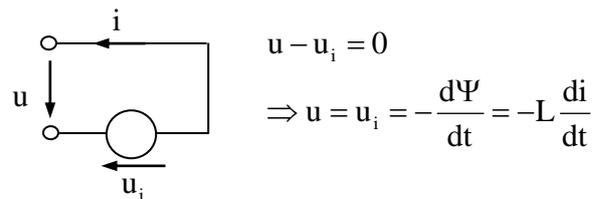
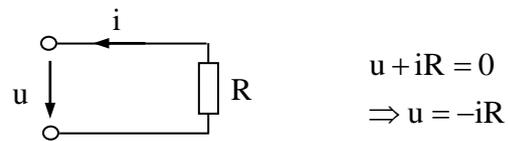
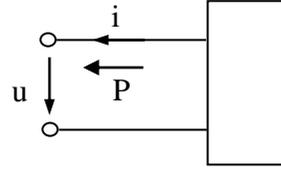
1.2 Zählpeilsysteme

Zur eindeutigen Beschreibung elektrischer Netzwerke müssen Spannungen, Ströme und Leistungen Richtungen zugeordnet werden. Die Festlegung der Richtung ist hierbei willkürlich. Prinzipiell gibt es zwei verschiedene Möglichkeiten:

Verbraucherzählpeilsystem

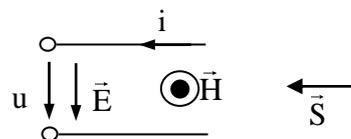
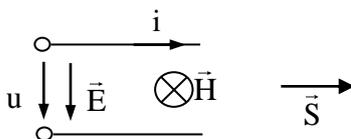


Erzeugerzählpeilsystem



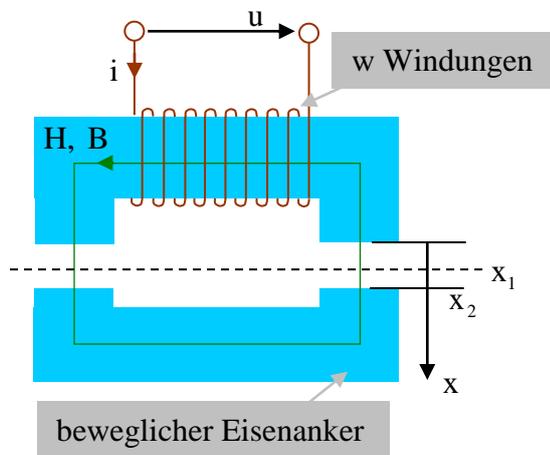
Der Poynting'sche Vektor beschreibt die Leistungsdichte im elektromagnetischen Feld:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$



1.3 Energien und Kräfte, Leistung

Das Prinzip der elektromechanischen Energieumwandlung soll am Beispiel eines einfachen Hubmagneten erläutert werden, siehe hierzu das folgende Bild. Die Berechnungsvorschriften der auftretenden Energieformen sind:



Elektrische Energie: $W_{el} = \int uidt$

Elektrische Verluste: $W_v = \int i^2 R dt$

Magnetische Energie: $W_{mag} = \iiint_V H dB dV$
 $= \int id\Psi$

Mechanische Energie: $W_{mech,lin} = \int F dx$
 $W_{mech,rot} = \int T d\alpha$

Die B-H-Kennlinie des Eisens und die Ψ -i-Kennlinie des magnetischen Kreises haben im allgemeinen (d.h. unter Berücksichtigung der Sättigung) das folgende prinzipielle Aussehen:



Die Energiedichte des magnetischen Feldes in Luft beträgt:

$$w_{mag} = \frac{1}{2} HB = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Mit $B = 0,5T = 0,5 \frac{Vs}{m^2}$ (typischer Wert) und $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$ folgt:

$$w_{mag} = \frac{0,25 \frac{V^2 s^2}{m^4}}{8\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}} = 0,995 \cdot 10^5 \frac{VAs}{m^3} \approx 1 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2}$$

Die Energiedichte des elektrischen Feldes in Luft beträgt:

$$w_{el} = \frac{1}{2} ED = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

Mit $E = 3 \frac{kV}{mm}$ (Durchschlagfeldstärke in Luft) und $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$ folgt:

$$w_{el} = \frac{1}{2} 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm} \left(3 \cdot 10^6 \frac{V}{m} \right)^2 = 39,8 \frac{VAs}{m^3} \approx 40 \frac{N}{m^2}$$

Wegen der deutlich geringeren Energiedichte existieren praktisch keine elektrostatischen Maschinen.

In allen folgenden Fällen wird die im elektrischen Feld gespeicherte Energie gegenüber der im magnetischen Feld gespeicherten Energie vernachlässigt.

Energiebilanz für den Hubmagneten:

$$dW_{el} = dW_v + dW_{mag} + dW_{mech}$$

Die an den Klemmen zugeführte elektrische Energie ist gleich der Summe aus entstehenden Verlusten, Änderung der magnetischen Energie und Änderung der mechanischen Energie.

Fall 1: Blockierter Anker ($x = \text{const.}$):

$$dW_{mech} = 0 = d(W_{el} - W_v) - dW_{mag}$$

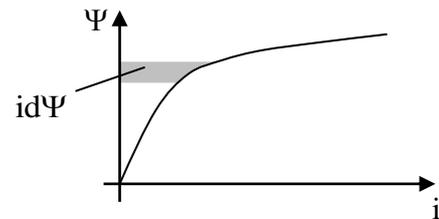
$$\Rightarrow d(W_{el} - W_v) = dW_{mag}$$

$$\Rightarrow (ui - i^2R)dt = dW_{mag}$$

$$\Rightarrow u_i idt = dW_{mag}$$

$$\Rightarrow \frac{d\Psi}{dt} idt = dW_{mag}$$

$$\Rightarrow dW_{mag} = id\Psi$$



Die gesamte magnetische Energie beträgt:²

$$W_{mag} = \int_0^{\Psi} id\tilde{\Psi}$$

Fall 2: Anker beweglich, konstanter Strom:

Der Anker werde von $x = x_1$ nach $x = x_2$ bei $i_0 = \text{const.}$ bewegt. Hierbei ändert sich der verkettete Fluss von $\Psi = \Psi_1$ nach $\Psi = \Psi_2$.

$$d(W_{el} - W_v) = (ui_0 - i_0^2R)dt = u_i i_0 dt$$

$$= \frac{d\Psi}{dt} i_0 dt = i_0 d\Psi$$

$\hat{=}$ Fläche ① plus Fläche ②

$$dW_{mag} = W_{mag,1} - W_{mag,2} = \int_0^{\Psi_1} id\Psi - \int_0^{\Psi_2} id\Psi$$

$\hat{=}$ Fläche ②+③ minus Fläche ③+④

$\hat{=}$ Fläche ② minus Fläche ④

$$dW_{mech} = d(W_{el} - W_v) - dW_{mag}$$

$\hat{=}$ Fläche ① plus Fläche ④

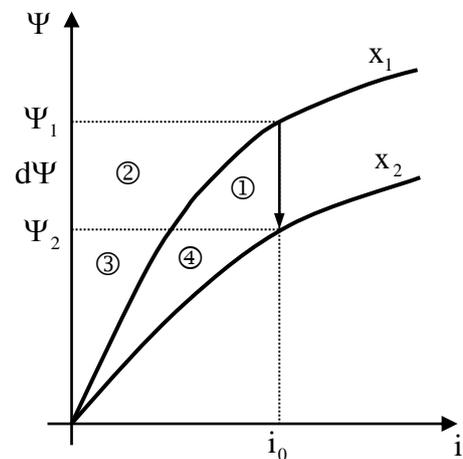
Also folgt:

$$dW_{mech} = \int_0^{i_0} \Psi(x_1) di - \int_0^{i_0} \Psi(x_2) di$$

$$= dW'_{mag} \quad (\text{magnetische Coenergie})$$

Die Kraft berechnet sich dann zu:

$$F = \frac{dW_{mech}}{dx} = \frac{dW'_{mag}}{dx} \Big|_{i=\text{const.}}$$



² Die Tilde dient zur Unterscheidung von Integrationsgrenze und Integrationsvariable.

Fall 3: Anker beweglich, konstante Flussverkeftung:

Aus $\Psi = \Psi_0 = \text{const.}$ folgt $i d\Psi = 0$ und somit $d(W_{el} - W_v) = 0$ (die elektrische Eingangsleistung wird also nur zur Deckung der Verluste zugeführt). Damit folgt:

$$dW_{\text{mech}} = -dW_{\text{mag}}$$

$$dW_{\text{mag}} = W_{\text{mag},1} - W_{\text{mag},2} = \int_0^{\Psi_0} i d\Psi(x_1) - \int_0^{\Psi_0} i d\Psi(x_2)$$

$\hat{=}$ Fläche ① minus Fläche ①+②

$\hat{=}$ minus Fläche ②

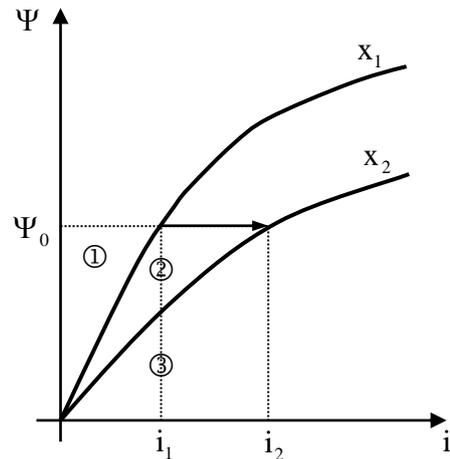
Also folgt:

$$dW_{\text{mech}} \hat{=} \text{Fläche ②}$$

$$dW_{\text{mech}} = \int_0^{i_1} \Psi(x_1) di + \int_{i_1}^{i_2} \Psi_0 di - \int_0^{i_2} \Psi(x_2) di$$

$$= \int_0^{i_2} \Psi_1(i) di - \int_0^{i_2} \Psi_2(i) di$$

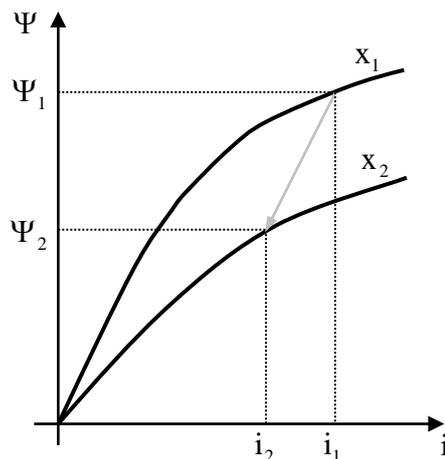
$$= dW'_{\text{mag}} \quad (\text{magnetische Coenergie})$$



Die Kraft berechnet sich dann zu:

$$F = \frac{dW_{\text{mech}}}{dx} = \frac{dW'_{\text{mag}}}{dx} \Big|_{\Psi=\text{const.}}$$

Fall 4: allgemeiner Fall; Anker beweglich, Strom und Flussverkeftung variabel:



Die für diesen Fall 4 im Folgenden berechneten Energieänderungen basieren auf den Betrachtungen der Fälle 1 und 2.

Fall 4.1:

- a) zunächst Anker blockiert, Änderung des Stromes und der Flussverkettung
- b) dann Strom konstant, Anker beweglich und Änderung der Flussverkettung

- a) $x_1 = \text{const.}$;
 i ändert sich von i_1 nach i_2 ;
 Ψ ändert sich von Ψ_1 nach Ψ_a .

$$dW_{\text{mech,1a}} = 0$$

$$dW_{\text{mag,1a}} = id\Psi = \int_0^{\Psi_1} i(x_1)d\Psi - \int_0^{\Psi_a} i(x_1)d\Psi$$

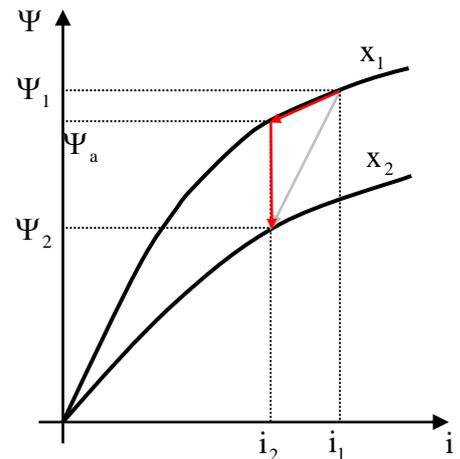
$$d(W_{\text{el,1a}} - W_{\text{V,1a}}) = dW_{\text{mag,1a}}$$

- b) $i_2 = \text{const.}$;
 x ändert sich von x_1 nach x_2 ;
 Ψ ändert sich von Ψ_a nach Ψ_2 .

$$dW_{\text{mech,1b}} = dW'_{\text{mag,1b}} = \int_0^{i_2} \Psi(x_1)di - \int_0^{i_2} \Psi(x_2)di$$

$$dW_{\text{mag,1b}} = \int_0^{\Psi_a} i(x_1)d\Psi - \int_0^{\Psi_2} i(x_2)d\Psi$$

$$d(W_{\text{el,1b}} - W_{\text{V,1b}}) = i_2 d\Psi = i_2 (\Psi_a - \Psi_2)$$



Fall 4.2:

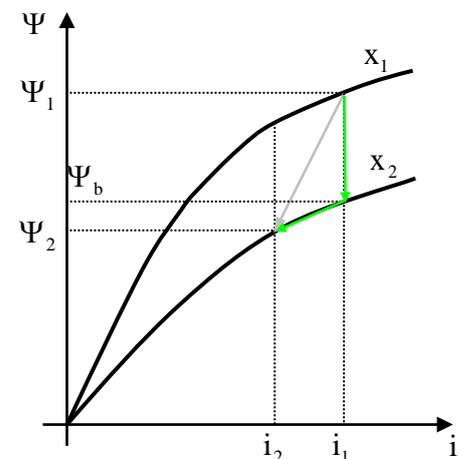
- a) zunächst Strom konstant, Anker beweglich und Änderung der Flussverkettung
- b) dann Anker blockiert, Änderung des Stromes und der Flussverkettung

- a) $i_1 = \text{const.}$;
 x ändert sich von x_1 nach x_2 ;
 Ψ ändert sich von Ψ_1 nach Ψ_b .

$$dW_{\text{mech,2a}} = dW'_{\text{mag,2a}} = \int_0^{i_1} \Psi(x_1)di - \int_0^{i_1} \Psi(x_2)di$$

$$dW_{\text{mag,2a}} = \int_0^{\Psi_1} i(x_1)d\Psi - \int_0^{\Psi_b} i(x_2)d\Psi$$

$$d(W_{\text{el,2a}} - W_{\text{V,2a}}) = i_1 d\Psi = i_1 (\Psi_1 - \Psi_b)$$



- b) $x_2 = \text{const.}$;
 i ändert sich von i_1 nach i_2 ;
 Ψ ändert sich von Ψ_b nach Ψ_2 .

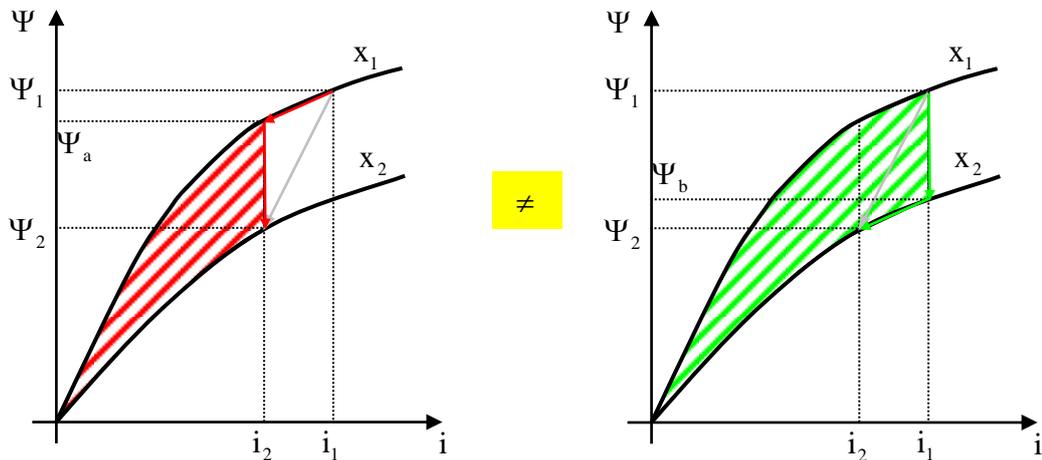
$$dW_{\text{mech},2b} = 0$$

$$dW_{\text{mag},2b} = i d\Psi = \int_0^{\Psi_b} i(x_2) d\Psi - \int_0^{\Psi_2} i(x_2) d\Psi$$

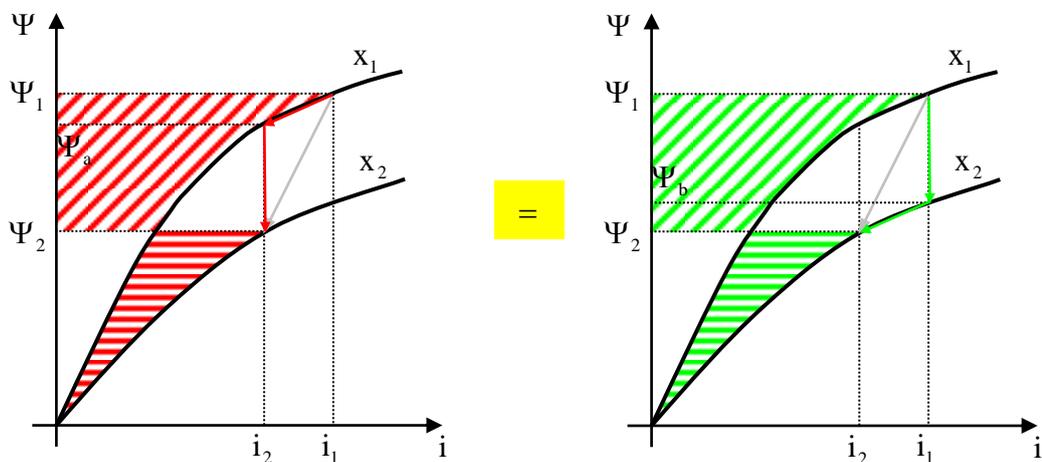
$$d(W_{\text{el},2b} - W_{\text{V},2b}) = dW_{\text{mag},2b}$$

Vergleich der Fälle 4.1 und 4.2:

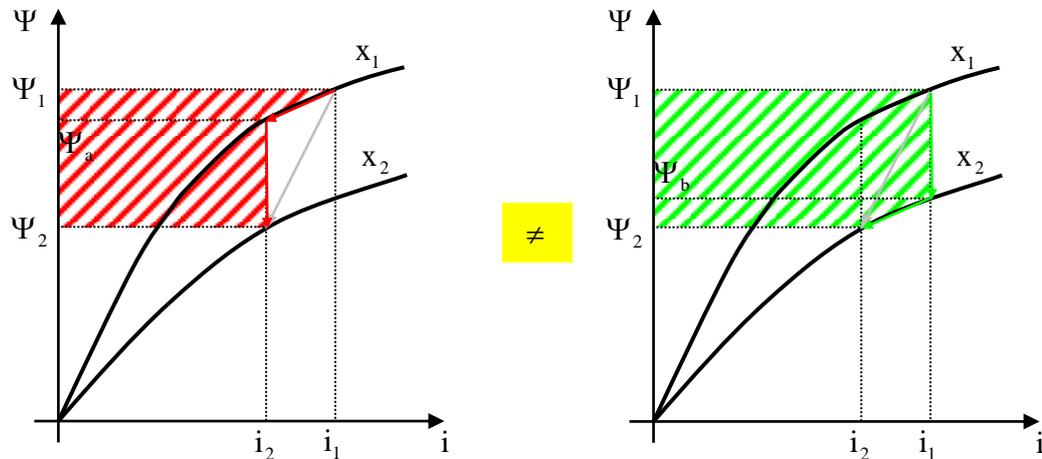
- a) Änderung der mechanischen Energie dW_{mech}



- b) Änderung der magnetischen Energie dW_{mag}

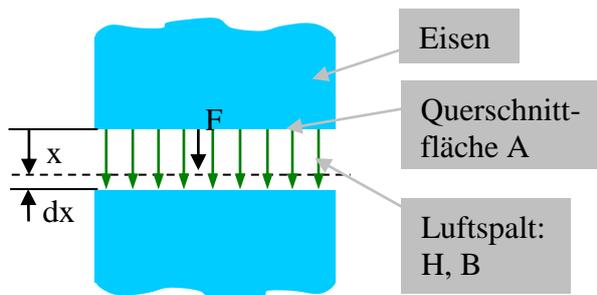


c) Änderung der Differenz aus elektrischer Energie und Verlusten $d(W_{el} - W_v)$



Für lineare Materialien gilt $W_{mag} = W'_{mag}$, so dass dann (und nur dann!) die Kraft aus der Änderung der magnetischen Energie berechenbar ist.

Die magnetische Zugkraft auf die Oberflächen flussführender Eisenteile berechnet sich wie folgt:



Wegen $\mu_{r,Fe} \rightarrow \infty$ und $\mu_{r,Luft} = 1$ sind die beteiligten Materialien linear. Dann kann die Kraft aber auch aus der Änderung der magnetischen Energie berechnet werden. Wegen $H_{Fe} \rightarrow 0$ liefern die Eisenwege keinen Beitrag, so dass hier die Kraft aus der Änderung der magnetischen Energie im Luftspalt berechnet werden kann.

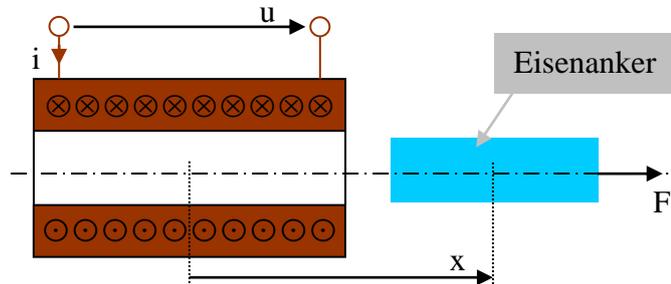
$$F = \frac{dW_{mag}}{dx} = \frac{w_{mag} \cdot A dx}{dx} = \left(\frac{1}{2} HB \right) A = \frac{B^2}{2\mu_0} A$$

Die spezifische Kraft (Kraft pro Flächeneinheit, „Maxwellsche Zugspannung“) ist dann:

$$f = \frac{F}{A} = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Ermittlung der Kraft aus der Leistungsbilanz

Betrachtet wird eine zylindrische Spule mit dem Ohmschen Widerstand R und einem nur in x -Richtung beweglichen Eisenanker. Die Induktivität der Spule hängt dann von der Lage des Ankers ab: $L = L(x)$. Sättigung wird vernachlässigt: $L \neq L(i)$.



Die Spannungsgleichung (Induktionsgesetz) lautet: $u = iR + \frac{d\Psi}{dt}$, $\Psi = Li$

Fall 1: Anker in Stellung x blockiert (dann ist L konstant)

Spannungsgleichung: $u = iR + L \frac{di}{dt}$

Leistungsbilanz: $ui = i^2R + Li \frac{di}{dt}$

Aus $W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} Li^2$ folgt: $\frac{d}{dt} W_{\text{mag}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) = L \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} i^2 \right) = Li \frac{di}{dt}$

Leistungsbilanz: $ui = i^2R + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right)$

Die zugeführte elektrische Leistung ist gleich der Summe aus Stromwärmeleistung (Verluste) und der Änderung der magnetischen Energie.

Fall 2: Anker beweglich ($L = L(x)$):

Spannungsgleichung: $u = iR + L \frac{di}{dt} + i \frac{dL}{dt}$

Leistungsbilanz: $ui = i^2R + Li \frac{di}{dt} + i^2 \frac{dL}{dt}$

Aus $W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} Li^2$ folgt: $\frac{d}{dt} W_{\text{mag}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) = Li \frac{di}{dt} + \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dt}$

Leistungsbilanz: $ui = i^2R + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) + \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dt}$

Der hier in der Leistungsbilanz gegenüber dem Fall 1 zusätzlich auftretende Term muss der mechanischen Leistung entsprechen. Also folgt:

Mechanische Leistung: $F \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dt} = \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L}{\partial x} \frac{dx}{dt}$

Also folgt für die Kraft: $F = \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L}{\partial x}$

1.4 Komplexe Wechselstromrechnung

Zeitlich sinusförmige Wechselspannungen und -ströme werden in der Energietechnik durch komplexe Effektivwertzeiger dargestellt:

$$u(t) = \sqrt{2}U \cos(\omega t) = \operatorname{Re} \left\{ \sqrt{2}U e^{j\omega t} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \sqrt{2}\underline{U} e^{j\omega t} \right\}, \quad \underline{U} = U e^{j0}$$

$$i(t) = \sqrt{2}I \cos(\omega t - \varphi) = \operatorname{Re} \left\{ \sqrt{2}I e^{j\omega t} e^{-j\varphi} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \sqrt{2}\underline{I} e^{j\omega t} \right\}, \quad \underline{I} = I e^{-j\varphi}$$

Die Orientierung der komplexen Zahlenebene ist beliebig; in der Energietechnik wird jedoch i.a. die positive reelle Achse senkrecht nach oben und die negative imaginäre Achse nach rechts aufgetragen; die Rotationsrichtung der Zeiger ist die mathematisch positive Richtung (Gegenuhrzeigerichtung).

Die Wahl des Phasenwinkels φ ist ebenfalls beliebig, er wird jedoch i.a. so gewählt, dass sich der Phasenwinkel der Spannung zu Null ergibt. Definiert man den Phasenwinkel des Stromes wie oben angegeben, so ergeben sich für ohmsch-induktive Impedanzen (die in der elektrischen Antriebstechnik meistens vorliegen) positive Zahlenwerte für diesen Phasenwinkel φ .

Der Augenblickswert der physikalischen Größen (Spannung und Strom) ergibt sich durch die Projektion der rotierenden Zeiger auf die reelle Achse der komplexen Zahlenebene.

Die komplexe Impedanz ist:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U}{I} e^{j\varphi} = Z e^{j\varphi} = Z \cos(\varphi) + jZ \sin(\varphi) = R + jX$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} \quad \tan(\varphi) = \frac{X}{R}$$

Die komplexe Scheinleistung ist das Produkt aus dem komplexen Effektivwert der Spannung und dem konjugiert komplexen Effektivwert des Stromes:

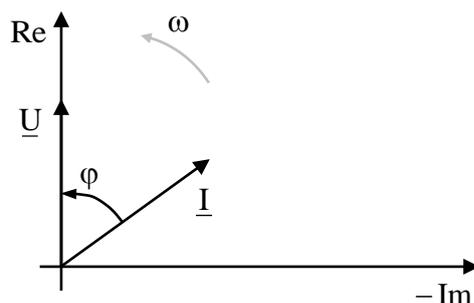
$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = UI e^{j\varphi} = P + jQ$$

Die verschiedenen Arten der Leistung sind dann:

Wirkleistung: $P = \operatorname{Re} \{ \underline{S} \} = UI \cos(\varphi)$

Blindleistung: $Q = \operatorname{Im} \{ \underline{S} \} = UI \sin(\varphi)$

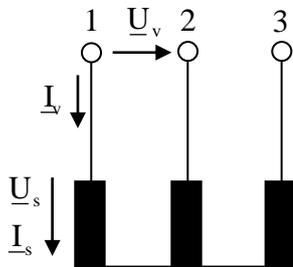
Scheinleistung: $S = |\underline{S}| = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}$



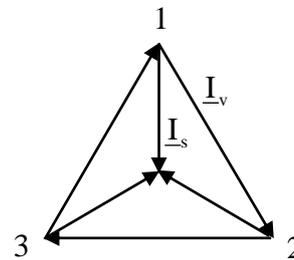
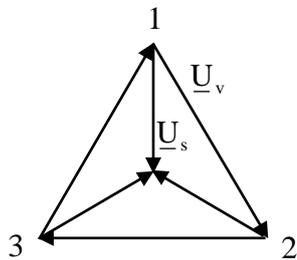
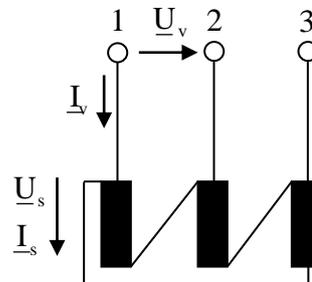
1.5 Schaltungen bei Drehstromsystemen

Für den symmetrischen 3-strängigen Betrieb ohne Nullleiter gilt:

Sternschaltung



Dreieckschaltung



Die Strang- (Phasen-) Größen sind:

$$U_s, I_s$$

$$\sum I_s = 0$$

$$U_s, I_s$$

$$\sum U_s = 0$$

Die verketteten (Leiter-) Größen sind:

$$U_v = \sqrt{3}U_s$$

$$I_v = I_s$$

$$I_v = \sqrt{3}I_s$$

$$U_v = U_s$$

Die Leistung ergibt sich zu:

$$S = 3U_s I_s = 3 \frac{U_v}{\sqrt{3}} I_v$$

$$S = 3U_s I_s = 3U_v \frac{I_v}{\sqrt{3}}$$

Es gilt also immer für die Leistung:

$$S = \sqrt{3}U_v I_v = \sqrt{3}UI$$

Der Index „v“ wird im allgemeinen weggelassen. Die Angaben auf den Leistungsschildern elektrischer Maschinen sind immer verkettete Größen!

1.6 Symmetrische Komponenten

Ein symmetrisches 3-strängiges Netzwerk kann unsymmetrisch betrieben werden, z.B. durch:

- Speisung mit unsymmetrischen Spannungen
- Einphasige Belastung zwischen zwei Strängen oder einem Strang und angeschlossenem Nullleiter

Führt man diese unsymmetrischen (unbekannten) Betriebszustände auf symmetrische zurück, so erzielt man eine Vereinfachung der Berechnung. Hierzu eignet sich die Methode der symmetrischen Komponenten:

Ein unsymmetrisches 3-Phasen-System wird in drei symmetrische Systeme (Mit-, Gegen- und Nullsystem) zerlegt, das Netzwerk durchgerechnet und die Ergebnisse überlagert.

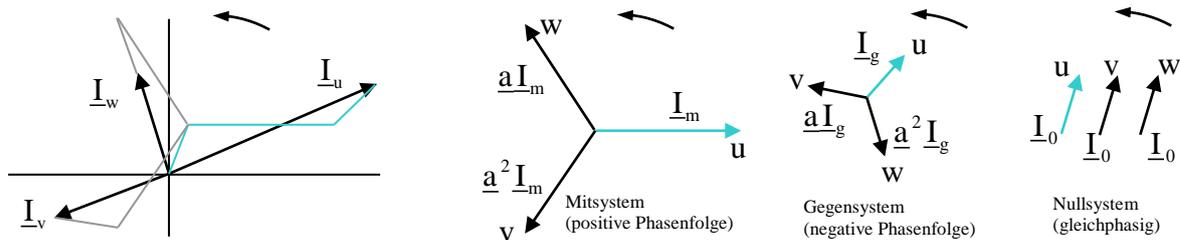
Voraussetzungen:

- Die drei Ströme bzw. Spannungen besitzen die gleiche Frequenz und sind zeitlich sinusförmig (d.h. überschwingungsfrei); Phasenlage und Betrag sind beliebig.
- Wegen der Überlagerung der Ergebnisse muss Linearität gelten.

Es wird nun der komplexe Zeiger $\underline{a} = e^{j\frac{2\pi}{3}}$ eingeführt. Es gilt:

$$\underline{a}^2 = e^{j\frac{4\pi}{3}} = e^{-j\frac{2\pi}{3}}; \quad 1 + \underline{a} + \underline{a}^2 = 0$$

Das folgende unsymmetrische Stromsystem $\underline{I}_u, \underline{I}_v, \underline{I}_w$ wird nun durch die drei Komponenten $\underline{I}_m, \underline{I}_g, \underline{I}_0$ dargestellt.



a) unsymmetrisches Stromsystem

b) symmetrische Stromsysteme

Es gilt nun:

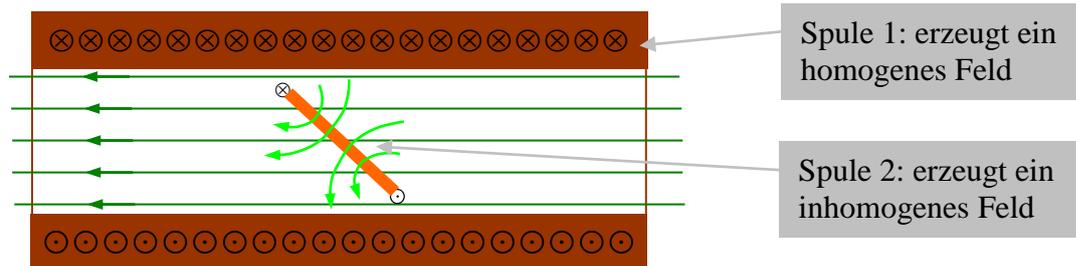
$$\begin{aligned} \underline{I}_u &= \underline{I}_m + \underline{I}_g + \underline{I}_0 \\ \underline{I}_v &= \underline{a}^2 \underline{I}_m + \underline{a} \underline{I}_g + \underline{I}_0 \\ \underline{I}_w &= \underline{a} \underline{I}_m + \underline{a}^2 \underline{I}_g + \underline{I}_0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \underline{I}_u \\ \underline{I}_v \\ \underline{I}_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \underline{a}^2 & \underline{a} & 1 \\ \underline{a} & \underline{a}^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{I}_m \\ \underline{I}_g \\ \underline{I}_0 \end{pmatrix}$$

Durch Auflösen erhält man die Zerlegungsvorschrift:

$$\begin{pmatrix} \underline{I}_m \\ \underline{I}_g \\ \underline{I}_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{I}_u \\ \underline{I}_v \\ \underline{I}_w \end{pmatrix}$$

Man kann nun das unsymmetrische System $\underline{I}_u, \underline{I}_v, \underline{I}_w$ nach obiger Zerlegungsvorschrift in drei symmetrische Systeme $\underline{I}_m, \underline{I}_g, \underline{I}_0$ zerlegen, diese drei Systeme berechnen und dann die Rücktransformation (durch Überlagerung der drei Einzelergebnisse) durchführen.

1.7 Gegeninduktivität



Berechnung der magnetischen Energie (die Tilde dient zur Unterscheidung von Integrationsgrenze und Integrationsvariable) bei Erregung von

a) Spule 1 allein: $dW_1 = i_1 d\Psi_1 \Rightarrow W_1 = \int_0^{i_1} i_1 d\tilde{\Psi}_1 = \int_0^{i_1} \tilde{i}_1 L_1 d\tilde{i}_1 = \frac{1}{2} L_1 i_1^2$

b) Spule 2 allein: $dW_2 = i_2 d\Psi_2 \Rightarrow W_2 = \int_0^{i_2} i_2 d\tilde{\Psi}_2 = \int_0^{i_2} \tilde{i}_2 L_2 d\tilde{i}_2 = \frac{1}{2} L_2 i_2^2$

c) Spulen 1 und 2: $dW = dW_1 + dW_2 = i_1 d\Psi_1 + i_2 d\Psi_2$, mit

$$\Psi_1 = L_1 i_1 + L_{12} i_2, \quad d\Psi_1 = L_1 di_1 + L_{12} di_2$$

$$\Psi_2 = L_2 i_2 + L_{21} i_1, \quad d\Psi_2 = L_2 di_2 + L_{21} di_1$$

$$dW = i_1 (L_1 di_1 + L_{12} di_2) + i_2 (L_2 di_2 + L_{21} di_1)$$

Unter der Annahme $\mu = \text{const.}$ folgt:

a) zunächst Erhöhung des Stromes i_1 von 0 auf i_1

$$i_2 = 0, di_2 = 0 \Rightarrow W = \int_0^{i_1} \tilde{i}_1 L_1 d\tilde{i}_1 = \frac{1}{2} L_1 i_1^2$$

danach Erhöhung des Stromes i_2 von 0 auf i_2

$$i_1 = i_1, di_1 = 0 \Rightarrow W = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \int_0^{i_2} i_1 L_{12} d\tilde{i}_2 + \int_0^{i_2} \tilde{i}_2 L_2 d\tilde{i}_2$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + L_{12} i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2$$

b) zunächst Erhöhung des Stromes i_2 von 0 auf i_2

$$i_1 = 0, di_1 = 0 \Rightarrow W = \int_0^{i_2} \tilde{i}_2 L_2 d\tilde{i}_2 = \frac{1}{2} L_2 i_2^2$$

danach Erhöhung des Stromes i_1 von 0 auf i_1

$$i_2 = i_2, di_2 = 0 \Rightarrow W = \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + \int_0^{i_1} \tilde{i}_1 L_{12} d\tilde{i}_1 + \int_0^{i_1} i_2 L_{21} d\tilde{i}_1$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + L_{21} i_2 i_1$$

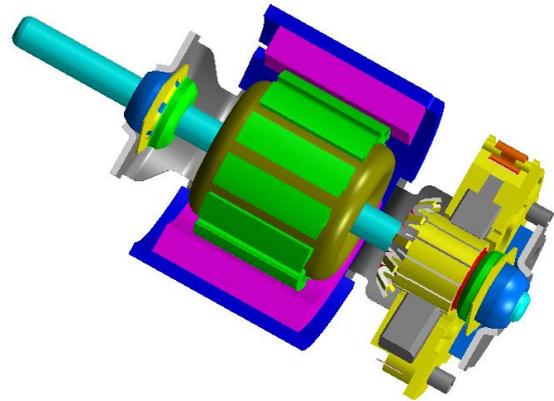
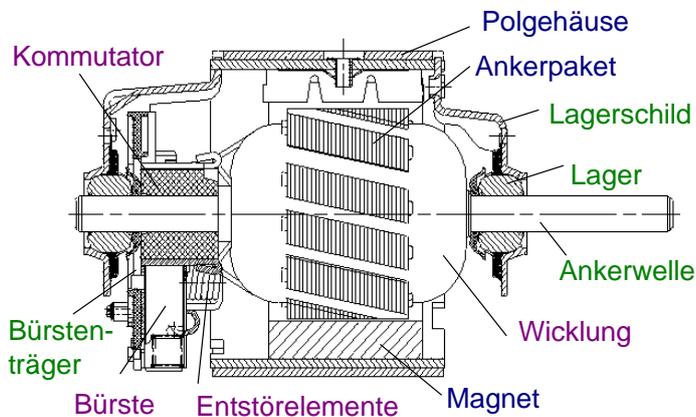
Unabhängig von der Reihenfolge der Erhöhung der Ströme (Einschalten der Spulen) muss die magnetische Energie immer denselben Wert annehmen. Also folgt:

$$L_{12} = L_{21} = L_m$$

2 Gleichstrommaschine

2.1 Prinzipieller Aufbau

Schnittzeichnung und perspektivische Ansicht einer Gleichstrommaschine (mit Dauermagneterregung):



Fotos: Stator (mit elektrischer Erregung)



Rotor (Anker)



Der prinzipielle Aufbau einer Gleichstrommaschine lässt sich wie folgt beschreiben:

Der feststehende Ständer (auch „Stator“ genannt) besteht meist aus massivem Eisen (zur Führung des magnetischen Flusses). Es wird ein ruhendes magnetisches Feld mit wechselnder Polarität erzeugt; entweder durch Permanentmagnete (wie in den Bildern oben gezeigt) oder durch ausgeprägte Pole, die eine mit Gleichstrom durchflossene Erregerwicklung tragen (siehe Foto).

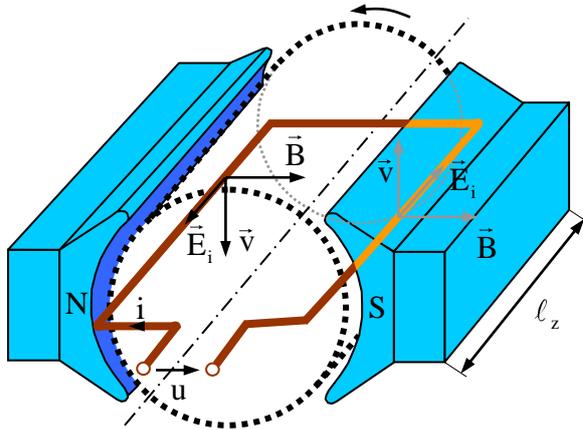
Der Rotor (auch „Läufer“ oder „Anker“ genannt) besteht aus einem Eisen-Blechpaket, in dessen Nuten sich Spulen aus Kupferdraht befinden. Diese Spulen sind mit den Haken des Kommutators verbunden. Auf diesem Kommutator schleifen Kohlebürsten, die den Strom von den ruhenden Zuleitungen in die rotierenden Spulen übertragen.

Durch diesen Kommutator wird der zugeführte Gleichstrom in den Rotorspulen ständig so umgepolt, dass der Strom in den Rotorspulen unter einem Magnetpol des Stators immer in die gleiche Richtung fließt (unter dem Magnetpol anderer Polarität fließt der Strom in umgekehrter Richtung). Durch diese Umpolung entsteht in den Rotorspulen ein Wechselstrom.

2.2 Spannungserzeugung, Drehmomentbildung und Kommutierung

Jede elektrische Maschine lässt sich prinzipiell als Motor oder als Generator betreiben. Im Generatorbetrieb wird in der Regel die Erzeugung einer zeitlich konstanten Spannung gefordert, im Motorbetrieb in der Regel die Erzeugung eines zeitlich konstanten Drehmomentes.

In einer sich drehenden Spule wird nach dem Induktionsgesetz eine Spannung induziert:



$$u_i = -\oint \vec{E}_i d\vec{l} = -\oint (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{l} = 2|B|v\ell_z$$

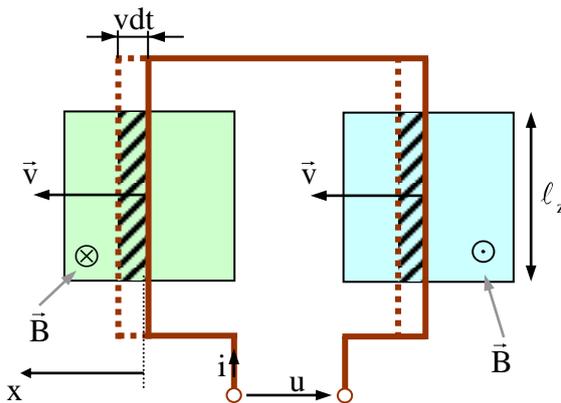
$$u = Ri + u_i$$

$$\Rightarrow u = Ri + 2|B|\ell_z v$$

zu den Vorzeichen:

- $u_i = -\oint \vec{E}_i d\vec{l}$ ist so in Kapitel 1.1 definiert
- \vec{E}_i und $d\vec{l}$ (in Richtung des Stromes i) sind entgegengesetzt gerichtet

Darstellung in „abgewickelter“ Form:



$$u_i = \frac{d\Psi}{dt} = w \frac{d\Phi}{dt}, \quad w = 1$$

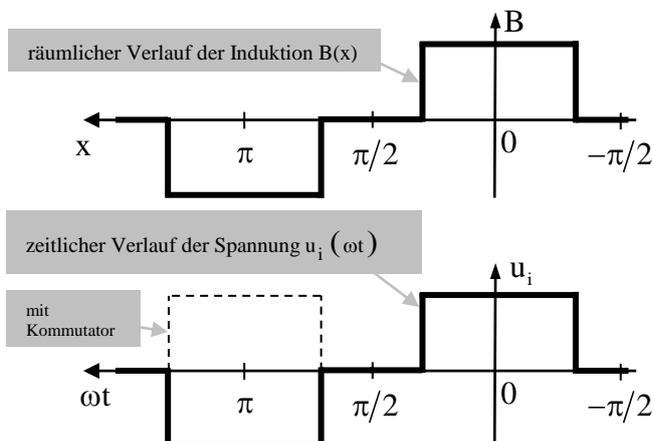
$$\Rightarrow u_i = \frac{|B|dA}{dt} = \frac{|B| \cdot 2 \cdot \ell_z \cdot vdt}{dt} = 2|B|\ell_z v$$

$$v = \omega_{\text{mech}} r = 2\pi n r$$

zu den Vorzeichen:

- $u_i = \frac{d\Psi}{dt}$ ist in Kapitel 1.1 hergeleitet
- $d\vec{l}$ (in Richtung des Stromes i) und \vec{B} in der linken Bildhälfte (Zunahme von \vec{B}) sind wie bei einer Rechtsschraube miteinander verbunden

Die Zuordnung zwischen dem räumlichen Verlauf der Induktion und dem zeitlichen Verlauf der Spannung ist wie folgt:



Zwischen der elektrischen Kreisfrequenz ω und der mechanischen Kreisfrequenz ω_{mech} besteht folgender Zusammenhang über die Polpaarzahl p :

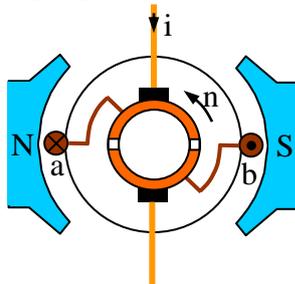
$$\omega = p\omega_{\text{mech}}$$

$$\Rightarrow 2\pi f = p \cdot 2\pi n$$

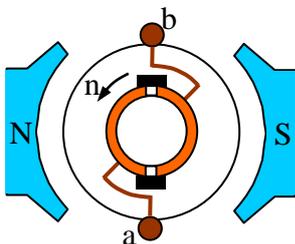
$$\Rightarrow f = pn$$

Der Kommutator macht aus der Wechselspannung in der Spule eine (oberschwingungsbehafte) Gleichspannung an den äußeren Klemmen. Durch Hintereinanderschaltung mehrerer gleichmäßig am Rotorumfang verteilter Spulen erhält man eine größere Gleichspannung mit geringerem Oberschwingungsanteil.

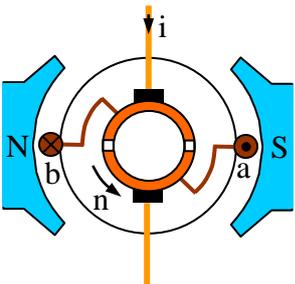
Vorgang der Kommutierung (Stromwendung):



- 1) Der Strom fließt über eine Kohlebürste, eine Kommutatorlamelle, durch eine Spule und über die gegenüberliegende Kommutatorlamelle und Kohlebürste. Bei Motorbetrieb entsteht ein Drehmoment in Drehrichtung.



- 2) Unter jeder Bürste stehen beide Kommutatorlamellen; es fließt kein Strom in der Spule (Spulenanfang und Spulende sind über die Bürsten kurzgeschlossen) und es entsteht kein Drehmoment. Der Rotor des Gleichstrommotors bleibt durch seine Trägheit in Drehbewegung.

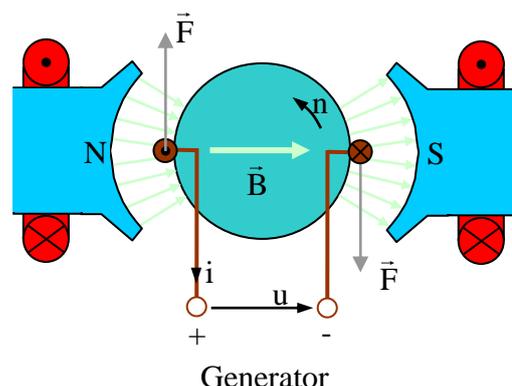
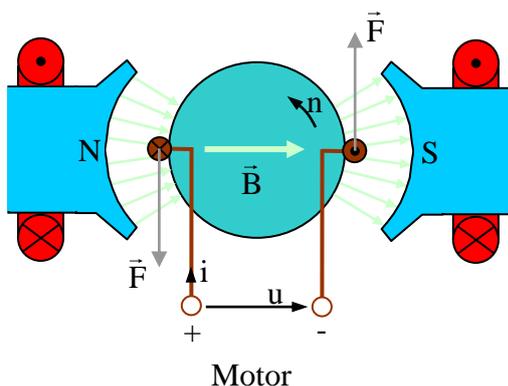


- 3) Wie unter 1) fließt der Strom durch die Spule, allerdings hat der Kommutator (nach 180° Drehung des Rotors) eine Stromrichtungsumkehr in der Spule erzwungen. Drehmoment und Strom an den äußeren Klemmen besitzen also die gleiche Richtung wie unter 1).

In erster Näherung kann man annehmen, dass der Spulenstrom bei der Kommutierung linear vom Maximalwert auf den Minimalwert (Betrag maximal, Vorzeichen negativ) wechselt. In den Zeiten zwischen zwei Kommutierungsvorgängen ist der Spulenstrom (näherungsweise) konstant.

Die Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter ist: $\vec{F} = i(\vec{l} \times \vec{B})$. Hieraus folgen dann Drehrichtung und Drehmoment der Gleichstrommaschine im Motorbetrieb.

Im Generatorbetrieb wird die Spannung $u = -Ri + 2Blv$ erzeugt (hierbei ist das Erzeugerzählpeilsystem zugrunde gelegt, siehe Abbildung unten).



2.3 Polpaarzahl, Wicklungsausführung

Neben den bisher dargestellten 2-poligen Ausführungen sind auch mehrpolige Gleichstrommaschinen möglich. Dabei wiederholt sich die Anordnung p -mal am Umfang (z.B. bei $p = 2$: 4 Bürsten, 4 Magnete bzw. Erregerpole).

Die Vorteile einer hohen Polpaarzahl sind:

- Der Gesamtfluss wird in $2p$ Teilflüsse aufgeteilt. Hierdurch können die Jochquerschnitte in Stator und Rotor kleiner ausgelegt werden (Materialeinsparung).
- Durch die kleinere Polteilung ergeben sich auch kürzere Wickelköpfe (geringerer Widerstand, geringere Verluste).

Die Nachteile sind:

- Durch geringere Abstände der Pole erhält man eine größere magnetische Streuung.
- Durch die höhere Rotorfrequenz steigen die Verluste.

Die Wahl der Polpaarzahl ist also eine Optimierungsaufgabe.

Die Polteilung berechnet sich zu:

$$\tau_p = \frac{2\pi r}{2p}$$

Zwischen mechanischem Winkel α und elektrischem Winkel β besteht die Beziehung:

$$\beta = p\alpha$$

Die in den Nuten des Rotorblechpaketes liegende Wicklung wird häufig als Zweischichtwicklung ausgeführt: Der Hinleiter liegt in der Oberschicht (d.h. dem Luftspalt zugewandt), der Rückleiter liegt in der Unterschicht (d.h. dem Nutgrund zugewandt). In den folgenden Bildern, die die prinzipiellen Verhältnisse in „abgewickelter“ Form darstellen, ist dies gekennzeichnet durch eine durchgezogene Linie (Hinleiter / Oberschicht) bzw. durch eine gestrichelte Linie (Rückleiter / Unterschicht). Bei Gleichstrommaschinen ist jede Spule am Anfang und am Ende an eine Kommutatorlamelle angeschlossen, d.h. die Anzahl der Spulen und die Anzahl der Kommutatorlamellen sind gleich; dies wird im Folgenden mit der Variablen K bezeichnet.

Für die Gleichstrommaschine werden die folgenden Bezeichnungen eingeführt:

- K Anzahl der Kommutatorlamellen (gleich Anzahl der Spulen)
- u Anzahl der Spulenseiten nebeneinander in der Nut
- N Anzahl der Rotornuten
- w_s Anzahl der Windungen je Spule (Anzahl der Leiter je Spulenseite)
- z Gesamtzahl der Leiter in allen Nuten

Der Abstand zwischen zwei Bürsten (d.h. zwischen der Plus-Bürste und der Minus-Bürste) beträgt:

$$y_B = \frac{K}{2p}$$

Außerdem gelten die folgenden Beziehungen:

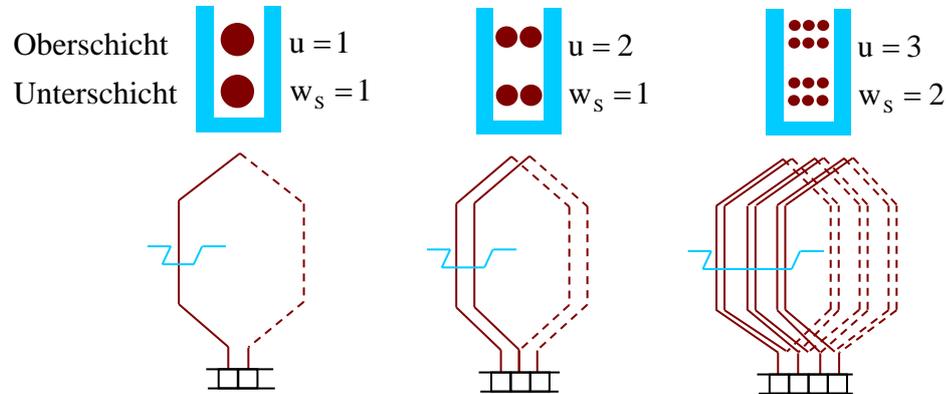
$$K = Nu$$

$$z = 2w_s K$$

Meistens ist $u > 1$, d.h. dann ist die Zahl der Rotornuten kleiner als die Zahl der Kommutatorlamellen ($N < K$).

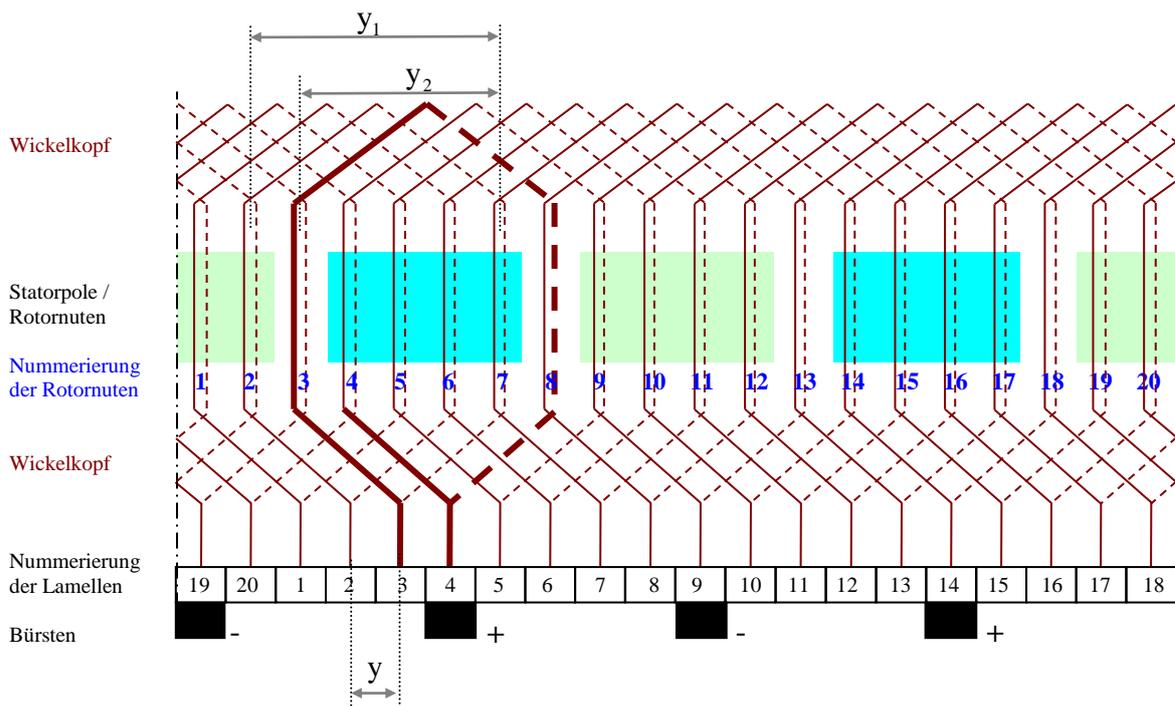
Beispiele (Schleifenwicklung):

- Die drei oberen Bilder zeigen die Leiter in einer Rotornut bei verschiedener Wicklungsausführung.
- Die drei unteren Bilder zeigen die zugehörige Wicklungsausführung, wobei jeweils in der linken Hälfte in der angedeuteten Nut nur die Oberschicht (und jeweils rechts nur die Unterschicht) gezeigt ist.

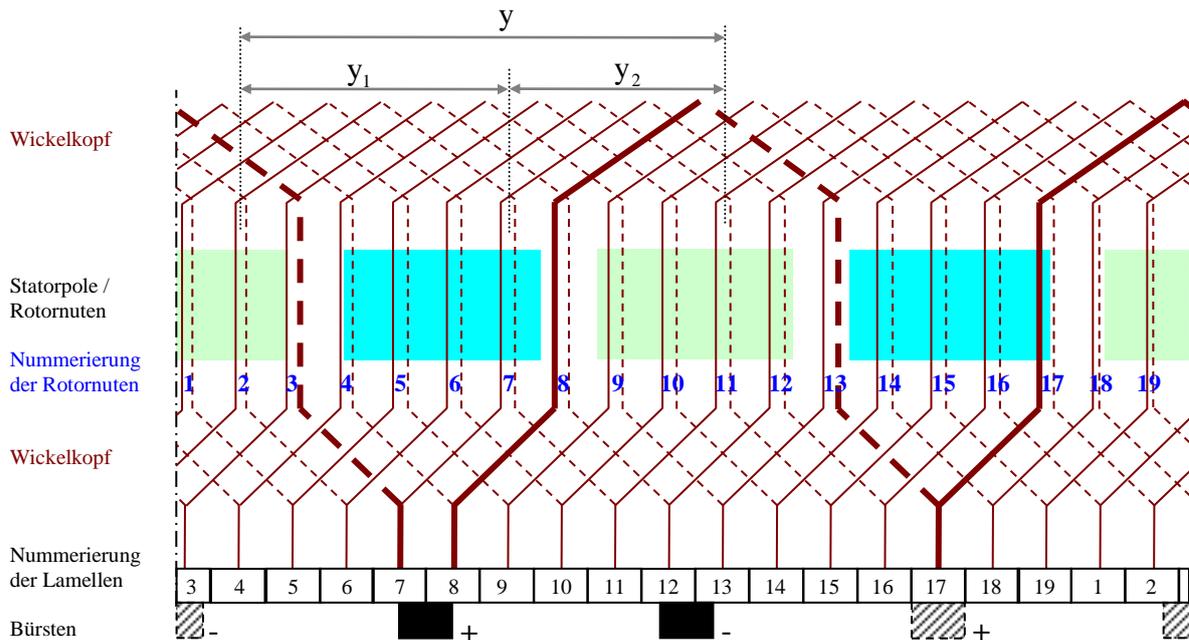


Die Spulen können mit dem Kommutator auf zwei verschiedene Arten verbunden werden:

- Bei der Schleifenwicklung wird ein Spulenende am Kommutator unmittelbar mit dem Anfang der nächsten Spule des gleichen Polpaars verbunden. Zwischen zwei Kommutatorlamellen liegt nur eine Spule. Durch die Bürsten werden alle p Polpaare parallel geschaltet; die Zahl der parallelen Ankerzweige ist: $2a = 2p$. Der gesamte Ankerstrom (Rotorstrom) teilt sich demzufolge in $2p$ parallele Leiterströme auf. Bezeichnet man die Spulenweite (in Anzahl von Rotornuten) mit y_1 und den Schaltschritt (in Anzahl von Rotornuten) mit y_2 , dann beträgt der so genannte Stromwenderschritt y bei der Schleifenwicklung (siehe das folgende Bild): $y = y_1 - y_2 = 1$.



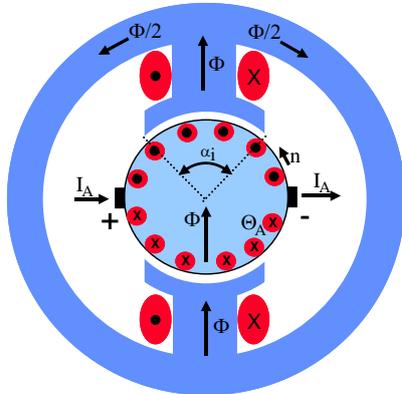
2. Bei der Wellenwicklung wird das Ende einer Spule mit dem Anfang einer entsprechenden Spule des nächsten Polpaares verbunden, sodass bis zur benachbarten Kommutatorlamelle ein Umlauf um den Anker mit p Spulen erfolgt. Zwischen Plus- und Minus-Bürste werden alle p Polpaare in Reihe geschaltet; die Zahl der parallelen Ankerzweige ist: $2a = 2$. Der gesamte Ankerstrom teilt sich demzufolge in 2 parallele Leiterströme auf. Bezeichnet man die Spulenweite (in Anzahl von Rotornuten) mit y_1 und den Schaltschritt (in Anzahl von Rotornuten) mit y_2 , dann beträgt der so genannte Stromwenderschritt y bei der Wellenwicklung (siehe das folgende Bild): $y = y_1 + y_2 = \frac{K-1}{p}$.



Bei der Wellenwicklung kann man bei beliebiger Polpaarzahl mit nur zwei Bürsten auskommen, da alle Plus-Bürsten und alle Minus-Bürsten jeweils parallel geschaltet sind. Dies ist im obigen Bild durch die Schraffur von je einer Plus- und Minus-Bürste angedeutet.

2.4 Hauptgleichungen der Gleichstrommaschine

Es wird zunächst eine 2-polige Gleichstrommaschine betrachtet (siehe Schnittbild). Hierbei ist α_i der „Polbedeckungsfaktor“ (α_i ist eine dimensionslose Zahl, die das Verhältnis von Polbreite zu Polteilung angibt).



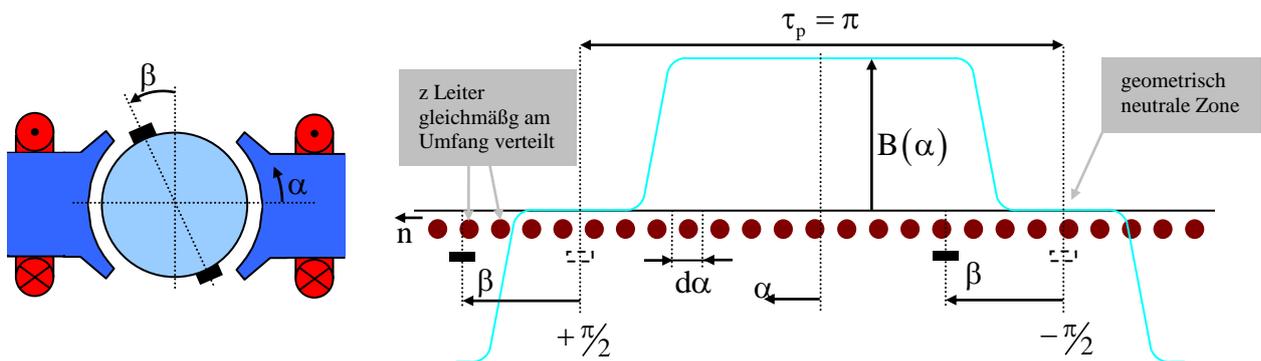
Die Ankerwindungszahl ist: $w_A = \frac{z/2}{2a} = \frac{z}{4a}$; unter den $2p$ Polen wirksam ist $2\alpha_i w_A$.

1. Hauptgleichung: Induzierte Spannung

Die induzierte Spannung in einem einzelnen Ankerleiter ist: $u_i = B\ell v$. Je Anker- (Rotor-) Zweig befinden sich $\frac{z}{2a}$ Leiter in Reihe; je Umfangselement $d\alpha$ (siehe Bild) sind $\frac{z}{2a} \frac{d\alpha}{2\pi p}$ Leiter in Reihe, wenn alle z Leiter gleichmäßig am Umfang verteilt sind.

rotierende Anordnung:

Anordnung in „abgewickelter“ Darstellung:



Für die induzierte Spannung in den Leitern eines Umfangselementes $d\alpha$ gilt dann:

$$u_i(d\alpha) = B(\alpha)\ell v \frac{z}{2a} \frac{d\alpha}{2\pi p}$$

Wegen der Parallelschaltung der Zweige ist die Gesamtspannung eines Zweiges identisch mit der induzierten Spannung. Diese Spannung erhält man nun durch Integration der durch die Bürstenstellung (Bürstenverdrehung) gegebenen Grenzen zu (bei $2p$ Polen):

$$u_i = 2p \int_{-\frac{\pi}{2}+\beta}^{\frac{\pi}{2}+\beta} B(\alpha) \ell v \frac{z}{2a} \frac{d\alpha}{2\pi p}$$

Mit $v = 2\pi n$ folgt:

$$u_i = z \frac{p}{a} n \int_{-\frac{\pi}{2}+\beta}^{\frac{\pi}{2}+\beta} B(\alpha) \ell \frac{r}{p} d\alpha$$

Hierbei beschreibt das Integral den Fluss Φ , der von den Bürsten umfasst wird. Mit $k = z \frac{p}{a} = 4p w_A$ (die Konstante k wird auch Motor- oder Ankerkonstante genannt) gilt nun:

$$u_i = k \Phi n$$

Für $\beta = 0$ (d.h. keine Bürstenverdrehung bzw. Bürsten in neutraler Stellung) und der Luftspaltinduktion B_L unter den Erregerpolen folgt:

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} B(\alpha) \ell \frac{r}{p} d\alpha = \int_{-\alpha_i \frac{\pi}{2}}^{\alpha_i \frac{\pi}{2}} B_L \ell \frac{2\pi r}{2\pi p} d\alpha = \int_{-\alpha_i \frac{\pi}{2}}^{\alpha_i \frac{\pi}{2}} B_L \ell \frac{\tau_p}{\pi} d\alpha \\ &= \alpha_i \tau_p B_L \ell \end{aligned}$$

2. Hauptgleichung: Drehmoment

Das Drehmoment kann aus der Kraft auf stromführende Leiter ermittelt werden (hier für $\beta = 0$):

$$\begin{aligned} T &= \alpha_i w_A i \cdot B_L \cdot 2\ell \cdot r \\ &= \frac{4p w_A}{2\pi} \alpha_i \tau_p \ell B_L i \end{aligned}$$

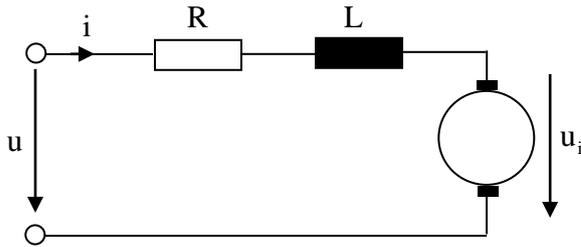
Also folgt:

$$T = \frac{k}{2\pi} \Phi i$$

3. Hauptgleichung: Klemmenspannung

Für die Klemmenspannung gilt (im Verbraucherzählpfeilsystem):

$$u = u_i + Ri + L \frac{di}{dt}$$



Im stationären Fall gilt: $U = U_i + RI$.

Leistungsbilanz:

Mit Hilfe der Spannungsgleichung kann nun die Leistungsbilanz aufgestellt werden (Multiplikation der Spannungsgleichung mit dem Strom i):

$$ui = u_i i + i^2 R + Li \frac{di}{dt}$$

Hieraus lässt sich ablesen: Die elektrische Eingangsleistung ist gleich der inneren Leistung der Maschine plus der elektrischen Verluste plus der Änderung der magnetischen Energie.

Bei Vernachlässigung der Eisen- und Reibungsverluste ist die innere Leistung der Maschine gleich der mechanischen Leistung. Also gilt:

$$u_i i = P_i = P_{\text{mech}} = \omega_{\text{mech}} T = 2\pi n T$$

Hieraus folgt:

$$T = \frac{u_i i}{2\pi n} = \frac{k\Phi n i}{2\pi n} = \frac{k}{2\pi} \Phi i$$

Ausnutzungsziffer:

Maßgeblich für die Dimensionierung von Gleichstrommaschinen ist die innere Leistung $P_i = u_i i$. Begrenzt wird diese innere Leistung durch die Materialeigenschaften von Kupfer (Verluste) und Eisen (magnetische Sättigung). Diese Begrenzungen lassen sich beschreiben durch die Größen B (Flussdichte) und A (Strombelag). Der „Strombelag“ ist eine Modellvorstellung, die die in Nuten angeordnete Wicklung gedanklich vereinfacht: Man nimmt an, dass die Leiter unendlich dünn sind und auf der Rotoroberfläche verteilt werden (siehe auch Kapitel 3.2). Es bestehen folgende Zusammenhänge:

$$u_i = k\Phi n = z \frac{p}{a} \alpha_i \tau_p \ell B n$$

$$i = A \cdot 2\pi r \cdot \frac{2a}{z}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
 P_i = u_i i &= \frac{z p \cdot 2a}{a \cdot z} \alpha_i \tau_p \ell B n \cdot 2\pi r A \\
 &= 2p \alpha_i \frac{2\pi r}{2p} 2\pi r \ell n A B \\
 &= \alpha_i 4\pi^2 r^2 \ell n A B \\
 &= C 4r^2 \ell n \quad \text{mit} \quad C = \alpha_i \pi^2 A B
 \end{aligned}$$

Die Größe C heißt Ausnutzungsziffer (Esson'sche Zahl); die innere Leistung wird nun beschrieben durch die Geometrie, die Drehzahl und die Ausnutzungsziffer.

Beispiel:

Typische Werte sind: $\alpha_i = 0,65$, $A = 500 \text{ A/cm}$ und $B = 0,8 \text{ T}$. Daraus folgt $C = 4,28 \text{ kW min/m}^3$.

Nun soll eine Gleichstrommaschine mit $P_i = 100 \text{ kW}$, $n = 2000 \text{ min}^{-1}$ und $p = 2$ dimensioniert werden.

Wird $\tau_p = \ell$ gewählt, so erhält man:

$$\begin{aligned}
 \frac{P_i}{C n} &= 4r^2 \ell = 4r^2 \tau_p = 4r^2 \frac{2\pi r}{2p} \Rightarrow \frac{P_i}{C n} = 2\pi r^3 \\
 \Rightarrow r &= \sqrt[3]{\frac{P_i}{2\pi C n}} \approx 0,123 \text{ m} \\
 \Rightarrow \ell &= \frac{1}{4r^2} \frac{P_i}{C n} = \frac{1}{4r^2} 2\pi r^3 = \frac{1}{2} \pi r = 0,193 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Eine Umformung ergibt:

$$C' = \frac{2}{\pi^2} C = \frac{2}{\pi^2} \frac{P_i}{4r^2 \ell n} = \frac{2}{\pi^2} \frac{2\pi n T}{4r^2 \ell n} = \frac{T}{\pi r^2 \ell}$$

Die Ausnutzungsziffer C ist also dem auf das Bohrungsvolumen bezogenen Drehmoment proportional.

Weiter gilt:

$$C' = \frac{T}{\pi r^2 \ell} = \frac{F r}{\pi r^2 \ell} = 2 \frac{F}{2\pi r \ell} = 2f$$

Die Ausnutzungsziffer C ist also auch der auf die Bohrungsfläche bezogenen Kraft f (Dreh Schub) proportional.

Mit $C = \alpha_i \pi^2 A B$ gilt nun:

$$C' = 2\alpha_i A B$$

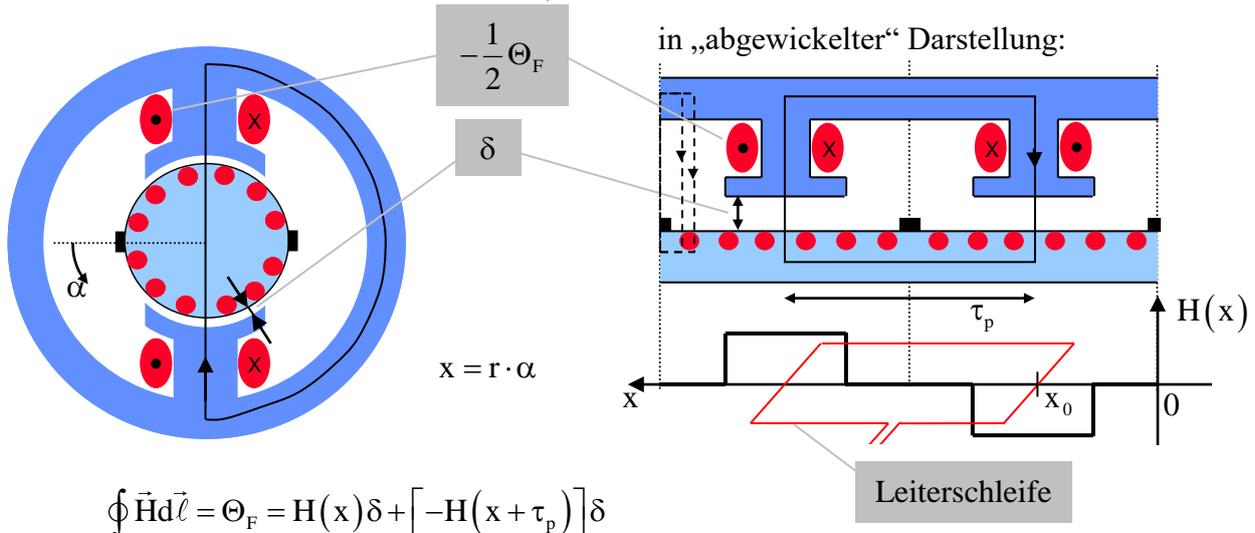
$$f = \alpha_i A B$$

2.5 Induzierte Spannung und Drehmoment, detaillierte Betrachtung

Induzierte Spannung:

Bisher wurde bei der Berechnung von induzierter Spannung und Drehmoment davon ausgegangen, dass die Leiter des Rotors im Luftspaltfeld liegen. Die Rotorleiter befinden sich aber in den Nuten des Läufers; das magnetische Feld wird durch das umgebende Eisen an der Rotorwicklung „vorbeigeführt“.

Zur Berechnung der induzierten Spannung wird das Durchflutungsgesetz mit einem Umlauf um eine Polteilung angesetzt (für die Permeabilität des Eisens gelte: $\mu_{Fe} \rightarrow \infty$; der Ankerstrom sei Null; r ist der Rotorradius):



$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \Theta_F = H(x)\delta + [-H(x + \tau_p)]\delta$$

$$= 2H(x)\delta = \frac{B(x)}{\mu_0} 2\delta$$

Aufgrund der Symmetrie ist die Feldstärke an zwei Punkten, die um eine Polteilung τ_p versetzt sind, betragsmäßig gleich und vorzeichenmäßig entgegengesetzt. Wird der Umlauf (der ja eine ganze Polteilung umfassen soll) nicht unter den Polen, sondern in den Pollücken geschlossen, so ergibt das Umlaufintegral den Wert Null. Also gilt für die Luftspaltinduktion:

$$B(x) = \begin{cases} \pm B_L = \pm \frac{\mu_0}{2\delta} \Theta_F & \text{im Bereich der Pole} \\ 0 & \text{im Bereich der Pollücken} \end{cases}$$

Es wird nun eine Leiterschleife der Breite τ_p (Polteilung) und der Länge ℓ (axiale Länge der Maschine) betrachtet. Diese Leiterschleife liege mit Hin- und Rückleiter in Rotornuten. Außerdem sollen sich Hin- und Rückleiter immer im Bereich der Statorpole befinden. Diese letzte Bedingung ist erfüllt für

$$\frac{\tau_p}{2}(1 - \alpha_i) \leq x_0 \leq \frac{\tau_p}{2}(1 + \alpha_i),$$

wenn x_0 den Anfang der Leiterschleife bezeichnet. Für den von dieser Leiterschleife umfassten Fluss gilt dann:

$$\phi(x_0) = -B_L \ell \tau_p \cdot \left(\frac{\tau_p}{2} - x_0 \right) \frac{2}{\tau_p} = -B_L 2\ell \left(\frac{\tau_p}{2} - x_0 \right).$$

Wird die Leiterschleife nun um den Betrag Δx verschoben (d.h. der Rotor wird um

$\Delta\alpha = \Delta x/r$ gedreht), sie bleibt aber unter den Statorpolen, so ist der umfasste Fluss:

$$\phi(x_0 + \Delta x) = -B_L 2\ell \left(\frac{\tau_p}{2} - (x_0 + \Delta x) \right)$$

Die induzierte Spannung ist gleich der Flussänderung nach der Zeit (siehe Abschnitt 2.2); also folgt:

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \phi(x_0 + \Delta x) - \phi(x_0) \\ &= -B_L 2\ell (-\Delta x) \\ U_i &= \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = -B_L 2\ell \frac{-\Delta x}{\Delta t} = B_L 2\ell v \end{aligned}$$

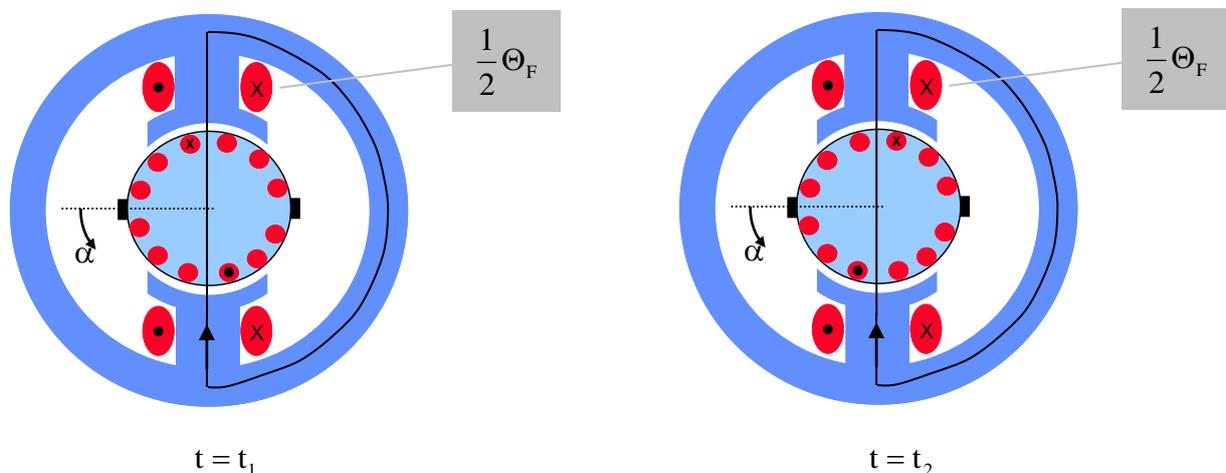
Das Vorzeichen der induzierten Spannung ist abhängig von der Bewegungsrichtung der Leiterschleife (d.h. abhängig von der Bewegungsrichtung des Rotors, da die Leiterschleife ja in Rotornuten eingelegt ist).

Die induzierte Spannung kann also auch bei in Nuten eingelegten Leitern berechnet werden, als würden diese Leiter im Luftspaltfeld liegen.

Drehmoment:

Im vorangegangenen Abschnitt wurde die Berechnung an Hand der „abgewickelten“ Darstellung durchgeführt, in diesem Abschnitt soll die Berechnung nun an Hand der Originalgeometrie ausgeführt werden (beide Berechnungen lassen sich natürlich auch mittels der jeweils anderen Darstellungsform durchführen).

Es wird für eine in die Rotornuten eingelegte Leiterschleife ein Ankerstrom $I_A > 0$ betrachtet (siehe das folgende Bild). Zum Zeitpunkt $t = t_1$ befinde sich der Rotor in der in der linken Bildhälfte gezeigten Position, zum Zeitpunkt $t = t_2$ in der Position, die im folgenden Bild rechts dargestellt ist. Es wird jeweils der eingezeichnete Umlauf über eine Polteilung (der für beide Fälle identisch ist und mit der durchgezogenen Linie dargestellt ist) ausgewertet. Zum Zeitpunkt $t = t_1$ umfasst dieser Umlauf neben der Erregerdurchflutung den Rückleiter der bestromten Rotor-Leiterschleife, zum Zeitpunkt $t = t_2$ den Hinleiter dieser Leiterschleife.



Man erhält zum Zeitpunkt $t = t_1$ mit Hilfe von Symmetriebetrachtungen, wenn α_0 die Mitte eines Statorpoles kennzeichnet:

$$\Theta_F - I_A = H(\alpha_0, t_1) 2\delta = \frac{B(\alpha_0, t_1)}{\mu_0} 2\delta$$

$$\Rightarrow B(\alpha_0, t_1) = \frac{\mu_0}{2\delta} \Theta_F - \frac{\mu_0}{2\delta} I_A = B_L - \frac{\mu_0}{2\delta} I_A$$

Der gleiche Umlauf zum Zeitpunkt $t = t_2$ ergibt, da von der Leiterschleife nur der Hinleiter umfasst wird:

$$\Theta_F + I_A = H(\alpha_0, t_2) 2\delta = \frac{B(\alpha_0, t_2)}{\mu_0} 2\delta$$

$$\Rightarrow B(\alpha_0, t_2) = \frac{\mu_0}{2\delta} \Theta_F + \frac{\mu_0}{2\delta} I_A = B_L + \frac{\mu_0}{2\delta} I_A$$

Bei einer Drehung des Rotors um $\Delta\alpha$ ändert sich die magnetische Energie im Volumenelement $\Delta V = 2\ell\delta \cdot r\Delta\alpha$ wie folgt (die magnetische Energie außerhalb dieses Volumenelementes muss nicht betrachtet werden, da sich das magnetische Feld außerhalb des von der bewegten Leiterschleife aufgespannten Raumes nicht ändert):

$$\Delta W_{\text{mag}} = W_{\text{mag}}(t = t_2) - W_{\text{mag}}(t = t_1) = \frac{B^2(t_2, \alpha_0) - B^2(t_1, \alpha_0)}{2\mu_0} 2\ell\delta \cdot r\Delta\alpha$$

$$= \frac{2 \cdot 2B_L \frac{\mu_0}{2\delta} I_A}{2\mu_0} 2\ell\delta \cdot r\Delta\alpha = 2B_L I_A \ell r\Delta\alpha$$

Die Kraft auf einen Leiter berechnet sich nun aus der Änderung der magnetischen Energie nach dem Weg (wobei beachtet werden muss, dass bisher zwei Leiter, nämlich Hin- und Rückleiter der Leiterschleife, betrachtet wurden):

$$F = \frac{1}{2} \frac{\Delta W_{\text{mag}}}{r\Delta\alpha} = I_A B_L \ell$$

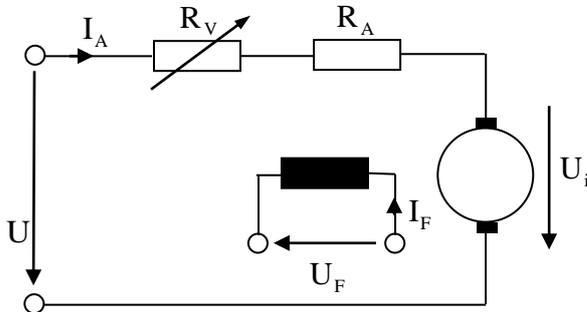
Das Vorzeichen der Kraft ist – bei konstantem Statorfeld – abhängig von der Stromrichtung in der Leiterschleife (d.h. abhängig von der Polung der an die Leiterschleife angelegten Gleichspannung).

Die Kraft auf in Nuten eingelegte Leiter kann also berechnet werden, als würden diese Leiter im Luftspaltfeld liegen.

Die Kraft greift jedoch nicht am Leiter selbst an, sondern an den Eisenzähnen aufgrund unterschiedlicher Induktion. Aus der Kraftberechnung erhält man dann das von der Maschine erzeugte Drehmoment. Somit ist auch die Richtung des Drehmomentes abhängig von der Stromrichtung im Rotor (d.h. abhängig von der Polung der an die Rotorspulen angelegten Gleichspannung).

2.6 Fremderregte Gleichstrommaschine

Da die Erregerwicklung der fremderregten Gleichstrommaschine aus einer separaten Spannungsquelle gespeist wird, kann für diesen Maschinentyp im stationären Betrieb folgendes Ersatzschaltbild aufgestellt werden:



Die Klemmenspannung U und die Erregerspannung U_F sind unabhängig voneinander einstellbar. Durch einen variablen Vorwiderstand R_V kann der Gesamtwiderstand im Ankerkreis $R = R_V + R_A$ erhöht werden.

Aus den drei Hauptgleichungen (hier für den stationären Betrieb)

$$U_i = k\Phi n$$

$$T = \frac{k}{2\pi} \Phi I_A$$

$$U = U_i + R I_A$$

folgt das Drehzahlverhalten:

$$n = \frac{U_i}{k\Phi} = \frac{U}{k\Phi} - \frac{R I_A}{k\Phi}$$

Im Leerlauf ($I_A = 0$) gilt:

$$n = n_0 = \frac{U}{k\Phi}$$

Im Stillstand ($n = 0$) gilt für den Kurzschlussstrom:

$$I_A = I_K = \frac{U}{R}$$

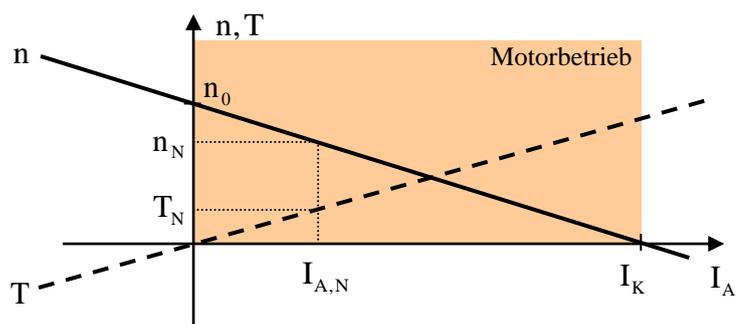
Der Kurzschlussstrom muss also durch den Vorwiderstand R_V begrenzt werden. Das Kurzschlussmoment beträgt:

$$T_K = \frac{k}{2\pi} \Phi I_K$$

Bei Betrieb mit (positiver) Nennspannung $U = U_N$, Nennerregung $\Phi = \Phi_N$ (bei $U_F = U_{F,N}$) und $R_V = 0$ erhält man die Grundkennlinie der fremderregten Gleichstrommaschine:

$$n = n_0 - \frac{R_A I_A}{k\Phi_N}$$

$$T = \frac{k}{2\pi} \Phi_N I_A$$



Im betrachteten Verbraucherzählfeilsystem liegt Motorbetrieb vor für $n > 0, T > 0, I_A > 0$ (also im ersten Quadranten für $I_A < I_K$); Generatorbetrieb liegt vor für $n > 0, T < 0, I_A < 0$. Für $I_A > I_K$ gilt: $n < 0, T > 0, I_A > 0$: dies ist der Bremsbetrieb der Maschine.

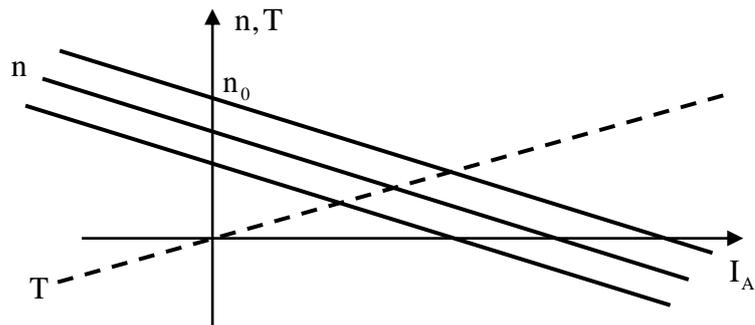
Es gibt drei prinzipielle Möglichkeiten der Drehzahlstellung:

1. Verringerung der Klemmenspannung:

Mit der Spannungsstellung $U/U_N < 1$ ergeben sich folgende Gleichungen:

$$n = n_0 \frac{U}{U_N} - \frac{R_A I_A}{k \Phi_N}$$

$$T = \frac{k}{2\pi} \Phi_N I_A$$



Die Leerlaufdrehzahl wird also kleiner, die Steigung der Drehzahlkennlinie bleibt aber erhalten. Der Zusammenhang Drehmoment – Ankerstrom bleibt unverändert. Der Kurzschlussstrom verringert sich proportional zur Klemmenspannung; die Drehrichtung kann durch Umpolen der Klemmenspannung verändert werden.

Die Drehzahlstellung über die Veränderung der Ankerspannung ist verlustlos. Wegen der kleinen Ankerzeitkonstanten ist diese Art der Drehzahlstellung hochdynamisch.

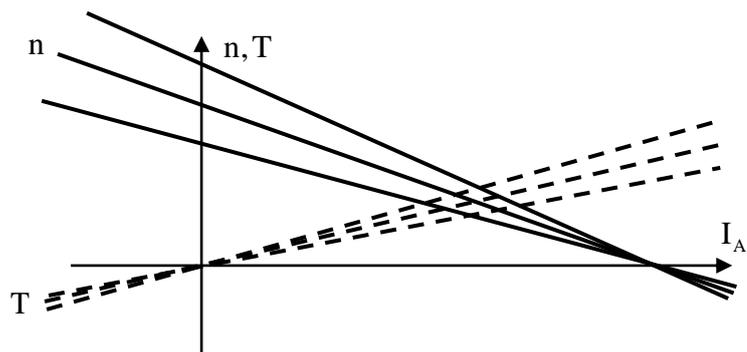
2. Verringerung der Erregung:

Wird der Erregerfluss reduziert (durch Verringerung des Erregerstromes), so gilt bei Vernachlässigung der Sättigung:

$$\frac{I_F}{I_{F,N}} = \frac{\Phi}{\Phi_N} = \frac{1}{f} < 1$$

$$n = fn_0 - f \frac{R_A I_A}{k \Phi_N}$$

$$T = \frac{k}{2\pi} \frac{\Phi_N}{f} I_A$$



Mit zunehmender Feldschwächung (Feldschwächfaktor $f > 1$) wird die Leerlaufdrehzahl erhöht und die Steigung der Drehzahlkennlinie wird größer (d.h. bei Belastung wird der Drehzahlabfall größer). Bei gleichem Ankerstrom wird das Drehmoment mit zunehmender Feldschwächung geringer.

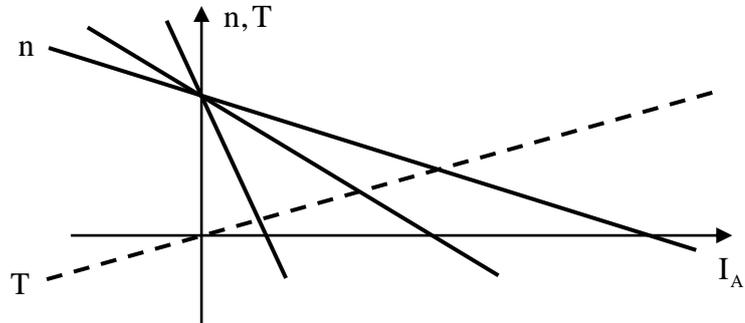
Die Drehzahlstellung über die Feldschwächung ist verlustlos, allerdings (wegen der i.a. großen Erregerzeitkonstante) weniger dynamisch als bei der Drehzahlstellung über die Veränderung der Klemmenspannung.

3. Vergrößerung des Widerstandes im Ankerkreis (Vorwiderstand):

Durch das Einschalten eines Vorwiderstandes R_V in den Ankerkreis erhöht sich dort der Gesamtwiderstand. Es ergeben sich folgende Gleichungen:

$$n = n_0 - \frac{(R_A + R_V) I_A}{k \Phi_N}$$

$$T = \frac{k}{2\pi} \Phi_N I_A$$



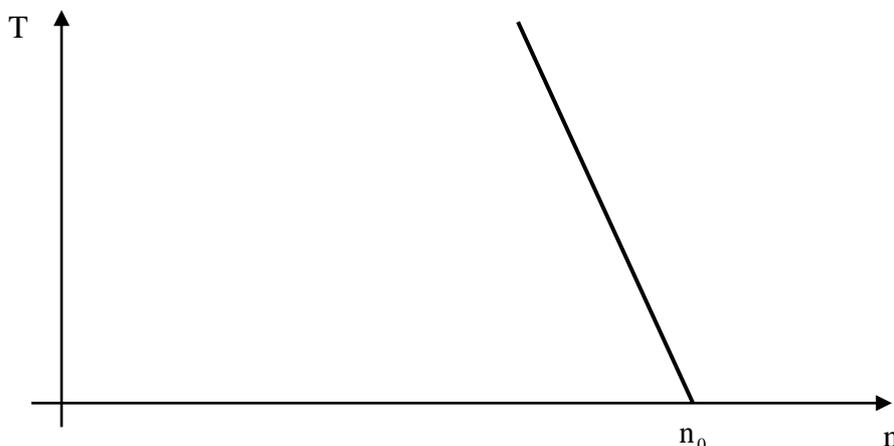
Die Leerlaufdrehzahl n_0 bleibt erhalten, ebenso der Zusammenhang Drehmoment – Ankerstrom. Die Steigung der Drehzahlkennlinie wird steiler, d.h. bei Belastung tritt ein stärkerer Drehzahlabfall ein. Der Kurzschlussstrom wird durch Erhöhung des Vorwiderstandes reduziert, deshalb wird dieses Verfahren beim Anlassen des Motors eingesetzt.

Durch die zusätzlichen Stromwärmeverluste im Vorwiderstand ($R_V I_A^2$) ist das Verfahren verlustbehaftet.

Folgende allgemeine Betriebsgrenzen müssen eingehalten werden:

- Im Dauerbetrieb darf die zulässige Erwärmung nicht überschritten werden: $I_A \leq I_{A,N}$.
- Auch im Feldschwächbetrieb darf die Maschine nicht überlastet werden: $2\pi n T \leq P_N$.
- Mit Rücksicht auf die Fliehkraftbeanspruchung der drehenden Teile darf die maximal zulässige Drehzahl nicht überschritten werden: $n \leq n_{\max}$.

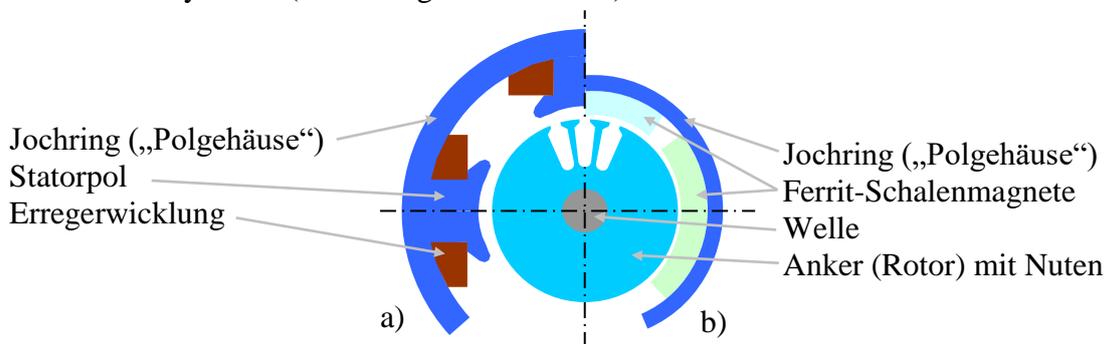
Bei Gleichstrommaschinen werden in der Literatur die Kennlinien häufig über dem Ankerstrom I_A aufgetragen (siehe die obigen Darstellungen). Bei Drehfeldmaschinen wird dagegen häufig die Drehzahl als horizontale Achse genutzt. Um die Kennlinien auf den ersten Blick vergleichbar zu machen, zeigt das folgende Bild das Drehmoment einer fremderregten Gleichstrommaschine als Funktion der Drehzahl (der gleiche Zusammenhang wie in den vorhergehenden Abbildungen ist hier nur anders dargestellt).



2.7 Permanentmagneterregte Gleichstrommaschine

Die permanentmagneterregte Gleichstrommaschine kann als eine Sonderform der fremderregten Gleichstrommaschine betrachtet werden. Auch hier kann die Drehzahlstellung über die Klemmenspannung und über das Einschalten von Vorwiderständen geschehen. Eine Feldschwächung ist allerdings (wegen des durch die Permanentmagnete eingeprägten Flusses) nicht möglich. Die Vorteile der Permanentmagneterregung gegenüber der elektrischen Erregung sind:

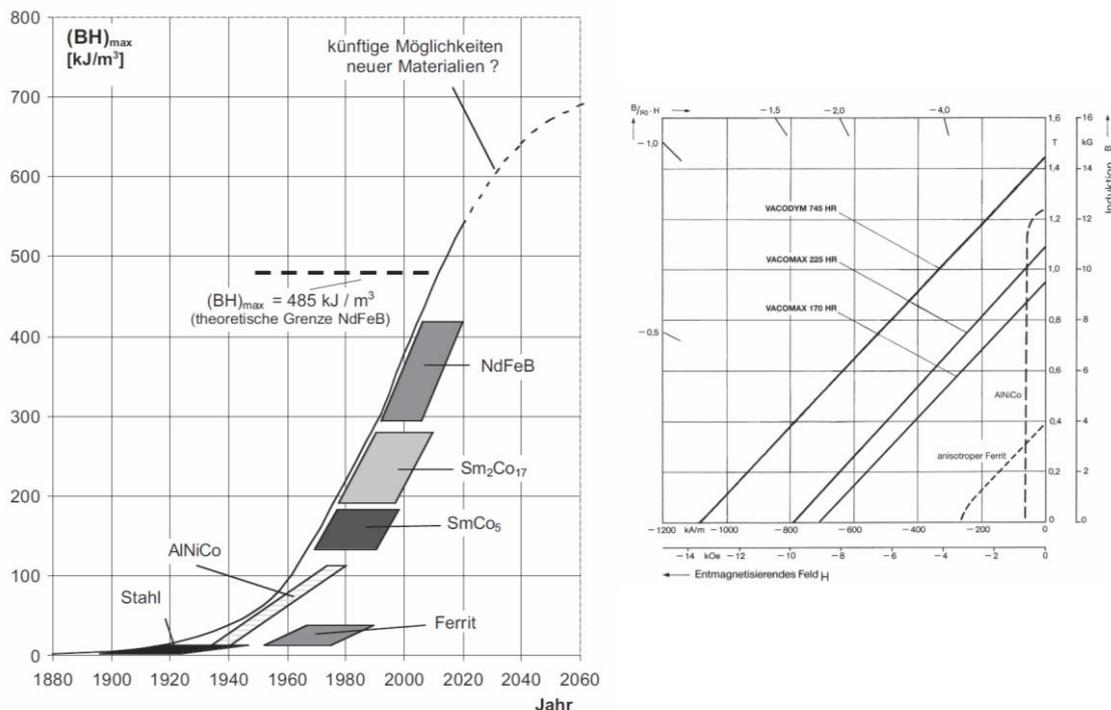
- kleinerer Außendurchmesser
- geringeres Volumen und Gewicht
- einfacherer Aufbau (keine Statorwicklung, weniger Anschlüsse)
- höherer Wirkungsgrad (keine Erregerverluste)
- kostengünstigere Fertigung
- bessere Dynamik (kein Erreger-Feldaufbau)



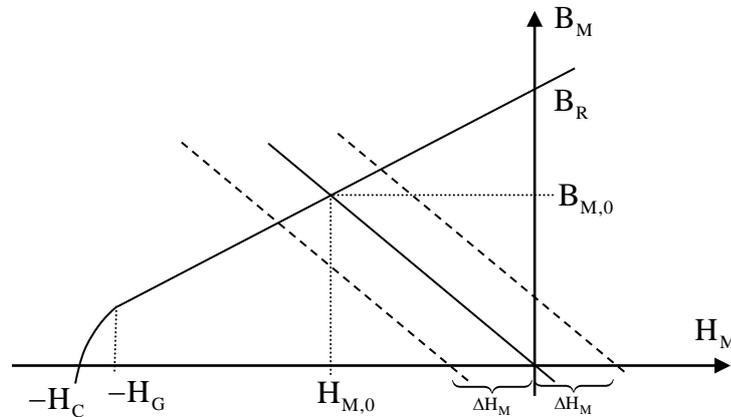
Gleichstrommaschinen mit unterschiedlicher Erregung:

- elektrische Erregung
- Dauermagnet-Erregung

Die zeitliche Entwicklung verschiedener Magnetwerkstoffe zeigt die folgende Grafik [10]:



Der Werkstoff eines Permanentmagneten wird durch die Hystereseschleife im 2. Quadranten beschrieben:



Es gilt:

$$B_M = B_R + \mu_0 \mu_r H_M$$

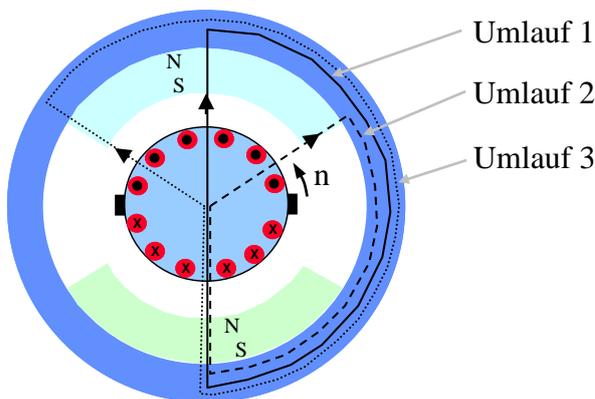
$$B(H=0) = B_R \quad \text{Remanenzinduktion}$$

$$H(B=0) = -H_C \quad \text{Koerzitivfeldstärke}$$

$$\mu_r \approx 1,0 \dots 1,1 \quad \text{reversible Permeabilität}$$

$$-H_G \quad \text{Grenzfeldstärke}$$

Ein Permanentmagnet kann, ohne bleibend entmagnetisiert zu werden, nur im linearen Bereich der Kennlinie betrieben werden. Bei größeren Gegenfeldstärken als H_G tritt ein irreversibler Flussverlust auf.



Bezeichnet man die radiale Magnethöhe mit h_M so folgt aus dem Durchflutungsgesetz bei „Umlauf 1“:

$$\frac{B_{L,1}}{\mu_0} 2\delta + H_{M,1} 2h_M = 0$$

Die Flussdichten lassen sich aufgrund der beteiligten Flächen umrechnen: $B_L = B_M \frac{A_M}{A_L}$

Für die Feldstärke im Magneten gilt (siehe oben): $H_M = \frac{B_M - B_R}{\mu_0 \mu_r}$

Damit folgt für die Induktion im Magneten:

$$\begin{aligned} \frac{B_{M,l}}{\mu_0} \frac{A_M}{A_L} 2\delta + \frac{B_{M,l} - B_R}{\mu_0 \mu_r} 2h_M &= 0 \\ \Rightarrow B_{M,l} \left(\frac{A_M}{A_L} \delta + \frac{h_M}{\mu_r} \right) &= B_R \frac{h_M}{\mu_r} \\ \Rightarrow B_{M,l} &= B_R \frac{1}{\left(\frac{A_M}{A_L} \delta + \frac{h_M}{\mu_r} \right) \frac{\mu_r}{h_M}} \\ &= B_R \frac{1}{1 + \mu_r \frac{A_M}{A_L} \frac{\delta}{h_M}} \end{aligned}$$

und für die Feldstärke im Magneten:

$$\begin{aligned} H_{M,l} &= \frac{B_R}{\mu_0 \mu_r} \left(\frac{1}{1 + \mu_r \frac{A_M}{A_L} \frac{\delta}{h_M}} - 1 \right) \\ &= - \frac{B_R}{\mu_0 \mu_r} \frac{\mu_r \frac{A_M}{A_L} \frac{\delta}{h_M}}{1 + \mu_r \frac{A_M}{A_L} \frac{\delta}{h_M}} \\ &= - \frac{B_R}{\mu_0 \mu_r} \frac{1}{1 + \frac{1}{\mu_r} \frac{h_M}{\delta} \frac{A_L}{A_M}} \end{aligned}$$

Diese berechneten Werte für $B_{M,l}$ und $H_{M,l}$ gelten in der Symmetrieebene, und im Leerlauf (I_A = 0) für den gesamten Magneten.

Nun wird die Luftspaltinduktion an der auflaufenden Kante berechnet („Umlauf 2“). Hierbei ist zu berücksichtigen, dass am gesamten Umfang des Rotors $2w_A$ Leiter liegen, der Strombelag ist $A = \frac{2w_A I_A}{\pi D}$. Der Strom unter einem Pol ist: $A \cdot \alpha_i \tau_p$.

$$\begin{aligned} \oint \vec{H} d\vec{\ell} &= 0 - \left(-\frac{1}{2} A \alpha_i \tau_p \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{2w_A I_A}{\pi D} \alpha_i \frac{\pi D}{2p} \\ &= \frac{1}{2p} \alpha_i w_A I_A = \Delta I \end{aligned}$$

Somit folgt:

$$\begin{aligned} \frac{B_{L,1}}{\mu_0} \delta + H_{M,1} h_M + \frac{B_{L,2}}{\mu_0} \delta + H_{M,2} h_M &= \Delta I \\ \Rightarrow \frac{B_{M,1}}{\mu_0} \frac{A_M}{A_L} \delta + H_{M,1} h_M + \frac{B_{M,2}}{\mu_0} \frac{A_M}{A_L} \delta + \frac{B_{M,2} - B_R}{\mu_0 \mu_r} h_M &= \Delta I \\ \Rightarrow \frac{B_{M,2}}{\mu_0} \left(\frac{A_M}{A_L} \delta + \frac{1}{\mu_r} h_M \right) &= - \frac{B_{M,1}}{\mu_0} \frac{A_M}{A_L} \delta - H_{M,1} h_M + \frac{B_R}{\mu_0 \mu_r} h_M + \Delta I \\ \Rightarrow B_{M,2} &= \mu_0 \frac{1}{\frac{A_M}{A_L} \delta + \frac{1}{\mu_r} h_M} \left[- \frac{B_R}{\mu_0} \frac{\frac{A_M}{A_L} \delta}{1 + \mu_r \frac{A_M}{A_L} \frac{\delta}{h_M}} + \frac{B_R}{\mu_0 \mu_r} \frac{1}{1 + \frac{1}{\mu_r} \frac{h_M}{A_L} \frac{\delta}{h_M}} h_M + \frac{B_R}{\mu_0 \mu_r} h_M + \Delta I \right] \\ \Rightarrow B_{M,2} &= B_R \frac{\frac{\mu_r}{h_M}}{1 + \mu_r \frac{A_M}{A_L} \frac{\delta}{h_M}} \left[- \frac{h_M}{\mu_r} + \frac{1}{\mu_r} \frac{h_M}{1 + \frac{1}{\mu_r} \frac{h_M}{A_L} \frac{\delta}{h_M}} - \frac{\frac{A_M}{A_L} \delta}{1 + \mu_r \frac{A_M}{A_L} \frac{\delta}{h_M}} \right] + \mu_0 \mu_r \Delta I \frac{1}{\mu_r \frac{A_M}{A_L} \delta + h_M} \\ \Rightarrow B_{M,2} &= B_R \frac{\frac{\mu_r}{h_M}}{1 + \mu_r \frac{A_M}{A_L} \frac{\delta}{h_M}} \left(\frac{h_M}{\mu_r} + \delta \frac{A_M}{A_L} \right) \frac{1}{1 + \mu_r \frac{A_M}{A_L} \frac{\delta}{h_M}} + \mu_0 \mu_r \Delta H_M \\ \text{mit } \Delta H_M &= \Delta I \frac{1}{\mu_r \frac{A_M}{A_L} \delta + h_M} \end{aligned}$$

Weiter ergibt sich:

$$\begin{aligned} B_{M,2} &= B_R \frac{1}{1 + \mu_r \frac{A_M}{A_L} \frac{\delta}{h_M}} + \mu_0 \mu_r \Delta H_M \\ &= B_{M,1} + \mu_0 \mu_r \Delta H_M \end{aligned}$$

Unter Belastung ist also die Flussdichte im Magneten B_M an der auflaufenden Kante größer als im Leerlauf.

Für die ablaufende Kante gilt bei Belastung („Umlauf 3“, Herleitung analog zu oben):

$$B_{M,3} = B_{M,1} - \mu_0 \mu_r \Delta H_M$$

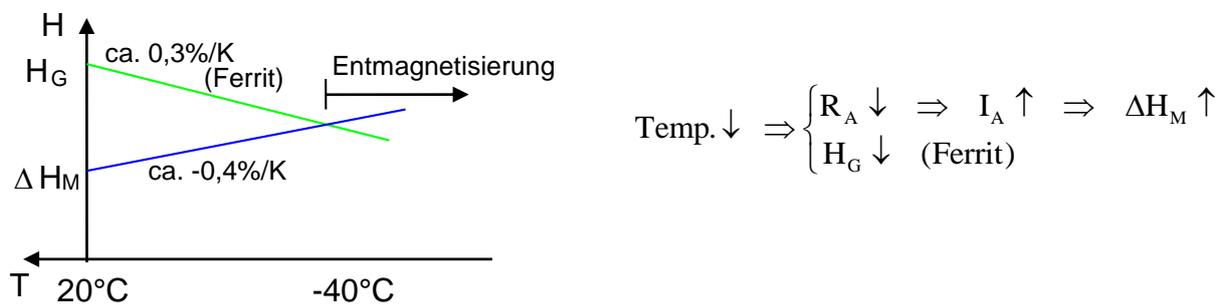
Somit ist unter Belastung der Wert für die Flussdichte im Magneten B_M an der ablaufenden Kante kleiner als im Leerlauf. Es besteht die Gefahr der Entmagnetisierung (siehe auch „Ankerrückwirkung“, Kapitel 2.12)!

Insbesondere bei Anwendungen für einen großen Temperaturbereich muss die Entmagnetisierung im gesamten Temperaturbereich überprüft werden (die Magnetkennlinien ändern sich mit der Temperatur).

Typische Werte von Remanenz (B_R) und Grenzfeldstärke (H_G) und der entsprechenden Temperaturkoeffizienten für verschiedene Magnetmaterialien sind:

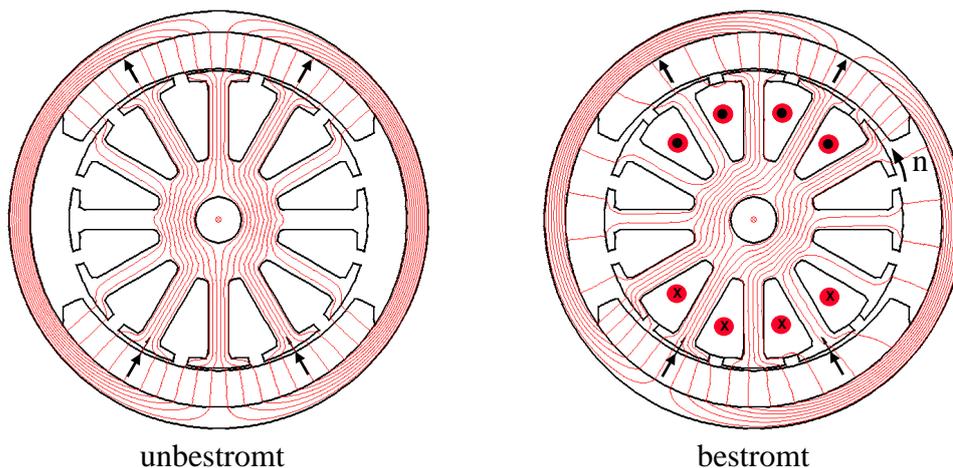
	Remanenz		Grenzfeldstärke	
	Wert bei 20°C	Temperaturkoeffizient	Wert bei 20°C	Temperaturkoeffizient
Ferrit	0,4 T	-0,190 %/K	170 kA/m	+0,30 %/K
NdFeB	1,2 T	-0,090 %/K	1900 kA/m	-0,60 %/K
SmCo	1,1 T	-0,032 %/K	1800 kA/m	-0,19 %/K

Das folgende Bild zeigt in prinzipieller Darstellung den Einfluss der Temperatur auf die Grenzfeldstärke H_G und den Wert ΔH_M .



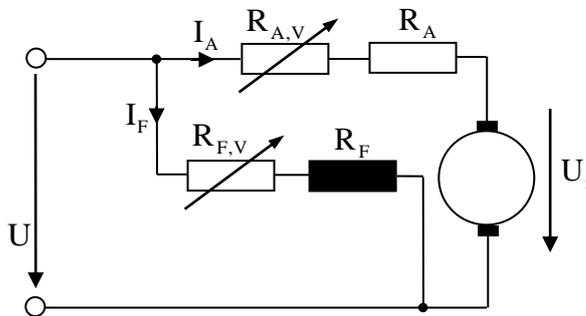
Als Gegenmaßnahme gegen die Entmagnetisierungsgefahr kann die Magnetdicke h_M größer gewählt werden.

Der folgende Vergleich zeigt die Feldbilder eines 2-poligen, 12-nutigen DC-Motors mit Ferritmagneten im unbestromten und bestromten Fall:



2.8 Gleichstromnebenschlussmaschine

Bei der Gleichstromnebenschlussmaschine liegt die Erregerwicklung parallel zum Ankerkreis. Es gilt folgendes Schaltbild:



Im Bild ist der Widerstand R_F mit dem Schaltsymbol einer Induktivität versehen. Dies soll verdeutlichen, dass

- im Felderregerkreis eine Induktivität vorhanden ist, aber
- im hier betrachteten stationären Betrieb nur der Widerstand wirksam ist. Ähnliche Darstellungen sind auch in den folgenden Bildern gewählt.

Anker- und Erregerkreis liegen am Netz konstanter Spannung. Es kann jeweils ein Vorwiderstand zur Drehzahlstellung eingeschaltet werden.

Ist die Nebenschlussmaschine am Netz konstanter Spannung angeschlossen, so ist ihr Drehzahlverhalten identisch zur fremderregten Gleichstrommaschine. Für $R_{A,V} = 0$, $R_{F,V} = 0$ gilt:

$$n = n_0 - \frac{R_A I_A}{k \Phi_N} \quad n_0 = \frac{U_N}{k \Phi_N}$$

$$T = \frac{k}{2\pi} \Phi_N I_A \quad I_K = \frac{U_N}{R_A}$$

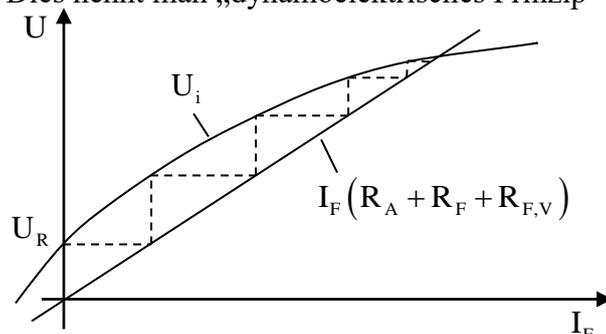
Für die Drehzahlstellung bzw. für die Drehzahlumkehr ist ein Verstellen der Klemmenspannung wirkungslos, da gleichzeitig Erregerstrom und Ankerstrom verändert bzw. umgepolt werden. Die Drehzahl kann nur durch Vorwiderstände gestellt werden:

- im Ankerkreis: verlustbehaftete Drehzahlreduzierung
- im Erregerkreis: nahezu verlustfreie Drehzahlsteigerung

Die Kennlinien sind analog zu denen der fremderregten Gleichstrommaschine.

Die Selbsterregung (Generatorbetrieb):

Wenn man die Erregerwicklung über einen Vorwiderstand parallel zum Anker schaltet und die Maschine mit konstanter Drehzahl antreibt, so wird durch den in jedem Eisenkreis vorhandenen Restmagnetismus im Anker eine Remanenzspannung U_R induziert. Diese Spannung erzeugt einen Erregerstrom I_R , wodurch das Restfeld verstärkt und die induzierte Spannung erhöht wird. Dies geschieht so lange, bis die induzierte Spannung gleich dem Spannungsabfall an den Widerständen im Erregerkreis ist. Damit ist ein stabiler Betriebspunkt erreicht. Dies nennt man „dynamoelektrisches Prinzip“ (Werner von Siemens, 1866).



Wird die Erregerwicklung falsch angeschlossen, so wirkt der Erregerstrom entmagnetisierend

und der Vorgang der Selbsterregung findet nicht statt.

Der Vorwiderstand im Erregerkreis $R_{F,V}$ besitzt zwei Funktionen:

- Die Generatorspannung kann eingestellt werden.
- Die Zeitkonstante der Erregerwicklung wird herabgesetzt, damit der Vorgang der Selbsterregung beschleunigt abläuft.

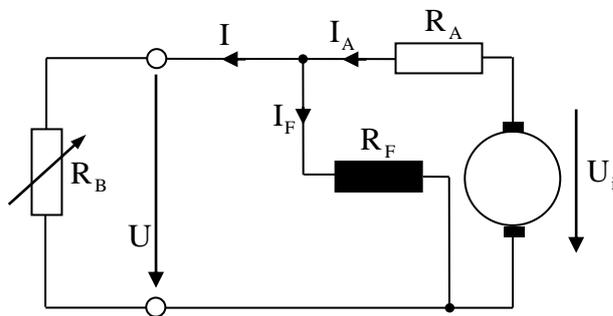
Der Vorwiderstand darf aber einen kritischen Wert nicht überschreiten, damit die Selbsterregung stattfinden kann.

Belastung des Generators:

Bei der fremderregten Gleichstrommaschine ist die Belastungskennlinie $U = f(I)$ eine

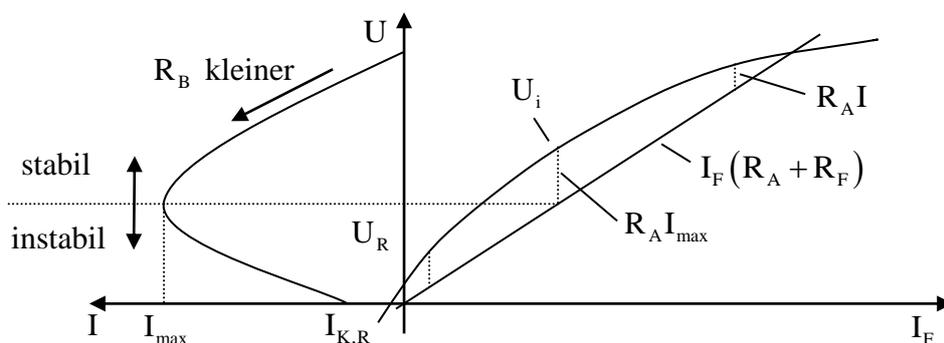
Gerade: $U = U_i - R_A I_A$ (Erzeugerzählpeilsystem!)

Für die Gleichstromnebenschlussmaschine gilt im Erzeugerzählpeilsystem:



$$\begin{aligned}
 U_i &= R_A I_A + R_F I_F \\
 &= R_A (I + I_F) + R_F I_F \\
 &= R_A I + (R_A + R_F) I_F \\
 \Rightarrow I &= \frac{1}{R_A} (U_i - (R_A + R_F) I_F)
 \end{aligned}$$

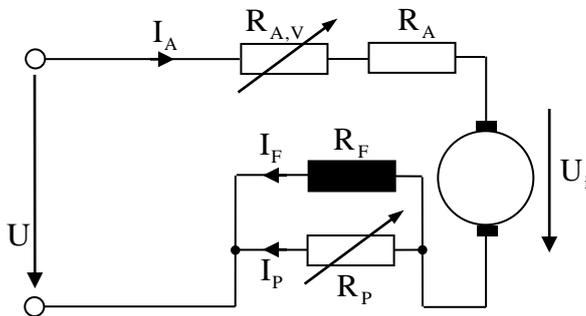
Mit Hilfe der Leerlaufkennlinie kann nun die Belastungskennlinie konstruiert werden:



Der Gleichstromnebenschlussgenerator ist nur bis zum Strom I_{max} belastbar, bei weiterer Belastung bricht die Spannung zusammen. Es fließt dann nur noch der von der Remanenzspannung hervorgerufene Kurzschlussstrom $I_{K,R}$.

2.9 Gleichstromreihenschlussmaschine

Bei der Gleichstromreihenschlussmaschine ist die Erregerwicklung mit dem Anker (Rotor) in Reihe geschaltet:



Der Vorwiderstand im Ankerkreis und der Widerstand parallel zur Erregerwicklung können zur Drehzahlstellung genutzt werden. Da der Erregerstrom bei dieser Variante lastabhängig ist, ist das Drehzahlverhalten der Reihenschlussmaschine grundsätzlich anders als bei den bisher dargestellten Gleichstrommaschinen. Bei Vernachlässigung der Sättigung und für $R_P \rightarrow \infty$ gilt im stationären Betrieb:

$$w_F \Phi = L_h I_F = L_h I_A$$

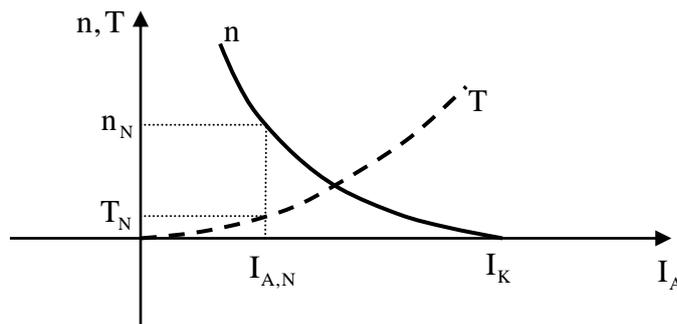
$$k\Phi = 4pw_A \frac{L_h I_A}{w_F} = L'_h I_A$$

Für die Drehmoment- und Drehzahlgleichung folgt dann:

$$n = \frac{U_N}{k\Phi} - \frac{(R_A + R_F)I_A}{k\Phi} = \frac{U_N}{L'_h I_A} - \frac{R_A + R_F}{L'_h}$$

$$T = \frac{k}{2\pi} \Phi I_A = \frac{L'_h}{2\pi} I_A^2$$

Bei Belastung findet also ein starker Drehzahlabfall statt („Reihenschlussverhalten“); das Verhalten im Motorbetrieb zeigt das folgende Bild:



Im Leerlauf ($I_A = 0$) gilt $n \rightarrow \infty$, die Maschine „geht durch“. Die Drehzahl wird nur noch durch Reibmomente (Bürsten, Lager) begrenzt. Der Kurzschlussstrom ($n = 0$) ist:

$$I_K = \frac{U_N}{R_A + R_F}$$

Dieser Kurzschlussstrom muss im Startbetrieb durch den Vorwiderstand $R_{A,V}$ begrenzt werden.

Durch Umpolen kann die Drehrichtung nicht geändert werden, da Ankerstrom und Erregerstrom gleichzeitig das Vorzeichen wechseln.

Zur Drehzahlstellung gibt es die folgenden Möglichkeiten (in den folgenden Bildern ist jeweils der Motorbetrieb dargestellt):

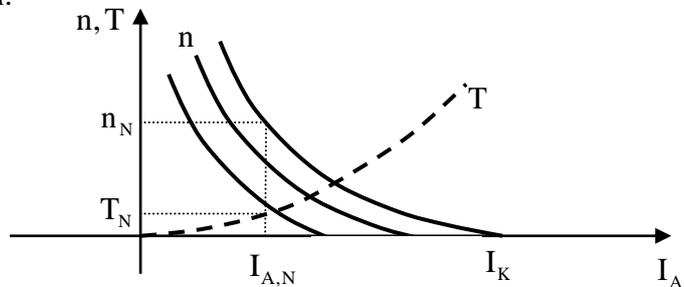
1. Verringerung der Klemmenspannung:

Die Drehzahl und der Kurzschlussstrom werden verlustlos reduziert, der Zusammenhang Drehmoment – Ankerstrom bleibt erhalten:

$$n = \frac{U}{L'_h I_A} - \frac{R_A + R_F}{L'_h}$$

$$I_K = \frac{U}{R_A + R_F}$$

$$T = \frac{L'_h}{2\pi} I_A^2$$



2. Verringerung der Erregung:

Durch Parallelschaltung eines Widerstandes zur Erregerwicklung kann die Erregung reduziert werden. Mit

$$R_p I_p = R_F I_F$$

$$I_A = I_F + I_p$$

folgt:

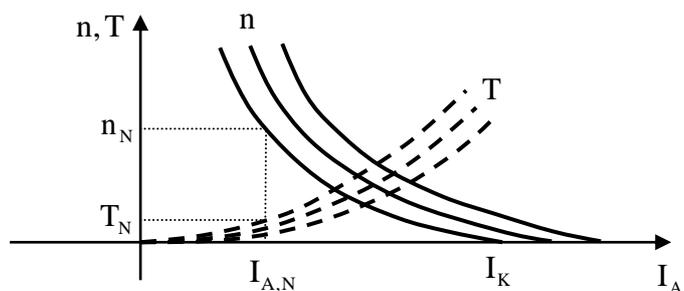
$$I_F = \frac{1}{1 + \frac{R_F}{R_p}} I_A = \frac{1}{f} I_A$$

wobei f wiederum der Feldschwächfaktor ist. Für die Kennlinien ergibt sich:

$$n = f \frac{U_N}{L'_h I_A} - f \frac{R_A + \frac{R_F}{f}}{L'_h}$$

$$I_K = \frac{U_N}{R_A + \frac{R_F}{f}}$$

$$T = \frac{L'_h}{2\pi} I_A^2$$



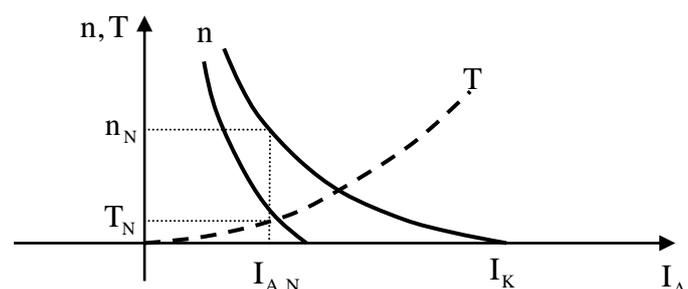
3. Vergrößerung des Widerstandes im Ankerkreis (Vorwiderstand):

Der Drehzahlabfall bei Belastung wird größer, der Kurzschlussstrom wird geringer. Der Zusammenhang Drehmoment – Ankerstrom bleibt erhalten:

$$n = \frac{U_N}{L'_h I_A} - \frac{R_A + R_{A,V} + R_F}{L'_h}$$

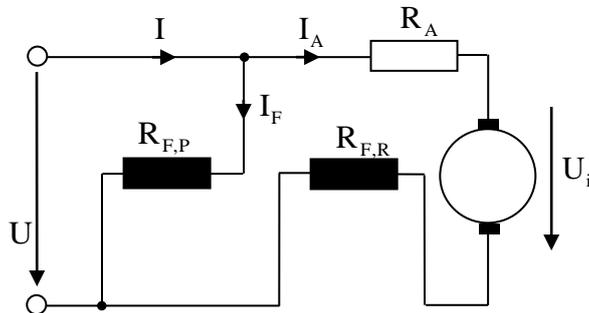
$$I_K = \frac{U_N}{R_A + R_{A,V} + R_F}$$

$$T = \frac{L'_h}{2\pi} I_A^2$$



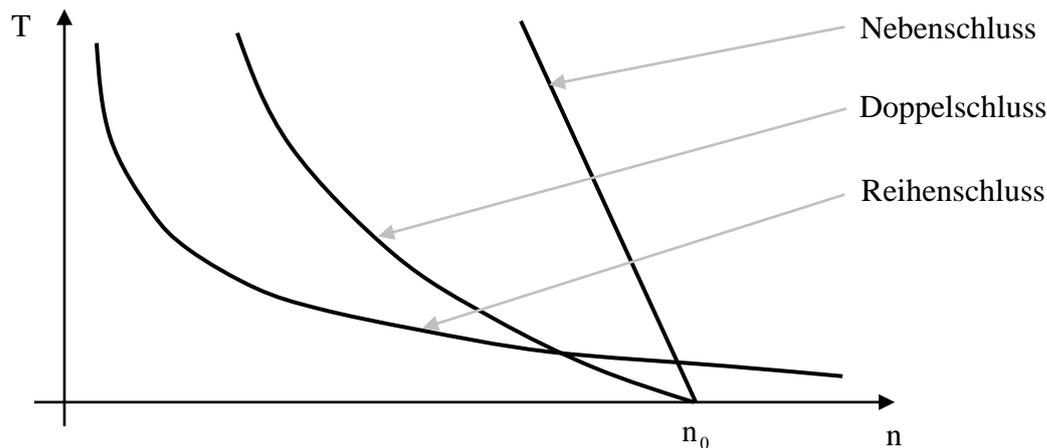
2.10 Gleichstromdoppelschlussmaschine

Die Gleichstromdoppelschlussmaschine besitzt zwei Erregerwicklungen:



Durch die Aufteilung der Erregerwicklung in einen Nebenschluss- und einen Reihenschlussanteil hat die Gleichstromdoppelschlussmaschine in der Nähe des Leerlaufs Nebenschlussverhalten und bei Belastung Reihenschlussverhalten.

Die Drehmoment-Drehzahl-Charakteristiken der drei Gleichstrommaschinentypen sind qualitativ im folgenden Bild dargestellt:

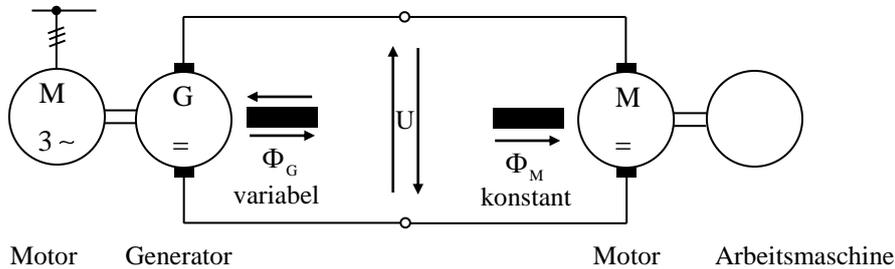


Die wesentlichen Eigenschaften sind:

- Reihenschlussmaschine:
 - nachgiebige Kennlinie (hohes Startmoment bzw. Losbrechmoment und relativ geringes Nennmoment)
 - Gefahr des „Durchgehens“ bei kleiner Last
- Nebenschlussmaschine:
 - steife Kennlinie (die Drehzahl ist nur in geringem Maße lastabhängig)
 - definierte Leerlaufdrehzahl
- Doppelschlussmaschine:
 - nachgiebige Kennlinie (hohes Startmoment bzw. Losbrechmoment und relativ geringes Nennmoment)
 - definierte Leerlaufdrehzahl (keine Gefahr des „Durchgehens“ bei kleiner Last)

2.11 Erzeugung einer variablen Klemmenspannung

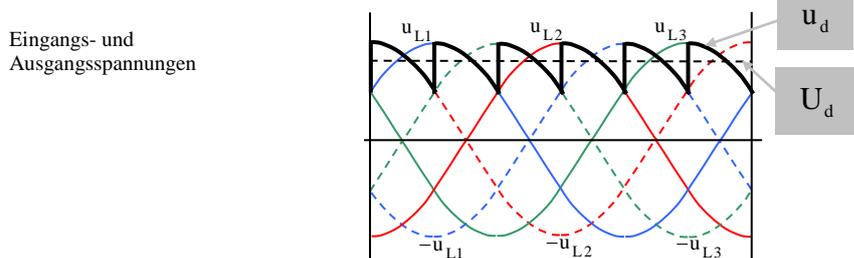
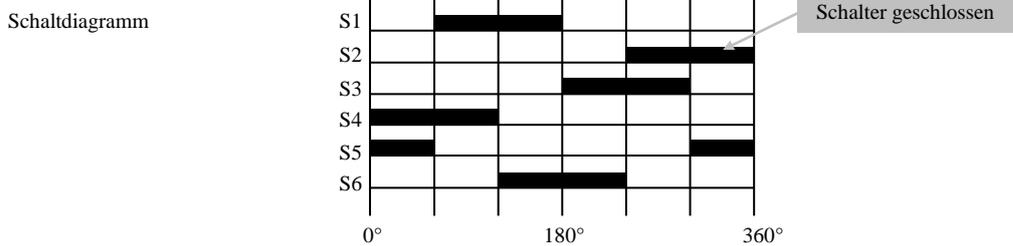
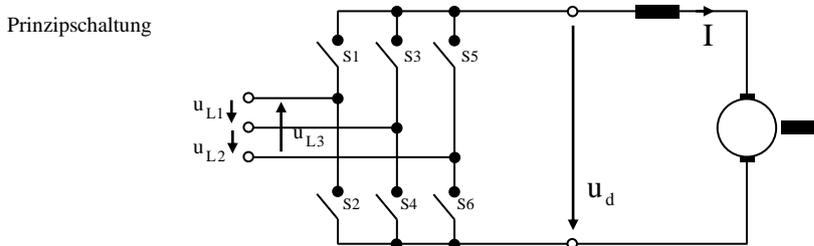
Eine früher weit verbreitete Methode zur Erzeugung einer variablen Klemmenspannung war die Verwendung des „Leonard-Maschinensatzes“:



Eine Drehfeldmaschine (Asynchron- oder Synchronmotor) treibt einen Gleichstromgenerator mit variabler Erregung an; dieser stellt die variable Klemmenspannung für den Gleichstrommotor zur Verfügung. Mit dem Leonhard-Umformer ist ein 4-Quadranten-Betrieb möglich. Heute wird fast ausschließlich die Stromrichterspeisung zur Erzeugung einer variablen Klemmenspannung genutzt.

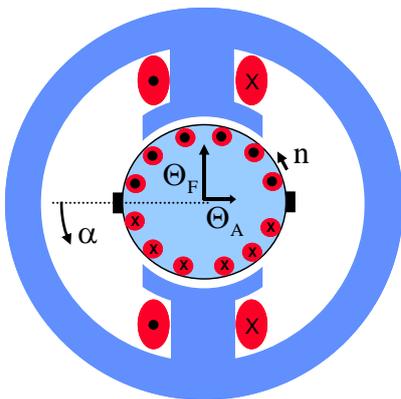


Eine gesteuerte Drehstrombrückenschaltung (siehe Bild links) lässt einen 2-Quadranten-Betrieb zu (keine Rückspeisung möglich); die Gegenparallelschaltung zweier gesteuerter Drehstrombrückenschaltungen (siehe Bild rechts) lässt 4-Quadranten-Betrieb zu. Prinzipschaltung, Schaltdiagramm und Spannungen einer Drehstrombrückenschaltung sind in den folgenden Bildern dargestellt:



2.12 Ankerrückwirkung

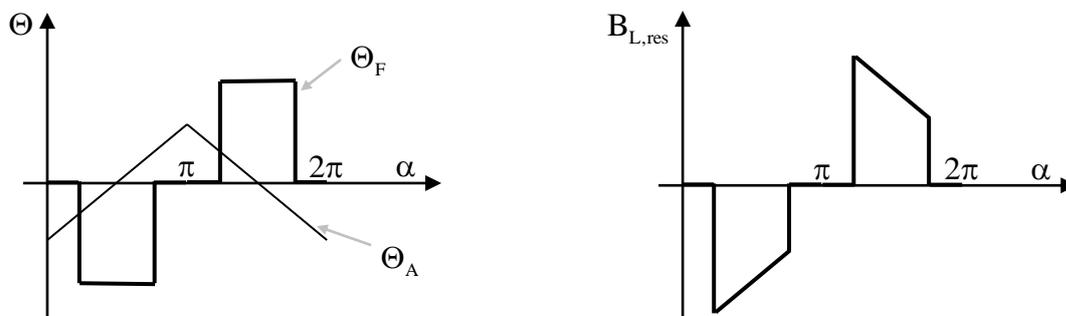
Bisher wurde davon ausgegangen, dass das magnetische Feld im Luftspalt der Gleichstrommaschine allein durch die Erregerwicklung hervorgerufen wird. Dies gilt aber nur für den Leerlauf ($I_A = 0$). Bei Belastung der Maschine (wenn also $I_A \neq 0$ gilt), erzeugt der Strom im Anker ebenfalls eine Durchflutung; diese steht senkrecht zur Durchflutung der Erregerwicklung („Ankerquerdurchflutung“). Durch die Überlagerung dieser Durchflutungen bildet sich das resultierende Feld („Ankerrückwirkung“).



Vernachlässigt man die Sättigung und die magnetischen Spannungsabfälle im Eisen, so folgt aus dem Durchflutungsgesetz (mit α als Umfangswinkel):

$$\frac{B(\alpha)}{\mu_0} 2\delta(\alpha) = \Theta_F(\alpha) + \Theta_A(\alpha)$$

Das resultierende Luftspaltfeld $B_{L,res}$ kann qualitativ aus folgender Grafik entnommen werden:

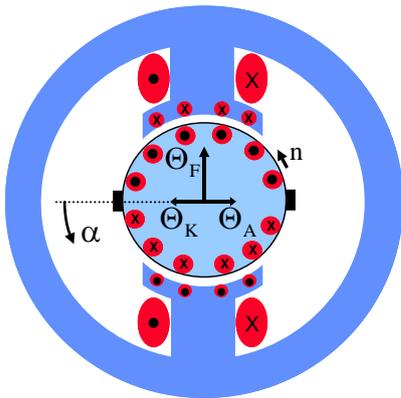


Die magnetisch neutrale Zone verschiebt sich also gegenüber der geometrisch neutralen Zone lastabhängig (bei Motorbetrieb gegen die Drehrichtung, bei Generatorbetrieb in Drehrichtung). Bei Auftreten von Sättigung werden die Spitzen des resultierenden Feldes „verschliffen“. Damit sinkt dann auch die mittlere Flussdichte und damit auch das Drehmoment.

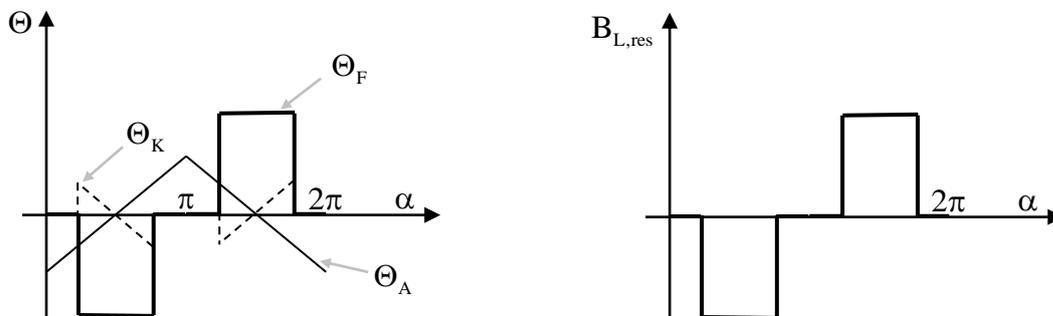
Durch die Feldverzerrung ist auch die Lamellenspannung (d.h. die Spannung zwischen zwei Kommutatorlamellen) nicht mehr gleichmäßig am Umfang verteilt. Die Lamellenspannung kann sich örtlich erheblich erhöhen (der Mittelwert bleibt aber, bei Vernachlässigung der Sättigung, konstant).

Bei Feldschwächung kann es auch dazu kommen, dass das Feld unter der ablaufenden Polkante (bei Motorbetrieb) negativ wird, da das Hauptfeld kleiner wird und die Ankerrückwirkung konstant bleibt.

Um die Ankerrückwirkung mit ihren negativen Folgen zu kompensieren, kann eine Kompensationswicklung in die Gleichstrommaschine eingebaut werden. Dazu werden die Hauptpole mit Nuten versehen, in die Leiter eingelegt werden, die vom Ankerstrom in entgegengesetzter Richtung durchflossen werden. Die Windungszahl dieser Kompensationswicklung muss so bemessen werden, dass die Ankerquerdurchflutung unter den Polen gerade kompensiert wird. Damit ist dann die Feldverteilung unter den Polen wie im Leerlauf (da die Kompensationswicklung vom Ankerstrom durchflossen wird, gilt dies für beliebige Betriebspunkte, d.h. lastunabhängig).



Die Durchflutungsverteilung und das resultierende Luftspaltfeld sehen dann wie folgt aus:

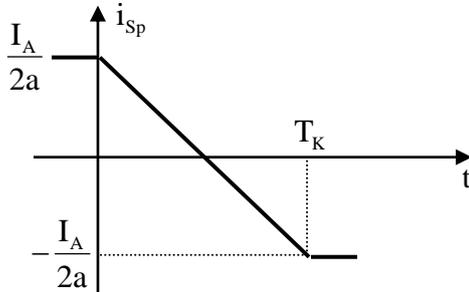


Die Achse des resultierenden Feldes entspricht nun der des Erregerfeldes; die Kommutierung findet in der neutralen Zone statt.

Eine Kompensationswicklung verteuert die Gleichstrommaschine erheblich, sodass diese nur bei großen Maschinen eingesetzt wird.

2.13 Stromwendespannung, Wendepole

In Kapitel 2.2 war angenommen worden, dass der Ankerstrom während der Kommutierung linear verläuft. Dies ist der Fall, wenn die Induktivitäten vernachlässigbar sind und i.w. die Widerstände die Kommutierung bestimmen. Der Spulenstrom i_{sp} verläuft dann wie folgt:



Hierbei ist T_K die Kommutierungszeit, wobei gilt:

$$T_K = \frac{b_B}{v_K} \quad \text{mit}$$

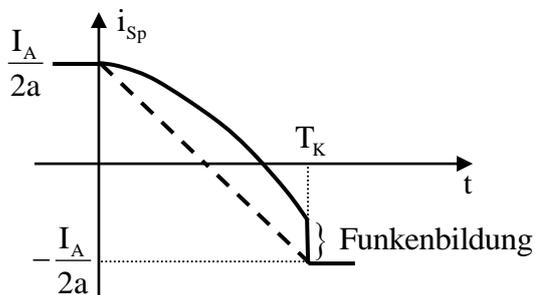
b_B Bürstenbreite und

$v_K = \pi D_K n$ Umfangsgeschwindigkeit des Kommutators (D_K ist der Durchmesser des Kommutators).

In der Realität existiert jedoch wegen der Nut- und Stirnstreuung eine nicht zu vernachlässigende Induktivität. Durch die Stromänderung in der durch die Bürste kurzgeschlossenen Spule wird eine Spannung der Selbstinduktion erzeugt. Mit der Spuleninduktivität L_{sp} gilt dann für diese Spannung:

$$u_s = -L_{sp} \frac{di_{sp}}{dt} \approx L_{sp} \frac{I_A/a}{T_K} = L_{sp} \frac{\pi D_K}{ab_B} I_A n$$

Die Stromwendespannung ist also dem Ankerstrom und der Drehzahl proportional. Nach der Lenzschen Regel ist die Stromwendespannung so gerichtet, dass sie ihrer Entstehungsursache (der Stromänderung) entgegenwirkt. Dies führt zu einer verzögerten Stromwendung, wodurch an den ablaufenden Bürstenkanten Funken entstehen. Diese Funkenbildung führt zu erhöhtem Verschleiß von Bürsten und Kommutator.



Wenn man nun diese Stromwendespannung durch eine rotatorisch induzierte Spannung kompensiert, erzielt man wieder eine lineare Kommutierung. Hierzu werden in den Pollücken (Wendezonen) sogenannte Wendepole angeordnet, deren Wicklungen in Reihe mit dem Anker geschaltet sind.

Die folgende Prinzipskizze zeigt den Querschnitt einer Gleichstrommaschine mit Kompensationswicklung und Wendepolen.

Prinzipskizze (p = 1):

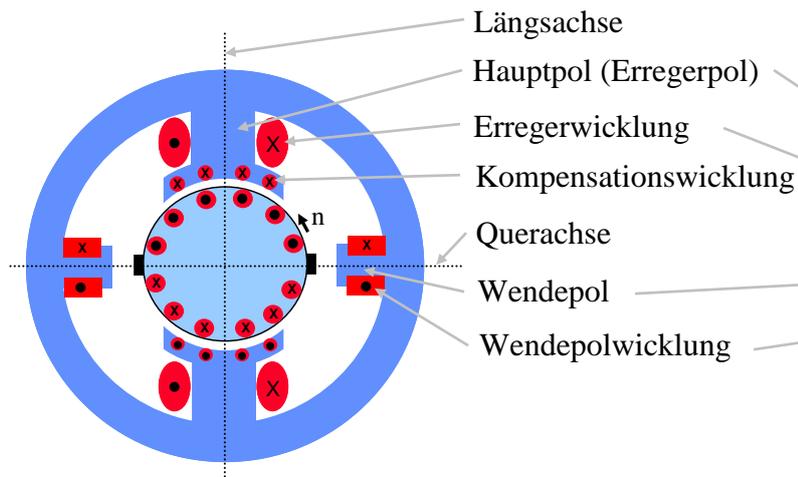
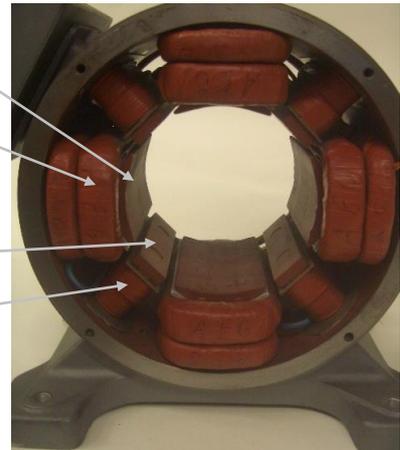


Foto (p = 2):



Wendet man das Durchflutungsgesetz auf eine Polteilung an, wobei der Integrationsweg durch die Wendepole verläuft, so erhält man:

$$\Theta_W - \Theta_A + \Theta_K = \frac{B_W}{\mu_0} 2\delta_W$$

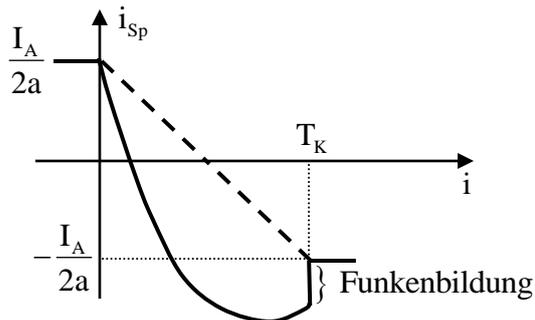
$$\Rightarrow \Theta_W - \Theta_A (1 - \alpha_i) = \frac{B_W}{\mu_0} 2\delta_W$$

$$\Rightarrow B_W = \frac{\mu_0}{2\delta_W} (\Theta_W - \Theta_A (1 - \alpha_i)) \sim I_A$$

Für die rotatorisch induzierte Spannung gilt dann:

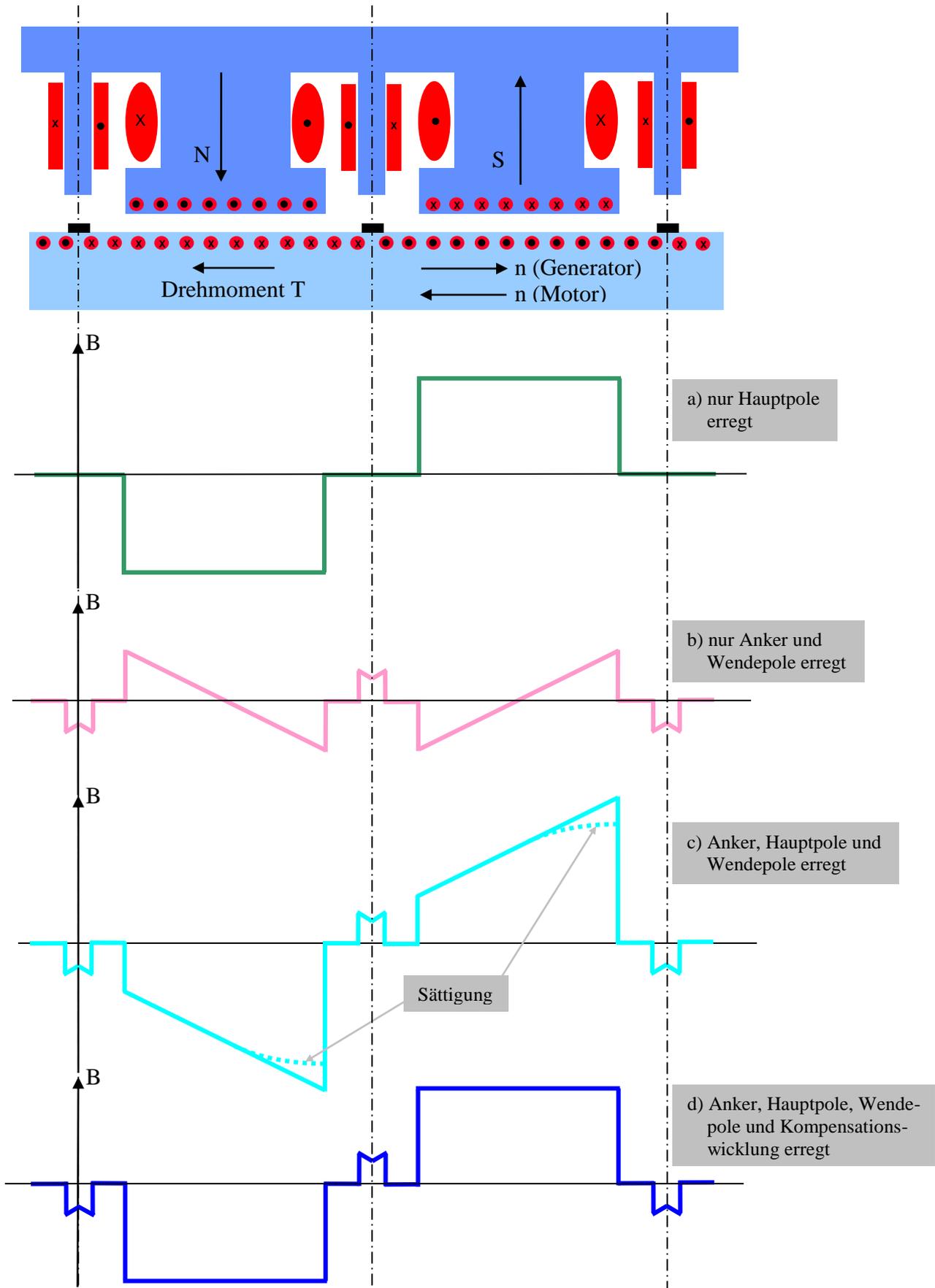
$$u_W = \oint (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{\ell} \sim nI_A$$

Damit kann also die Stromwendespannung kompensiert werden. Bei Überkompensation kommutiert der Strom allerdings zu schnell, und es tritt wiederum Funkenbildung auf.



Als unabhängige Variable zur Einstellung der Kompensation kann der Wendepolluftspalt δ_W genutzt werden.

Die prinzipiellen Feldverläufe im Luftspalt einer Gleichstrommaschine sind im folgenden Bild noch einmal zusammengefasst (hierbei sind die Felder in den Pollücken vernachlässigt und die Form der Felder weitgehend schematisch dargestellt):



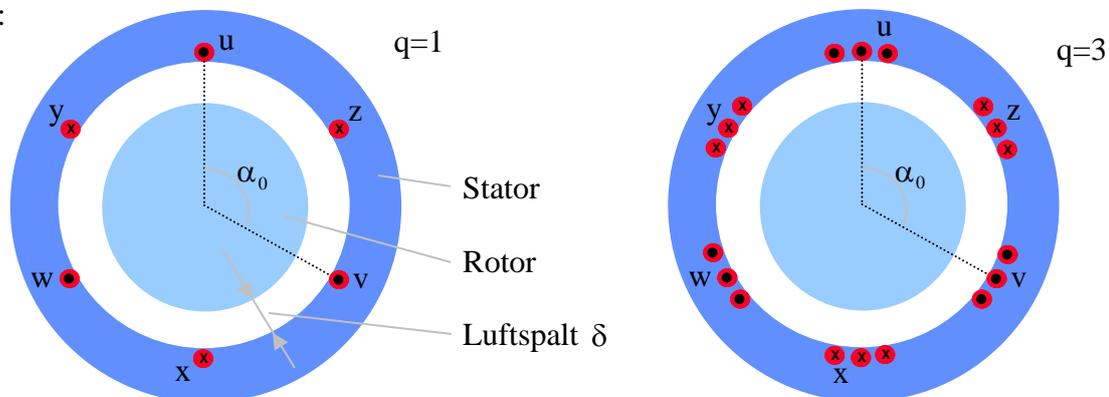
3 Drehfeldtheorie

3.1 Aufbau des Stators einer Drehstrommaschine

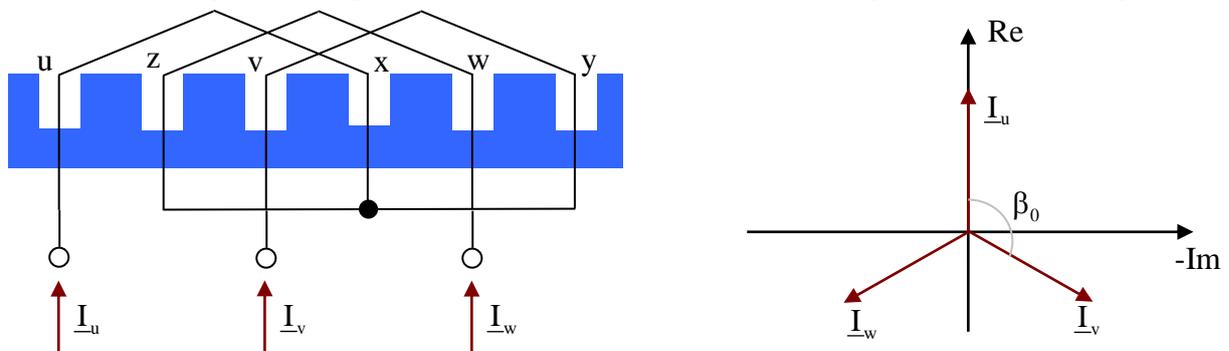
Die Asynchronmaschine und die Synchronmaschine sind Drehfeldmaschinen. Sie besitzen im Stator den gleichen Aufbau (Drehstromwicklung), nur der Rotor ist vom Aufbau her unterschiedlich. Die Gemeinsamkeiten dieser Maschinentypen werden zunächst behandelt; später folgt dann eine detaillierte Betrachtung von Asynchron- und Synchronmaschine.

In der einfachsten Form besteht der Stator aus einem geschichteten Blechpaket mit gegeneinander isolierten Blechen zur Unterdrückung von Wirbelströmen. In die Nuten des Blechpaketes sind Wicklungen eingelegt. Im allgemeinen hat man $m=3$ Stränge, die räumlich um den Winkel $\alpha_0 = \frac{2\pi}{pm} = \frac{1}{p} \frac{2\pi}{3}$ gegeneinander versetzt angeordnet sind. Diese drei

Stränge werden von drei zeitlich um $\beta_0 = 2\pi/m = 2\pi/3$ phasenverschobenen Strömen gleicher Amplitude und Frequenz gespeist. Das folgende Bild zeigt schematische Anordnungen mit $p=1$:



Eine Verschaltung der Stränge im Stern sieht dann schematisch („abgewickelt“) wie folgt aus:



Der mechanische Winkel α und der elektrische Winkel $\beta = p\alpha$ hängen über die Polpaarzahl zusammen. Die Polteilung ist (wie für die Gleichstrommaschine): $\tau_p = \frac{\pi D}{2p}$. Damit entsprechen 2 Polteilungen ($2\tau_p$):

- 2π elektrisch oder
- $2\pi/p$ mechanisch.

Die Windungen eines Stranges können auch in mehrere Nuten nebeneinander gelegt werden. Die Nutenzahl pro Pol und Strang ist dann (mit der Gesamtnutenzahl des Ständers N_1):

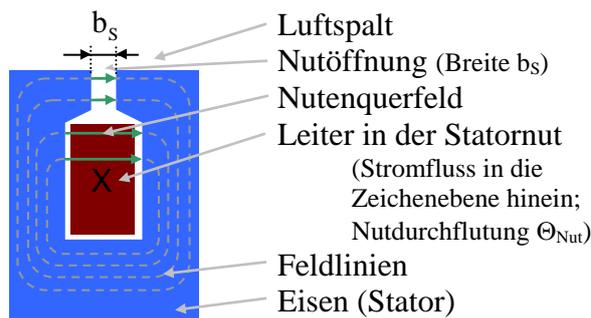
$$q = \frac{N_1}{2pm}$$

3.2 Strombelag

Bereits bei der detaillierten Betrachtung der Drehmomententwicklung der Gleichstrommaschine (Abschnitt 2.5) ist die zentrale Bedeutung des elektromagnetischen Feldes im Luftspalt der Maschine dargestellt worden.

Auch bei den Drehfeldmaschinen hat das Luftspaltfeld diese zentrale Bedeutung und muss deshalb berechnet werden können. Die Ursache für die Entstehung dieses Luftspaltfeldes sind die vom Strom durchflossenen Leiter in den Nuten des Stators. Auf Grund der komplizierten Geometrie (auch die Darstellungen im vorangegangenen Abschnitt sind sehr vereinfachend) ist dies ohne Weiteres nicht möglich. Deshalb wird im Folgenden unter der idealisierten Annahme eines homogenen Feldverlaufes im Bereich der Nutöffnung (siehe das folgende Bild) das Feld im Luftspalt vom Feld in der Nut getrennt (mit anderen Worten: Nach der Trennung dieser beiden Feldanteile muss nicht mehr das gesamte Feld unter Berücksichtigung der komplizierten Blechkontur berechnet werden, sondern die Felder können separiert und einzeln berechnet werden).

Hierzu wird zunächst eine Nut betrachtet, wobei die relative Permeabilität des Eisens als sehr groß gegenüber derjenigen von Luft angenommen wird ($\mu_{Fe} \rightarrow \infty$). Dann bildet sich zunächst in der Nut ein so genanntes Nutenquerfeld aus, wie man an Hand des Durchflutungsgesetzes ($\oint \vec{H} d\vec{l} = \Theta$) leicht zeigen kann.



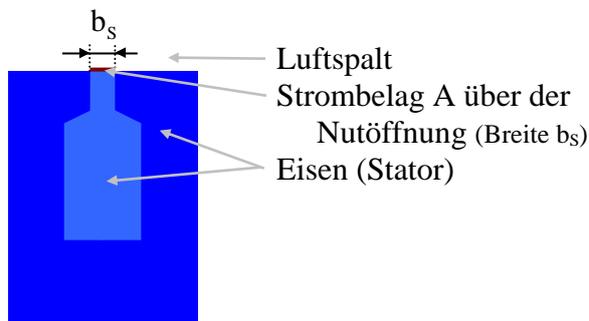
Dieses Nutenquerfeld stößt nun an der Grenzfläche zwischen Nutöffnung (auch „Nutschlitz“ oder „Streuschlitz“ genannt) und Luftspalt an das zu berechnende Luftspaltfeld und stellt somit eine der Randbedingungen zur Berechnung des Luftspaltfeldes dar. Das Feld in der Nutöffnung (H_s), das in dieser vereinfachten Betrachtungsweise bzgl. der Maschinengeometrie tangential gerichtet ist, kann leicht aus dem Durchflutungsgesetz berechnet werden (weiterhin wird $\mu_{Fe} \rightarrow \infty$ angenommen):

$$H_s = \frac{\Theta_{Nut}}{b_s}$$

Diese Randbedingung zur Berechnung des Luftspaltfeldes kann aber nun auch auf andere Art erzeugt werden. Hierzu nimmt man an, dass die Nutdurchflutung Θ_{Nut} unendlich dünn auf einer glatten Eisenoberfläche gleichmäßig im Bereich der Nutöffnung b_s verteilt ist (die hellere blaue Einfärbung im folgenden Bild soll andeuten, dass die Nut gedanklich mit Eisen aufgefüllt wurde). Diese Modellvorstellung wird mit Hilfe des Strombelages

$$A = \frac{\Theta_{\text{Nut}}}{b_s}$$

beschrieben. Das folgende Bild verdeutlicht diese Modellvorstellung.



Wertet man nun das Durchflutungsgesetz bei einem Umlauf um diesen Strombelag aus, so ergibt sich für die tangentielle Feldstärke H_t an der Eisenoberfläche im Bereich des Strombelages (der Weg im Eisen liefert wegen $\mu_{\text{Fe}} \rightarrow \infty$ keinen Beitrag):

$$\begin{aligned} \oint \vec{H} d\vec{\ell} &= \Theta_{\text{Nut}} \\ \Rightarrow H_t \cdot b_s &= A \cdot b_s \\ \Rightarrow H_t &= A = \frac{\Theta_{\text{Nut}}}{b_s} \end{aligned}$$

Hiermit ist gezeigt, dass die Randbedingung zur Berechnung des Luftspaltfeldes unverändert erhalten bleibt, wenn statt der in Nuten eingebetteten Leiter ein entsprechender Strombelag auf der glatten Eisenoberfläche berücksichtigt wird (mit anderen Worten: Die Wirkung der Nutdurchflutung auf das Luftspaltfeld wird ausreichend genau durch den über der Nutöffnung verteilten Strombelag wiedergegeben). Hiermit ist es gelungen, das Luftspaltfeld vom Nutenfeld zu trennen.

Zur Berechnung des Luftspaltfeldes muss also nun das Nutenfeld gar nicht berücksichtigt werden. Zudem kann eine deutlich einfachere Geometrie zugrunde gelegt werden: Die Begrenzungsflächen von Stator und Rotor können als glatt angenommen werden, was einem in Umfangsrichtung der Maschine konstanten Luftspalt und demzufolge auch einem konstanten magnetischen Luftspaltleitwert entspricht.

Zur Berechnung der Durchflutungsverteilungen wird im folgenden Kapitel eine weitere Vereinfachung eingeführt: Der Strombelag A wird in tangentialer Richtung in der Mitte der Nutöffnung konzentriert angenommen (und nicht mehr über die Nutöffnung verteilt). Hierdurch wird die gesamte Nutdurchflutung Θ_{Nut} in einem Punkt an der glatten Statorisenoberfläche konzentriert³.

³ In Kapitel 3.5 wird auf die Auswirkungen unterschiedlicher Modellvorstellungen eingegangen: Die Verteilung des Strombelages über die Nutöffnung und ein in Nutmitte konzentriert angenommener Strombelag werden betrachtet.

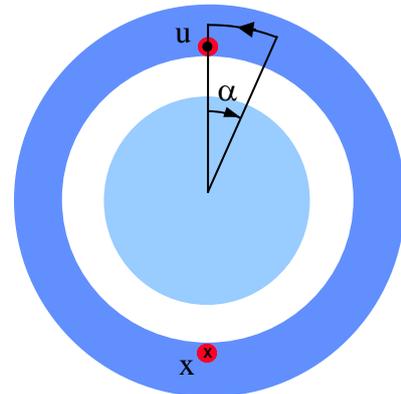
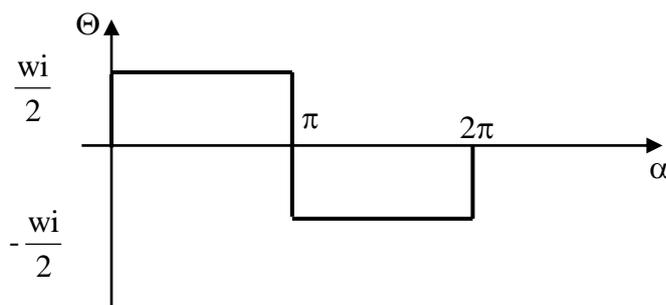
3.3 Wechsel- und Drehdurchflutung

Wird nur die Wicklung (mit w Windungen) eines einzigen Nutenpaares mit dem Strom i erregt, so betragen die Nutdurchflutungen $+wi$ und $-wi$.

Nun soll eine ortsabhängige Durchflutungsverteilung $\Theta(\alpha)$ ermittelt werden (weitere Bezeichnungen hierfür sind auch Felderregerkurve, magnetomotorische Kraft MMK oder magnetomotive force MMF). Da die Durchflutung zunächst als integrale Größe definiert ist ($\Theta = \oint \vec{H} d\vec{\ell}$), hat die Angabe von $\Theta(\alpha)$ nur Sinn, wenn gleichzeitig das Umlaufintegral festgelegt ist.

Das Umlaufintegral wird nun so definiert, dass der Luftspalt immer radial durchlaufen wird und der Umlauf immer mitten durch die Nut „u“ führt. Die Feldstärke im Eisen wird vernachlässigt ($\mu_{Fe} \rightarrow \infty$), so dass der genaue Weg des Umlaufintegrals im Eisen unerheblich ist. Ist der Winkel α etwas größer als Null, so wird die halbe Nut „u“ umfasst (Umlaufsinn und Stromrichtung sind einander positiv zugeordnet); $\Theta(\alpha)$ ist dann $\frac{1}{2} wi$. Dies ist der Fall für alle $0 < \alpha < \pi$. Bei $\alpha = \pi$ springt die umfasste Durchflutung um den Betrag wi ins Negative. Für $\pi < \alpha < 2\pi$ gilt also $\Theta(\alpha) = -\frac{1}{2} wi$.

Also gilt:



Für die magnetische Induktion folgt dann:

$$B(\alpha) = \mu_0 H(\alpha) = \mu_0 \frac{\Theta(\alpha)}{\delta}$$

Ist der Strom i nun ein Wechselstrom der Form

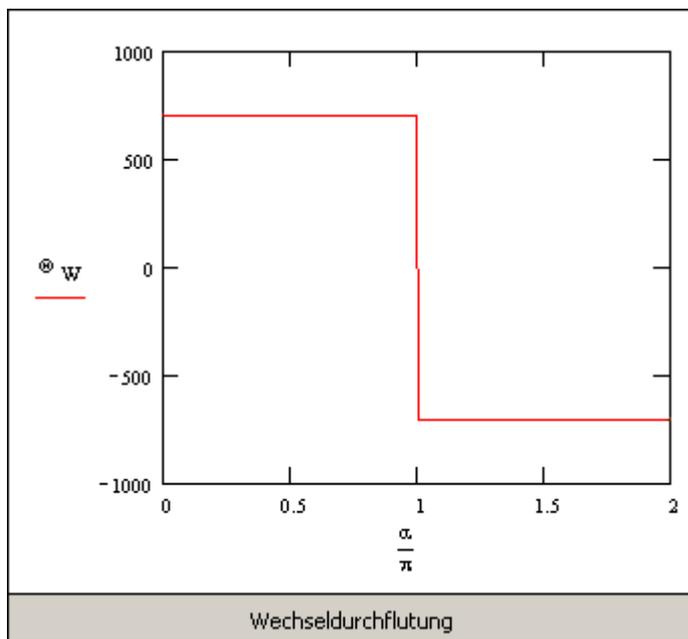
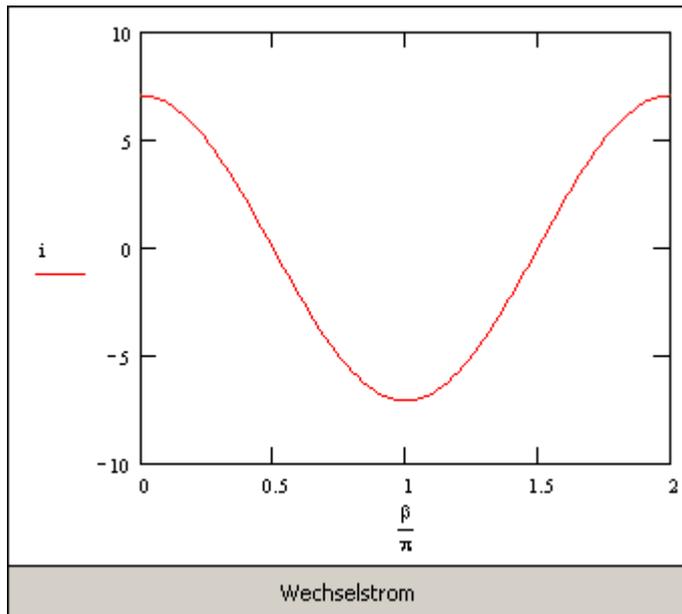
$$i = \sqrt{2} I \cos(\omega t)$$

so folgt für die Durchflutung:

$$\Theta(\alpha, t) = \begin{cases} +\frac{w}{2} \sqrt{2} I \cos(\omega t) & 0 < \alpha < \pi \\ -\frac{w}{2} \sqrt{2} I \cos(\omega t) & \pi < \alpha < 2\pi \end{cases}$$

Bei dieser Durchflutungsverteilung bleibt die Lage der Nulldurchgänge räumlich und zeitlich konstant, die Amplitude ändert sich zeitlich proportional zum Strom. Es handelt sich um eine Wechseldurchflutung.

Die zeitlichen Abläufe für den Wechselstrom und die Wechseldurchflutung können den folgenden animierten Bildern entnommen werden (dargestellt für $p = 1$, $I = 5A$, $w = 200$):



Besitzt eine Maschine mehr als ein Polpaar, so wiederholt sich der Vorgang p -mal am Umfang. Wird die Anzahl der Windungen auf die p Polpaare verteilt, so ergibt sich für die Wechseldurchflutung (jetzt mit Index „ W “):

$$\Theta_w(\alpha, t) = \begin{cases} +\frac{w}{2p} \sqrt{2} I \cos(\omega t) & 0 < \alpha < \frac{\pi}{p} \\ -\frac{w}{2p} \sqrt{2} I \cos(\omega t) & \frac{\pi}{p} < \alpha < \frac{2\pi}{p} \end{cases}$$

Zur mathematischen Beschreibung der räumlichen Verteilung der Wechseldurchflutung wird eine Fourieranalyse der Rechteckkurve (Wechseldurchflutung) durchgeführt (hierbei ist g' eine ganze Zahl):

$$\Theta_w(\alpha, t) = \frac{w}{2p} \sqrt{2I} \cos(\omega t) \frac{4}{\pi} \sum_{g'=1}^{\infty} \frac{\sin((2g'-1)\alpha p)}{2g'-1}$$

Es existieren also unendlich viele Wellen, die alle eine ungerade Ordnungszahl besitzen. Die Grundwelle erhält man für $g' = 1$:

$$\Theta_{w,1}(\alpha, t) = \frac{w}{p} \sqrt{2I} \cos(\omega t) \frac{2}{\pi} \sin(\alpha p) = \Theta_{w,1} \sin(\alpha p) \cos(\omega t)$$

Vereinbarung:

Elektrische Größen (also z.B. der Strom) werden als Effektivwerte angegeben, magnetische Größen (z.B. Durchflutung oder Flussdichte) als Amplitude. Die Unterscheidung zwischen den Schreibweisen von Funktion und Amplitude geschieht in der Form, dass bei der Funktion explizit die Abhängigkeiten angegeben werden (siehe obige Gleichung).

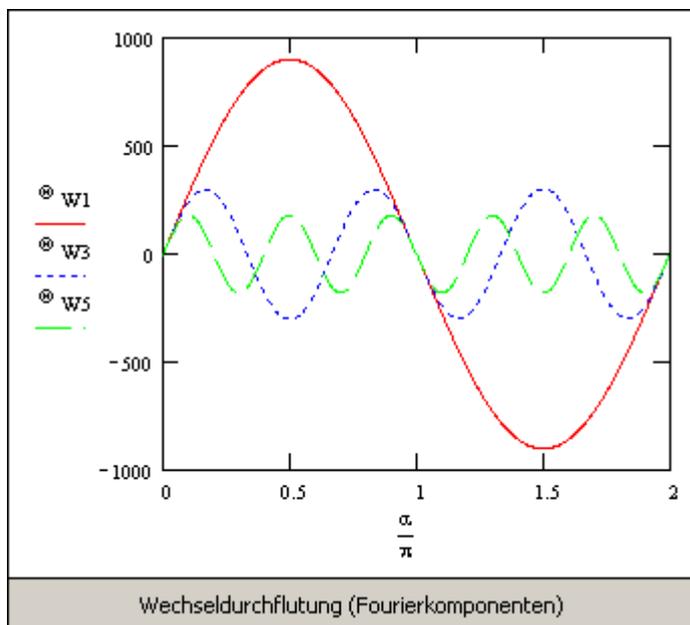
Die Amplitude der Grundwelle ist:

$$\Theta_{w,1} = \frac{w}{p} \sqrt{2I} \frac{2}{\pi}$$

Die Amplituden der Oberwellen sind:

$$\Theta_{w,2g'-1} = \frac{\Theta_{w,1}}{2g'-1}$$

Die Amplituden der Grundwelle und aller Oberwellen ändern sich proportional mit der Amplitude des Stromes. Die Amplituden der Oberwellen sind zudem invers proportional zu ihrer Ordnungszahl. Die Lage der Maxima und Nulldurchgänge bleibt zeitlich konstant. Es sind stehende Wellen (siehe folgende Animation):



Die Oberwellen entstehen alleine aufgrund der räumlichen Verteilung der Wicklung; der Strom ist rein sinusförmig (ohne Oberschwingungen)!

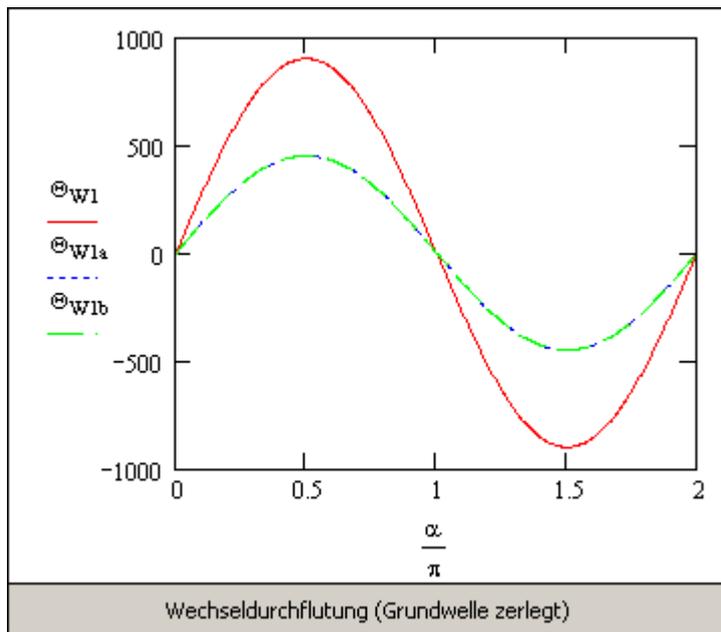
Vereinbarung:

- Als Welle bezeichnet man einen räumlich veränderlichen Vorgang.
- Als Schwingung bezeichnet man einen zeitlich veränderlichen Vorgang.

Bekanntlich lässt sich eine stehende Welle aus zwei gegenläufig mit gleicher Geschwindigkeit fortschreitenden Wellen halber Amplitude zusammensetzen. Dann lässt sich die Grundwelle der Wechseldurchflutung wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned}\Theta_{w,1}(\alpha, t) &= \Theta_{w,1} \cos(\omega t) \sin(\alpha p) \\ &= \frac{\Theta_{w,1}}{2} [\sin(\alpha p - \omega t) + \sin(\alpha p + \omega t)] \\ &= \Theta_{w,1a}(\alpha, t) + \Theta_{w,1b}(\alpha, t)\end{aligned}$$

Die Zerlegung der Grundwelle der Wechseldurchflutung (stehende Welle) in zwei gegenläufig fortschreitende Durchflutungen mit halber Amplitude ist in der folgenden Animation dargestellt.



Auf diese Art lässt sich nun die gesamte Wechseldurchflutung als Summe gegenläufiger Wellen schreiben:

$$\begin{aligned}\Theta_w(\alpha, t) &= \Theta_{w,1} \cos(\omega t) \sum_{g'=1}^{\infty} \frac{\sin((2g'-1)\alpha p)}{2g'-1} \\ &= \frac{\Theta_{w,1}}{2} \left[\sum_{g'=1}^{\infty} \frac{\sin((2g'-1)\alpha p - \omega t)}{2g'-1} + \sum_{g'=1}^{\infty} \frac{\sin((2g'-1)\alpha p + \omega t)}{2g'-1} \right]\end{aligned}$$

Die fortschreitenden Durchflutungswellen bezeichnet man als Drehdurchflutungen, da sie sich am kreisförmigen Umfang der Maschine ausbreiten. Drehdurchflutungen werden im folgenden mit dem Index „D“ bezeichnet.

Für einen festen Punkt der Drehdurchflutung gilt:

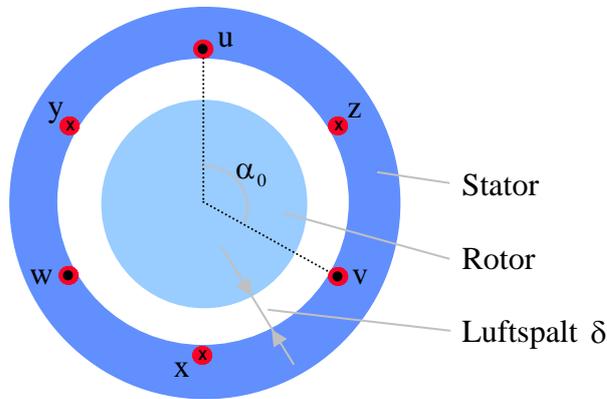
$$(2g'-1)\alpha p \mp \omega t = \text{const.}$$

Die mechanische Winkelgeschwindigkeit der Durchflutungswelle ist dann:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\text{const.} \pm \omega t}{(2g'-1)p} \right) = \frac{\pm \omega}{(2g'-1)p} = \pm \Omega_{2g'-1}$$

Die Winkelgeschwindigkeit der Grundwelle ist also gleich ω/p ; die Winkelgeschwindigkeit der Oberwellen ist proportional zu der der Grundwelle und invers proportional zur Ordnungszahl (d.h. mit höherer Ordnungszahl wird die Winkelgeschwindigkeit immer geringer).

Nachdem nun die Durchflutungsverteilung der Wicklung eines Nutenpaares behandelt wurde, sollen nun alle drei Nutenpaare der 3-strängigen Maschine erregt werden.



Hierbei sind die Nutenpaare jeweils um $\alpha_0 = 2\pi/3p$ räumlich versetzt. Die drei Stränge mit jeweils w/p Windungen werden von drei zeitlich um $2\pi/3$ versetzten Wechselströmen gleicher Amplitude und Frequenz gespeist.

Jeder Strang bildet nun eine Wechseldurchflutung aus, die sich wie folgt beschreiben lässt:

$$\begin{aligned} \Theta_{w,u}(\alpha, t) &= \Theta_{w,1} \cos(\omega t) \sum_{g'=1}^{\infty} \frac{\sin((2g'-1)\alpha p)}{2g'-1} \\ &= \frac{\Theta_{w,1}}{2} \left[\sum_{g'=1}^{\infty} \frac{\sin((2g'-1)\alpha p - \omega t)}{2g'-1} + \sum_{g'=1}^{\infty} \frac{\sin((2g'-1)\alpha p + \omega t)}{2g'-1} \right] \\ \Theta_{w,v}(\alpha, t) &= \Theta_{w,1} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \sum_{g'=1}^{\infty} \frac{\sin\left((2g'-1)\left(\alpha - \frac{2\pi}{3p}\right)p\right)}{2g'-1} \\ &= \frac{\Theta_{w,1}}{2} \left[\sum_{g'=1}^{\infty} \frac{\sin\left((2g'-1)\alpha p - \omega t - (2g'-2)\frac{2\pi}{3}\right)}{2g'-1} + \sum_{g'=1}^{\infty} \frac{\sin\left((2g'-1)\alpha p + \omega t - 2g'\frac{2\pi}{3}\right)}{2g'-1} \right] \\ \Theta_{w,w}(\alpha, t) &= \Theta_{w,1} \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \sum_{g'=1}^{\infty} \frac{\sin\left((2g'-1)\left(\alpha - \frac{4\pi}{3p}\right)p\right)}{2g'-1} \\ &= \frac{\Theta_{w,1}}{2} \left[\sum_{g'=1}^{\infty} \frac{\sin\left((2g'-1)\alpha p - \omega t - (2g'-2)\frac{4\pi}{3}\right)}{2g'-1} + \sum_{g'=1}^{\infty} \frac{\sin\left((2g'-1)\alpha p + \omega t - 2g'\frac{4\pi}{3}\right)}{2g'-1} \right] \end{aligned}$$

Die Gesamtdurchflutung aller drei Stränge erhält man nun durch Addition der drei

Einzeldurchflutungen (hierbei ist Linearität vorausgesetzt, d.h. Sättigung wird vernachlässigt):

$$\Theta(\alpha, t) = \Theta_{w,u}(\alpha, t) + \Theta_{w,v}(\alpha, t) + \Theta_{w,w}(\alpha, t)$$

Es gilt nun:

$$\sin(x) + \sin\left(x - n \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x - n \frac{4\pi}{3}\right) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ nicht durch } 3 \text{ teilbar} \\ 3\sin(x) & \text{falls } n \text{ durch } 3 \text{ teilbar} \end{cases}$$

Demnach existieren also nur gegenläufige Wellen, die die Bedingung:

$$2g' - 2 = 6g \quad \text{bzw.} \quad 2g' = 6g$$

erfüllen. D.h. es muss gelten:

$$2g' - 1 = 6g + 1 \quad \text{bzw.} \quad 2g' - 1 = 6g - 1$$

Damit folgt für die Gesamtdurchflutung:

$$\Theta(\alpha, t) = \frac{3}{2} \Theta_{w,1} \left[\sum_{g=0}^{\infty} \frac{\sin((6g+1)\alpha p - \omega t)}{6g+1} + \sum_{g=1}^{\infty} \frac{\sin((6g-1)\alpha p + \omega t)}{6g-1} \right]$$

Die beiden Summen lassen sich zusammenfassen, wenn man negative g zulässt:

$$\Theta(\alpha, t) = \frac{3}{2} \Theta_{w,1} \sum_{g=-\infty}^{\infty} \frac{\sin((6g+1)\alpha p - \omega t)}{6g+1}$$

Bei dieser Gesamtdurchflutung handelt es sich um eine reine Drehwelle:

$$\Theta(\alpha, t) = \Theta_D(\alpha, t),$$

wobei die Ordnungszahlen

$$6g+1 = 1, -5, 7, -11, 13, -17, 19, \dots$$

sind. Die Amplitude der Grundwelle beträgt:

$$\Theta_{D,1} = \frac{3}{2} \Theta_{w,1} = \frac{3}{2} \frac{2}{\pi} \frac{w}{p} \sqrt{2} I$$

Die Amplituden der Oberwellen sind:

$$\Theta_{D,6g+1} = \frac{\Theta_{D,1}}{|6g+1|}$$

Die Drehgeschwindigkeit der Durchflutungswelle berechnet sich zu:

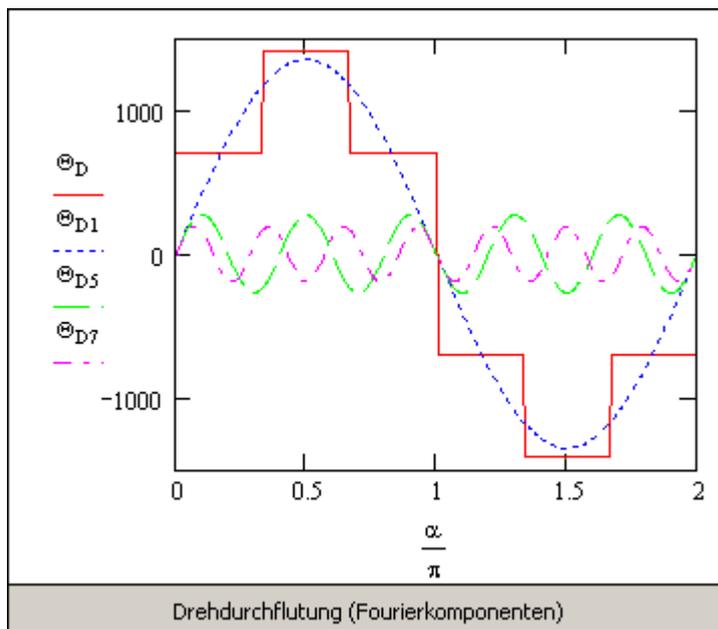
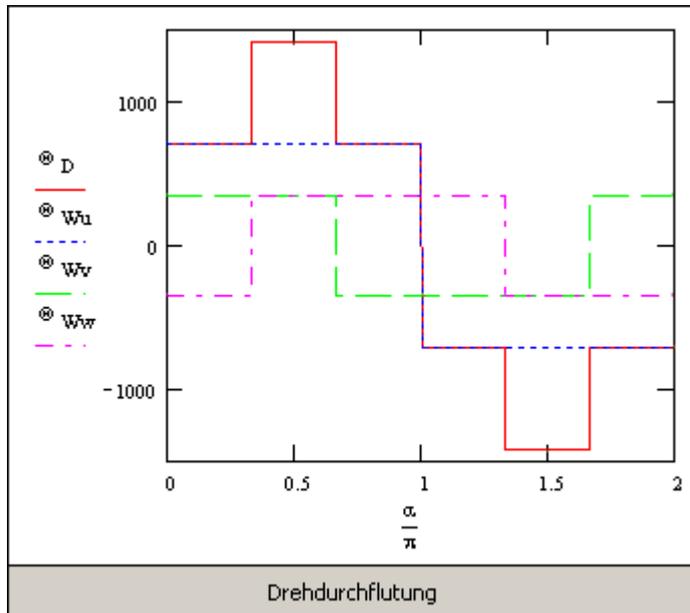
$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\text{const.} + \omega t}{(6g+1)p} \right) = \frac{\omega}{(6g+1)p} = \Omega_{6g+1}$$

Die Winkelgeschwindigkeit der Grundwelle ist also gleich ω/p ; die Winkelgeschwindigkeit der Oberwellen ist proportional zu der der Grundwelle und invers proportional zur Ordnungszahl (d.h. mit höherer Ordnungszahl wird der Betrag der Winkelgeschwindigkeit immer geringer).

In den folgenden animierten Bildern ist Folgendes zu erkennen:

- Bildung der Drehdurchflutung aus 3 gleichmäßig phasenversetzten Wechseldurchflutungen gleicher Amplitude und Frequenz (zeitlich konstante Nulldurchgänge, aber zeitlich veränderliche Maximalwerte). Man achte hier auch auf die zeitlich veränderliche Form der Gesamtdurchflutung.

- Zerlegung der Drehdurchflutung in die Fourierkomponenten; dargestellt ist die Grundwelle, die synchron mit der Gesamtdurchflutung umläuft, und die Oberwellen der Ordnungszahlen -5 (entgegengesetzt der Grundwelle) und 7 (gleichsinnig mit der Grundwelle). Man achte hier auch auf die unterschiedlichen Geschwindigkeiten.



3.4 Wicklungsfaktor

Wie im letzten Abschnitt dargestellt, treten bei der Drehdurchflutung Oberwellen auf, deren Amplituden mit der Ordnungszahl abnehmen.

Bei der Drehstrommaschine erzeugt aber nur die Grundwelle ein Nutzmoment, die Oberwellen erzeugen parasitäre Drehmomente, die den Betrieb der Drehstrommaschine stören (z.B. kein Anlaufen oder Hängenbleiben bei niedrigen Drehzahlen).

Es müssen daher Maßnahmen ergriffen werden, die die Oberwellen weitgehend dämpfen, die Grundwelle aber möglichst unverändert lassen. Hierzu gibt es im wesentlichen die folgenden zwei Maßnahmen:

- Aufteilung der Wicklung pro Pol und Strang auf mehrere Nuten (Zonenwicklung).
- Verteilung von Hin- und Rückleitern einer Spule so, dass sie nicht mehr elektrisch um π (d.h. mechanisch um π/p) versetzt sind, sondern um einen kleineren Winkel (gesehnte Wicklung).

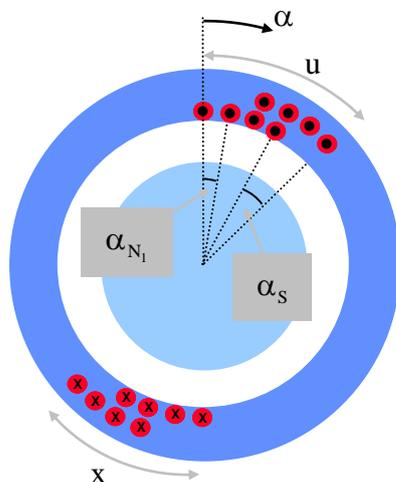
Die Auswirkungen beider Maßnahmen werden in einer gemeinsamen mathematischen Herleitung berechnet. Hierzu wird zunächst die (aus dem vorangegangenen Abschnitt bekannte) Durchflutungsverteilung eines Nutenpaares pro Strang benötigt:

$$\Theta(\alpha, t) = \frac{3}{2} \frac{w}{p} \sqrt{2I} \frac{2}{\pi} \sum_{g=-\infty}^{\infty} \frac{\sin((6g+1)\alpha p - \omega t)}{6g+1}$$

Die w/p Windungen pro Pol und Strang werden nun gleichmäßig in q nebeneinander liegende Nuten und 2 übereinander liegende Lagen aufgeteilt:

- Alle $N_1 = 2pqm$ Nuten des Stators sind gleichmäßig am Umfang angeordnet. Der mechanische Winkel zwischen zwei Nuten beträgt dann: $\alpha_{N_1} = \frac{2\pi}{N_1} = \frac{2\pi}{2pqm} = \frac{\pi}{pqm}$,
der elektrische Winkel zwischen zwei Nuten beträgt: $\beta_{N_1} = p\alpha_{N_1} = \frac{\pi}{qm}$.
- Die 2 Lagen haben einen Winkelversatz von mechanisch $\alpha_s = \left(1 - \frac{s}{\tau_p}\right) \frac{\pi}{p}$ bzw.

elektrisch $\beta_s = \left(1 - \frac{s}{\tau_p}\right) \pi$. Dieser Winkelversatz (man spricht dann von einer „Sehnung“) kann nur in ganzzahligen Vielfachen einer Statornutteilung realisiert werden.



Die gesamte Durchflutungsverteilung kann dann wie folgt beschrieben werden:

$$\Theta(\alpha, t) = \frac{3}{2} \frac{w}{2pq} \sqrt{2I} \frac{2}{\pi} \underbrace{\sum_{g=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^q \sum_{\ell=1}^2 \frac{\sin\left[(6g+1)(\alpha - (k-1)\alpha_{N_1} - (\ell-1)\alpha_s)p - \omega t\right]}{6g+1}}_{X_1}$$

Nun wird die Doppelsumme X_1 näher untersucht; sie kann folgendermaßen geschrieben werden:

$$\begin{aligned} X_1 &= \text{Im} \left\{ \frac{1}{6g+1} \sum_{k=1}^q \sum_{\ell=1}^2 e^{j(6g+1)\alpha p} \cdot e^{-j(6g+1)(k-1)\alpha_{N_1} p} \cdot e^{-j(6g+1)(\ell-1)\alpha_s p} \cdot e^{-j\omega t} \right\} \\ &= \text{Im} \left\{ \frac{e^{j[(6g+1)\alpha p - \omega t]}}{6g+1} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^q e^{-j(6g+1)(k-1)\alpha_{N_1} p} \right)}_{X_2} \underbrace{\left(\sum_{\ell=1}^2 e^{-j(6g+1)(\ell-1)\alpha_s p} \right)}_{X_3} \right\} \end{aligned}$$

Die beiden Summen X_2 und X_3 werden im Folgenden getrennt untersucht. Für X_2 folgt:

$$\begin{aligned} X_2 &= \sum_{k=1}^q e^{-j(6g+1)(k-1)\alpha_{N_1} p}, \quad \alpha_{N_1} p = \frac{\pi}{qm} \\ &= e^{j(6g+1)\frac{\pi}{qm}} \cdot \sum_{k=1}^q e^{-j(6g+1)k\frac{\pi}{qm}} \end{aligned}$$

Hier tritt nun eine endliche geometrische Reihe auf, die allgemein wie folgt gelöst werden kann:

$$\sum_{\mu=1}^n e^{j\mu\gamma} = \frac{\sin\left(n\frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \cdot e^{j(n+1)\frac{\gamma}{2}}$$

Demnach folgt weiter:

$$\begin{aligned} X_2 &= e^{j(6g+1)\frac{\pi}{qm}} \cdot \sum_{k=1}^q e^{-j(6g+1)k\frac{\pi}{qm}} \\ &= e^{j(6g+1)\frac{\pi}{qm}} \cdot \frac{\sin\left[q(6g+1)\frac{\pi}{2qm}\right]}{\sin\left[(6g+1)\frac{\pi}{2qm}\right]} \cdot e^{-j(q+1)(6g+1)\frac{\pi}{2qm}} \\ &= \frac{\sin\left[q(6g+1)\frac{\pi}{2qm}\right]}{\sin\left[(6g+1)\frac{\pi}{2qm}\right]} \cdot e^{-j(q-1)(6g+1)\frac{\pi}{2qm}} \\ &= q \cdot \xi_{Z,6g+1} \cdot e^{-j(q-1)(6g+1)\frac{\pi}{2qm}}, \quad \xi_{Z,6g+1} = \frac{\sin\left[q(6g+1)\frac{\pi}{2qm}\right]}{q \cdot \sin\left[(6g+1)\frac{\pi}{2qm}\right]} \end{aligned}$$

Für X_3 folgt (auch hier tritt eine endliche geometrische Reihe auf; zudem werden Rechenregeln für trigonometrische Funktionen verwendet):

$$\begin{aligned}
 X_3 &= \sum_{\ell=1}^2 e^{-j(6g+1)(\ell-1)\alpha_{sP}} \\
 &= e^{j(6g+1)\alpha_{sP}} \cdot \sum_{\ell=1}^2 e^{-j(6g+1)\ell\alpha_{sP}} \\
 &= e^{j(6g+1)\alpha_{sP}} \cdot \frac{\sin\left[2(6g+1)\frac{\alpha_{sP}}{2}\right]}{\sin\left[(6g+1)\frac{\alpha_{sP}}{2}\right]} \cdot e^{-j(2+1)(6g+1)\frac{\alpha_{sP}}{2}}, \quad \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \\
 &= 2\cos\left[(6g+1)\frac{\alpha_{sP}}{2}\right] \cdot e^{-j(6g+1)\frac{\alpha_{sP}}{2}}, \quad \alpha_{sP} = \left(1 - \frac{s}{\tau_p}\right)\pi \\
 &= 2\cos\left[(6g+1)\left(1 - \frac{s}{\tau_p}\right)\frac{\pi}{2}\right] \cdot e^{-j(6g+1)\frac{\alpha_{sP}}{2}}, \quad \cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) \\
 &= 2 \left\{ \underbrace{\cos\left[(6g+1)\frac{\pi}{2}\right]}_{=0} \cdot \cos\left[(6g+1)\frac{s}{\tau_p}\frac{\pi}{2}\right] + \sin\left[(6g+1)\frac{\pi}{2}\right] \cdot \sin\left[(6g+1)\frac{s}{\tau_p}\frac{\pi}{2}\right] \right\} \cdot e^{-j(6g+1)\frac{\alpha_{sP}}{2}} \\
 &= 2\sin\left[(6g+1)\frac{\pi}{2}\right] \cdot \xi_{S,6g+1} \cdot e^{-j(6g+1)\frac{\alpha_{sP}}{2}}, \quad \xi_{S,6g+1} = \sin\left[(6g+1)\frac{s}{\tau_p}\frac{\pi}{2}\right]
 \end{aligned}$$

Insgesamt folgt also:

$$\begin{aligned}
 \Theta(\alpha, t) &= \frac{3}{2} \frac{w}{2pq} \sqrt{2I} \frac{2}{\pi} \sum_{g=-\infty}^{\infty} \operatorname{Im} \left\{ \frac{2q \cdot \xi_{Z,6g+1} \cdot \xi_{S,6g+1} \sin\left[(6g+1)\frac{\pi}{2}\right] \cdot e^{j[(6g+1)\left[\alpha p - (q-1)\frac{\pi}{2qm} - \frac{\alpha_{sP}}{2}\right] - \omega t]}}{6g+1} \right\} \\
 &= \frac{3}{2} \frac{w}{p} \sqrt{2I} \frac{2}{\pi} \sum_{g=-\infty}^{\infty} \frac{\xi_{Z,6g+1} \xi_{S,6g+1}}{6g+1} \operatorname{Im} \left\{ \frac{\sin\left[(6g+1)\frac{\pi}{2}\right] \cdot e^{j[(6g+1)\left[\alpha - (q-1)\frac{\pi}{2pqm} - \frac{\alpha_s}{2} + \frac{\pi}{2p}\right] p - \omega t]}}{e^{j(6g+1)\frac{\pi}{2}}} \right\}
 \end{aligned}$$

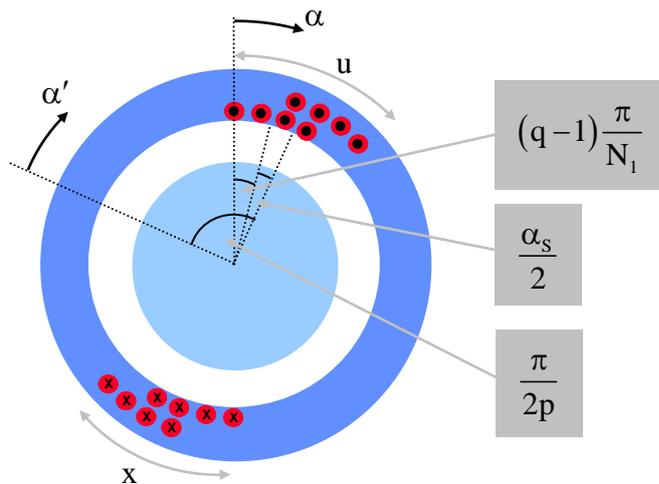
Mit der Koordinatentransformation

$$\alpha' = \alpha - (q-1)\frac{\pi}{2pqm} - \frac{\alpha_s}{2} + \frac{\pi}{2p}$$

folgt dann weiter:

$$\Theta(\alpha', t) = \frac{3}{2} \frac{w}{p} \sqrt{2I} \frac{2}{\pi} \sum_{g=-\infty}^{\infty} \frac{\xi_{Z,6g+1} \xi_{S,6g+1}}{6g+1} \operatorname{Im} \left\{ \frac{\sin\left[(6g+1)\frac{\pi}{2}\right] \cdot e^{j[(6g+1)\alpha' p - \omega t]}}{e^{j(6g+1)\frac{\pi}{2}}} \right\}$$

Diese Koordinatentransformation ist im folgenden Bild erläutert:



Mit

$$\frac{\sin\left[(6g+1)\frac{\pi}{2}\right]}{e^{j(6g+1)\frac{\pi}{2}}} = \frac{\sin\left[(6g+1)\frac{\pi}{2}\right]}{\underbrace{\cos\left[(6g+1)\frac{\pi}{2}\right] + j\sin\left[(6g+1)\frac{\pi}{2}\right]}_{=0}} = \frac{1}{j} = -j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

erhält man

$$\Theta(\alpha', t) = \frac{3}{2} \frac{w}{p} \sqrt{2I} \frac{2}{\pi} \sum_{g=-\infty}^{\infty} \frac{\xi_{Z,6g+1} \xi_{S,6g+1}}{6g+1} \operatorname{Im} \left\{ e^{j[(6g+1)\alpha'p - \omega t - \frac{\pi}{2}]} \right\}$$

Eine Zeittransformation nach

$$\omega t + \frac{\pi}{2} = \omega t' \quad \Rightarrow \quad t' = t + \frac{\pi}{2\omega} = t + \frac{1}{4f}, \quad \omega = 2\pi f$$

führt dann auf:

$$\begin{aligned} \Theta(\alpha', t') &= \frac{3}{2} \frac{w}{p} \sqrt{2I} \frac{2}{\pi} \sum_{g=-\infty}^{\infty} \frac{\xi_{Z,6g+1} \xi_{S,6g+1}}{6g+1} \operatorname{Im} \left\{ e^{j[(6g+1)\alpha'p - \omega t']} \right\} \\ &= \frac{3}{2} \frac{w}{p} \sqrt{2I} \frac{2}{\pi} \sum_{g=-\infty}^{\infty} \frac{\xi_{Z,6g+1} \xi_{S,6g+1}}{6g+1} \sin\left[(6g+1)\alpha'p - \omega t'\right] \end{aligned}$$

Die hierbei auftretenden Faktoren werden

- Zonungsfaktor $\xi_{Z,6g+1} = \frac{\sin\left[q(6g+1)\frac{\pi}{2qm}\right]}{q \cdot \sin\left[(6g+1)\frac{\pi}{2qm}\right]}$ und
- Sehnungsfaktor $\xi_{S,6g+1} = \sin\left[(6g+1)\frac{s}{\tau_p} \frac{\pi}{2}\right]$

genannt.

Für Drehstromwicklungen ($m = 3$) folgt:

$$\xi_{Z,6g+1} = \frac{\sin\left(\frac{(6g+1)\pi}{6}\right)}{q \cdot \sin\left(\frac{(6g+1)\pi}{6q}\right)}$$

Für eine sehr große Anzahl von Nuten pro Pol und Strang ($q \rightarrow \infty$) folgt:

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \xi_{Z,6g+1} = \lim_{\substack{\pi \\ 6q} \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{(6g+1)\pi}{6}\right)}{q \cdot \sin\left(\frac{(6g+1)\pi}{6q}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{(6g+1)\pi}{6}\right)}{q \cdot \frac{(6g+1)\pi}{6q}} = \frac{\sin\left(\frac{(6g+1)\pi}{6}\right)}{\frac{(6g+1)\pi}{6}} = \text{si}\left(\frac{(6g+1)\pi}{6}\right)$$

Die Wirkung der Zonenwicklung besteht darin, dass sich die Grundwellen der einzelnen Nutdurchflutungen möglichst ungestört addieren, während sich die Oberwellen nahezu aufheben.

Die folgende Tabelle soll dies verdeutlichen:

$\xi_{Z,6g+1}$		q =				
		1	2	3	4	∞
g =	6g + 1 =					
0	1	1,000	0,966	0,960	0,958	0,955
1	7	1,000	-0,259	-0,177	-0,158	-0,136
-1	-5	1,000	0,259	0,218	0,205	0,191
2	13	1,000	-0,966	0,218	0,126	0,073
-2	-11	1,000	-0,966	-0,177	-0,126	-0,087

Die Wirkung der Sehnung besteht darin, dass sich durch geschickte Wahl von s/τ_p einzelne Oberwellen der beiden gegeneinander verschobenen Wicklungslagen vollständig (oder zumindest weitgehend) gegenseitig aufheben.

Es gilt z.B.:

$$s/\tau_p = 4/5 \Rightarrow \begin{cases} \xi_{S,1} = 0,951 \\ \xi_{S,7} = 0,588 \\ \xi_{S,-5} = 0,000 \end{cases}$$

$$s/\tau_p = 6/7 \Rightarrow \begin{cases} \xi_{S,1} = 0,975 \\ \xi_{S,7} = 0,000 \\ \xi_{S,-5} = -0,434 \end{cases}$$

Um die beiden ersten Oberwellen mit einer gesehten Wicklung gleichmäßig abzdämpfen, wählt man als Kompromiss auch häufig:

$$s/\tau_p = 5/6 \Rightarrow \begin{cases} \xi_{S,1} = 0,966 \\ \xi_{S,7} = 0,259 \\ \xi_{S,-5} = -0,259 \end{cases}$$

Der Wicklungsfaktor ξ einer Drehstromwicklung ist das Produkt aus Zonungsfaktor und Sehnungsfaktor:⁴

$$\xi_{6g+1} = \xi_{Z,6g+1} \cdot \xi_{S,6g+1}$$

Führt man nun zur Schreibvereinfachung eine Umbenennung der Koordinaten in Form von

$$\begin{aligned} \alpha' &\rightarrow \alpha \text{ und} \\ t' &\rightarrow t \end{aligned}$$

durch, so bekommt die Drehdurchflutung einer Drehstromwicklung unter Berücksichtigung des Wicklungsfaktors die folgende Gestalt:

$$\Theta_D(\alpha, t) = \frac{3}{2} \frac{w}{p} \sqrt{2} I \frac{2}{\pi} \sum_{g=-\infty}^{\infty} \frac{\xi_{6g+1}}{6g+1} \sin((6g+1)\alpha p - \omega t)$$

⁴ Ohne weitere Herleitung sei darauf hingewiesen, dass auch die Nutöffnung einen Einfluss auf den Wicklungsfaktor hat (zum Einfluss der Nutöffnung auf Strombelag und Induktion siehe das folgende Kapitel 3.5): Der gesamte Wicklungsfaktor ist dann $\xi_{6g+1} = \xi_{Z,6g+1} \cdot \xi_{S,6g+1} \cdot \xi_{N,6g+1}$, wobei sich der Nutöffnungsfaktor

zu $\xi_{N,6g+1} = \text{si} \left[(6g+1) \frac{s_N}{\tau_p} \frac{\pi}{2} \right]$ berechnet und s_N die Nutöffnung ist.

Der Einfluss der Nutöffnung auf das Maschinenverhalten ist z.B. in folgender Veröffentlichung beschrieben: Gerling, D.: „The Influence of the Stator Slot Opening on the Characteristics of Windings with Concentrated Coils“, IEEE International Electric Machines and Drives Conference (IEMDC), 03.-06. Mai 2009, Miami FL, USA

3.5 Strombelag und Induktion

1. Allgemeines:

Aus dem Durchflutungsgesetz erhält man:

$$B(\alpha) = \mu_0 H(\alpha) = \mu_0 \frac{\Theta(\alpha)}{\delta}$$

Der Zusammenhang zwischen der Durchflutungsverteilung und dem Strombelag ergibt sich wie folgt:

$$\Theta(\alpha) = \int A(\alpha) \cdot r d\alpha$$

Hierbei ist r der Bohrungsradius der Maschine. Insgesamt ergibt sich also:

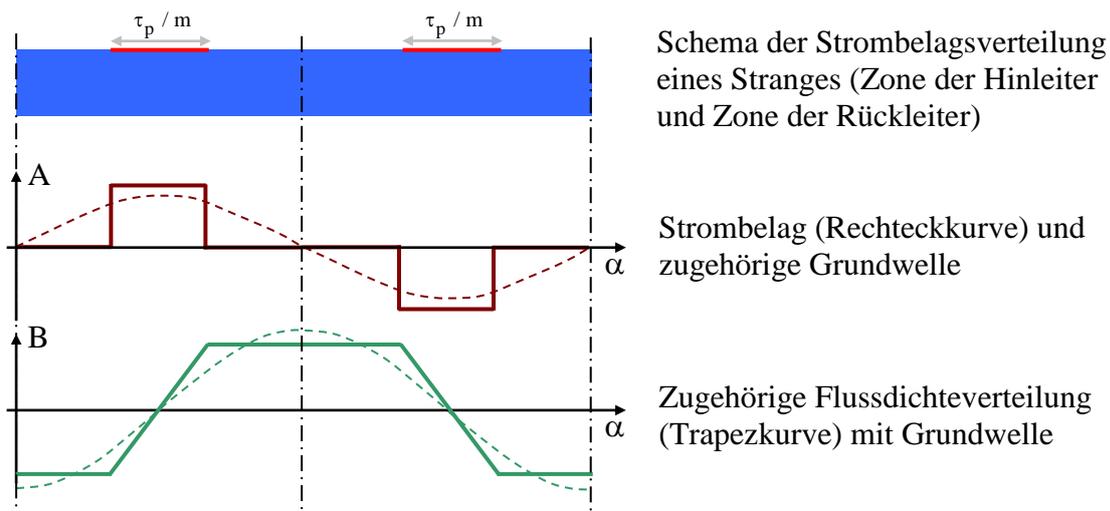
$$B(\alpha) \sim \int A(\alpha) d\alpha$$

Bei dieser Herleitung wurde stillschweigend vorausgesetzt, dass nur eine Radialkomponente des Luftspaltfeldes existiert (siehe erste Gleichung auf dieser Seite). Diese Vereinfachung ist zulässig, solange die Wellenlänge der Felder groß ist im Vergleich zum Luftspalt (d.h. die im Folgenden abgeleiteten Beziehungen gelten nicht für Wellen mit beliebig hohen Ordnungszahlen; diese Wellen sind aber auch i.a. nicht von Interesse). Außerdem ist auch vorausgesetzt, dass sich die Radialkomponente der magnetischen Feldstärke in radialer Richtung im Luftspalt praktisch nicht ändert.

Mit der Einführung eines Strombelages wird die in Nuten angeordnete Wicklung gedanklich vereinfacht. Im Folgenden werden verschiedene Möglichkeiten dieser Vereinfachung dargestellt:

2. Gleichmäßige Verteilung des Strombelags in einer Zone:

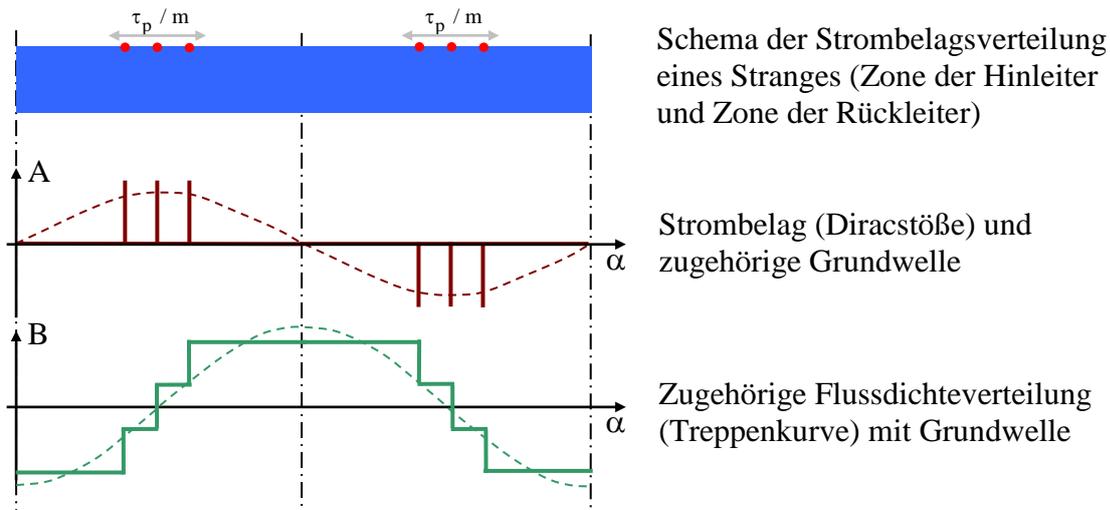
Man nimmt in der einfachsten Form an, dass alle Leiter unendlich dünn auf der Statoroberfläche verteilt angeordnet sind (dies entspricht $q \rightarrow \infty$). Das folgende Bild zeigt einen solchen Strombelag für einen Strang:



3. Strombelag konzentriert in jeder Nutmitte:

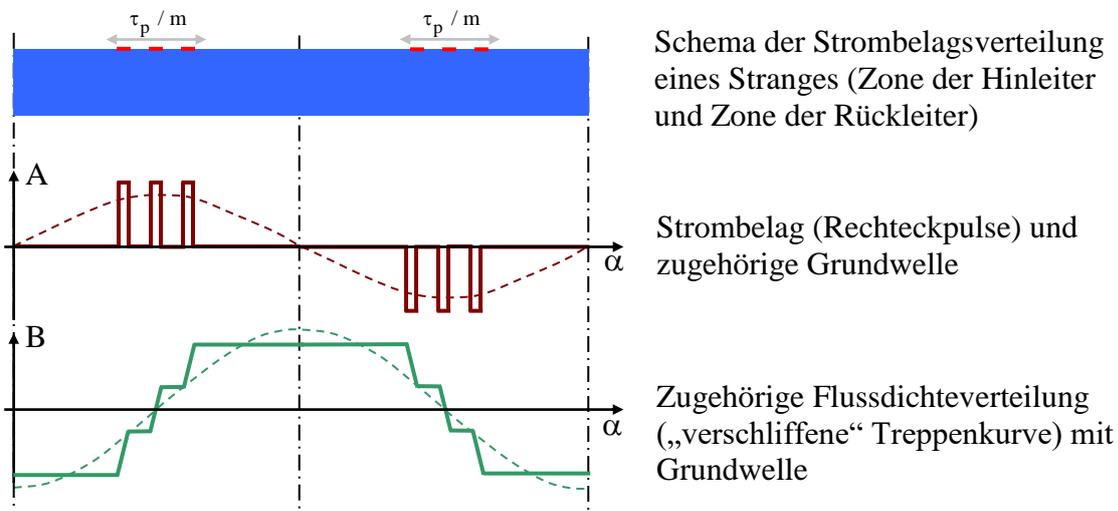
Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Leiter einer Nut (gedanklich unendlich dünn) in der Mitte der entsprechenden Nutöffnung anzuordnen. Analog zu dem obigen Bild ist unten

diese Möglichkeit für $q = 3$ dargestellt (für die Flussdichteverteilung entsteht dann eine Treppenkurve):



4. Strombelag verteilt über jede Nutöffnung:

Schließlich könnte man noch die Leiter einer Nut (gedanklich unendlich dünn) im Bereich der entsprechenden Nutöffnung verteilt anordnen. Dann werden die einzelnen Treppenstufen der Flussdichteverteilung trapezförmig „verschliffen“.



Welchen Detaillierungsgrad man für ein zu berechnendes Problem wählt, hängt auch von der Art des Problems ab. Ist man z.B. nur an dem Grundwellendrehmoment der Maschine interessiert, reicht i.a. eine relativ grobe Modellvorstellung. Möchte man Eigenschaften berechnen, für die die Oberwellen einen großen Einfluss haben (typisch z.B. die Geräusche), dann muss man ein deutlich genaueres Modell wählen.

5. Luftspaltdrehfeld:

Das Luftspaltdrehfeld erhält man aus der Drehdurchflutung; hierbei wird in der Praxis ein Luftspaltwert verwendet, der gegenüber dem geometrischen Luftspalt δ vergrößert ist:

- wegen der Feldverzerrung aufgrund der Nutung: $\delta \rightarrow \delta' = \delta \cdot K_C$ (K_C ist der Carter-Faktor) und
- wegen der magnetischen Spannungsabfälle im Eisen: $\delta' \rightarrow \delta''$.

Vernachlässigt man die Feldverzerrung durch die Nutung und die magnetischen Spannungsabfälle im Eisen ($\mu_{Fe} \rightarrow \infty$), so erhält man:

$$B(\alpha, t) = \frac{\mu_0}{\delta} \Theta_D(\alpha, t) \\ = \frac{\mu_0}{\delta} \frac{3}{2} \frac{w}{p} \sqrt{2I} \frac{2}{\pi} \sum_{g=-\infty}^{\infty} \frac{\xi_{6g+1}}{6g+1} \sin((6g+1)\alpha p - \omega t)$$

Für die Grundwelle gilt:

$$B_1(\alpha, t) = B_1 \sin(\alpha p - \omega t)$$

mit:

$$\text{Amplitude: } B_1 = \frac{\mu_0}{\delta} \frac{3}{2} \frac{w \xi_1}{p} \frac{2}{\pi} \sqrt{2I} \quad \text{und Drehgeschwindigkeit: } \Omega_1 = \frac{\omega}{p}$$

Für die Oberwellen gilt:

$$B_{6g+1}(\alpha, t) = B_{6g+1} \sin((6g+1)\alpha p - \omega t)$$

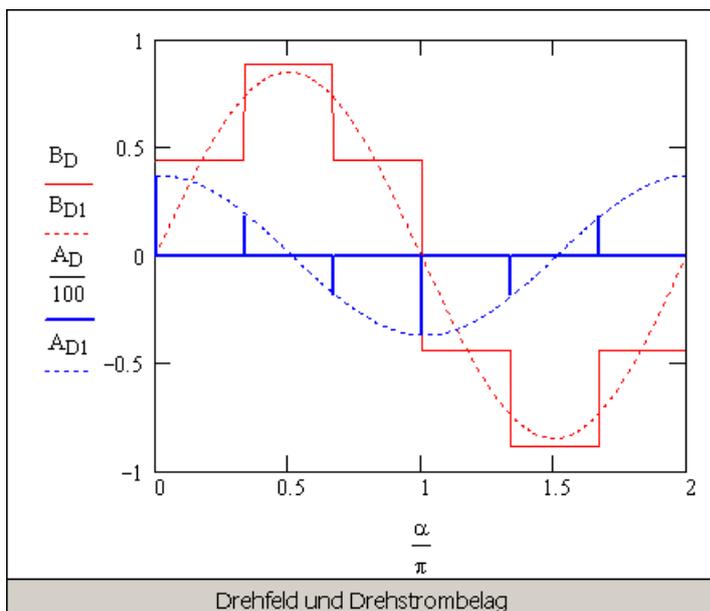
mit

$$\text{Amplitude: } B_{6g+1} = \frac{\xi_{6g+1}}{\xi_1 \cdot (6g+1)} B_1 \quad \text{und Drehgeschwindigkeit: } \Omega_{6g+1} = \frac{\Omega_1}{6g+1}$$

Das gesamte Drehfeld lässt sich also auch schreiben als:

$$B(\alpha, t) = \sum_{g=-\infty}^{\infty} B_{6g+1}(\alpha, t)$$

Die folgende Animation zeigt das Drehfeld B_D und den Drehstrombelag A_D (für einen Luftspalt von $\delta = 1\text{mm}$ und einen Bohrungsdurchmesser von $D = 0,1\text{m}$), jeweils zusammen mit der Grundwelle (gestrichelt dargestellt). Man beachte insbesondere die Phasenverschiebung zwischen Magnetfeld und Strombelag:

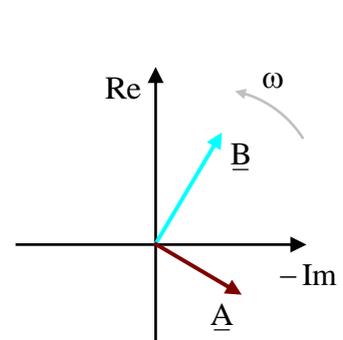
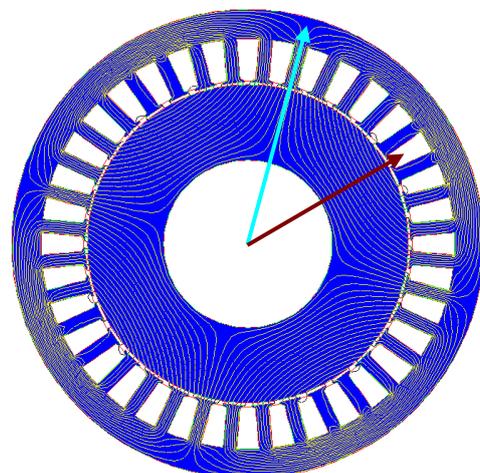
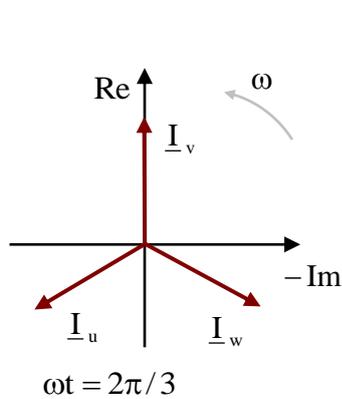
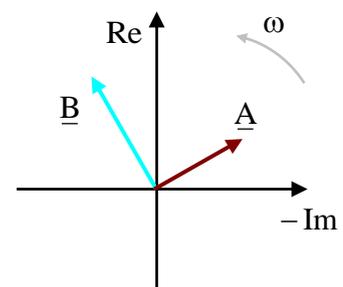
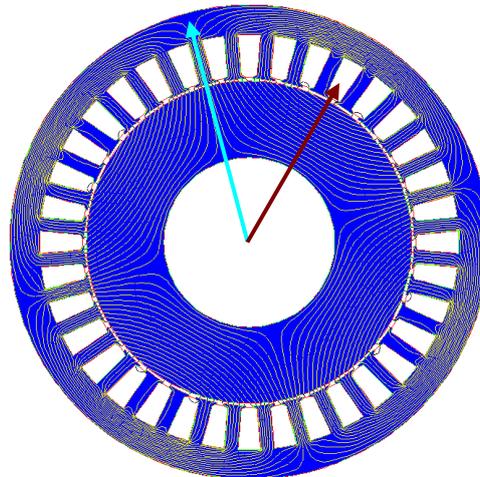
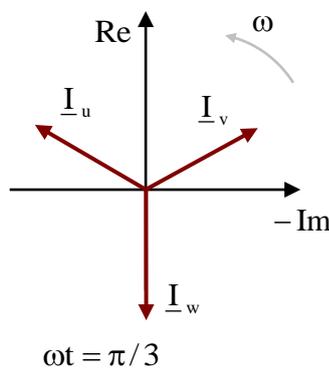
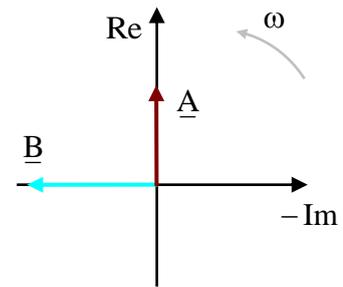
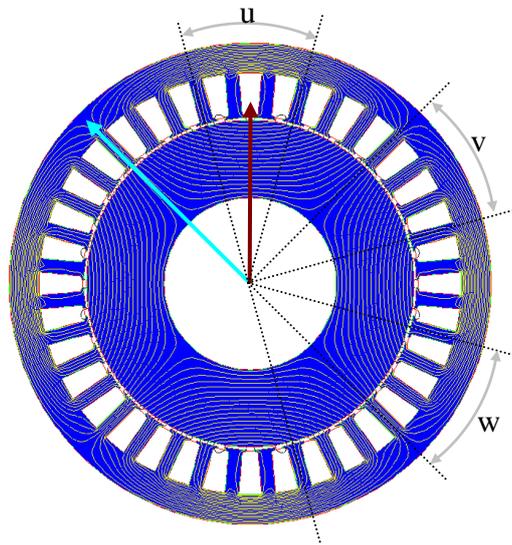
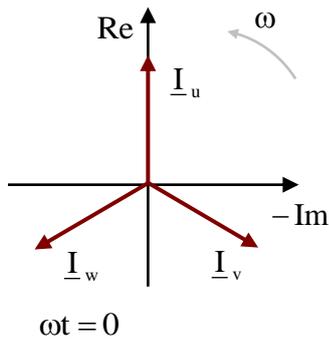


Im folgenden Bild sind für drei verschiedene Zeitpunkte die Strom- und Feldverteilung für eine 4-polige, 36-nutige Statoranordnung dargestellt, zusammen mit den Zeigerbildern der drei Ströme und von Strombelag und Flussdichte. Auch an diesen Bildern kann man gut das Fortschreiten der Drehwellen erkennen.

Zeitzeiger der Ströme

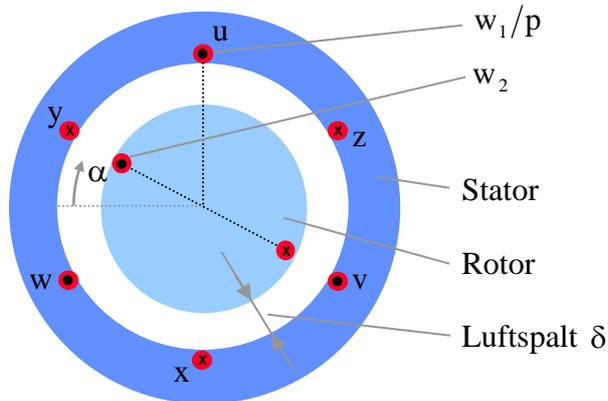
Feldlinienbilder

Zeiger der Grundwellenamplituden von Strombelag und Luftspaltflussdichte



3.6 Induzierte Spannung und Schlupf

Es soll nun die induzierte Spannung berechnet werden, die ein Ständerdrehfeld (Wicklung mit w_1 Windungen) in einer Läuferespule (Wicklung mit w_2 Windungen) mit beliebiger Lage $\alpha(t)$ erzeugt. Hierzu muss zunächst die Flussverkettung der Läuferespule ermittelt werden; diese ergibt sich durch die Integration der Luftspaltinduktion über eine Polteilung τ_p :



$$\psi(\alpha, t) = w_2 \phi(\alpha, t) = w_2 \int_{r\alpha}^{r\alpha + \tau_p} B(\tilde{\alpha}, t) \ell d(r\tilde{\alpha})$$

Hierbei ist ℓ die magnetisch wirksame Länge der Maschine und r der Bohrungsradius; die Tilde dient zur Unterscheidung zwischen Integrationsgrenze und Integrationsvariable. Es gilt weiter:

$$\begin{aligned} \psi(\alpha, t) &= w_2 \int_{\alpha}^{\alpha + \frac{\pi}{p}} B(\tilde{\alpha}, t) \ell r d\tilde{\alpha} \\ &= w_2 \ell r \int_{\alpha}^{\alpha + \frac{\pi}{p}} \sum_{g=-\infty}^{\infty} B_{6g+1} \sin((6g+1)\tilde{\alpha}p - \omega t) d\tilde{\alpha} \\ &= w_2 \ell r \left[\sum_{g=-\infty}^{\infty} B_{6g+1} \frac{-\cos((6g+1)\tilde{\alpha}p - \omega t)}{(6g+1)p} \right]_{\alpha}^{\alpha + \frac{\pi}{p}} \\ &= w_2 \frac{2\ell r}{p} \sum_{g=-\infty}^{\infty} \frac{B_{6g+1}}{6g+1} \cos((6g+1)\alpha p - \omega t) \\ &= w_2 \sum_{g=-\infty}^{\infty} \phi_{6g+1}(\alpha, t) \end{aligned}$$

Für die Grundwelle gilt:

$$\phi_1(\alpha, t) = \phi_1 \cos(\alpha p - \omega t)$$

mit:

- Amplitude: $\phi_1 = \frac{2\ell r}{p} B_1 = 2\ell \frac{\tau_p}{\pi} B_1 = \frac{2}{\pi} \ell \tau_p B_1 = \mu_0 \frac{3\ell r}{\delta} \frac{w_1 \xi_1}{p^2} \frac{2}{\pi} \sqrt{2} I$
- Drehgeschwindigkeit: $\Omega_1 = \frac{\omega}{p}$

Für die Oberwellen gilt:

$$\phi_{6g+1}(\alpha, t) = \phi_{6g+1} \cos((6g+1)\alpha p - \omega t)$$

mit

- Amplitude: $\phi_{6g+1} = \frac{2\ell r}{p} \frac{B_{6g+1}}{6g+1} = \frac{2}{\pi} \ell \frac{\tau_p}{6g+1} B_{6g+1}$
- Drehgeschwindigkeit: $\Omega_{6g+1} = \frac{\Omega_1}{6g+1}$

Die induzierte Spannung berechnet sich nun aus der zeitlichen Änderung der Flussverknüpfung; diese zeitliche Änderung kann sowohl durch die zeitliche Änderung der Ströme, als auch durch die zeitliche Änderung der Lage der Läuferspule hervorgerufen werden.

$$\begin{aligned} u_i(\alpha, t) &= \frac{d\psi(\alpha, t)}{dt} = \frac{\partial\psi(\alpha, t)}{\partial\alpha} \frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial\psi(\alpha, t)}{\partial t} \\ &= w_2 \frac{2\ell r}{p} \sum_{g=-\infty}^{\infty} \frac{B_{6g+1}}{6g+1} \left(-\sin((6g+1)\alpha p - \omega t) \right) \left((6g+1)p \frac{d\alpha}{dt} - \omega \right) \\ &= w_2 \cdot 2\ell r \sum_{g=-\infty}^{\infty} B_{6g+1} \sin((6g+1)\alpha p - \omega t) \left(\frac{\omega}{(6g+1)p} - \frac{d\alpha}{dt} \right) \end{aligned}$$

Bevor die induzierte Spannung weiter berechnet wird, soll an dieser Stelle zunächst der „Schlupf“ definiert werden:

Der Schlupf ist die auf die jeweilige Ständerdrehfeldwelle bezogene Differenzdrehzahl zwischen dieser Ständerdrehfeldwelle und dem Rotor (d.h. der mechanischen Drehzahl).

Mit der Winkelgeschwindigkeit des Rotors

$$\frac{d\alpha}{dt} = \Omega = 2\pi n$$

und der Drehgeschwindigkeit der Feldoberwellen

$$\Omega_{6g+1} = \frac{\omega}{(6g+1)p}$$

wird der Schlupf s einer Drehfeldwelle zu:

$$s_{6g+1} = \frac{\Omega_{6g+1} - \Omega}{\Omega_{6g+1}}$$

Die Drehzahl der Grundwelle des Ständerdrehfeldes heißt Synchrondrehzahl. Dies wird mit dem Index „0“ gekennzeichnet:

$$n_0 = \frac{\Omega_1}{2\pi} = \frac{\omega/p}{2\pi} = \frac{2\pi f/p}{2\pi} = \frac{f}{p}$$

Der Schlupf der Grundwelle ist dann:

$$s_1 = \frac{\Omega_1 - \Omega}{\Omega_1} = \frac{n_0 - n}{n_0}$$

Hieraus lässt sich nun Folgendes leicht ablesen:

- Bei Synchrondrehzahl ($n = n_0$) gilt: $s_1 = 0$
- Bei Läuferstillstand ($n = 0$) gilt: $s_1 = 1$

Die räumliche Lage der Läuferpule ändert sich mit der mechanischen Drehzahl des Rotors. Deshalb gilt:

$$\alpha(t) = \alpha_R + \Omega t$$

Damit gilt dann weiter:

$$\begin{aligned} (6g+1)\alpha p - \omega t &= (6g+1)\alpha_R p + (6g+1)p\Omega t - \omega t \\ &= (6g+1)\alpha_R p - \omega t \left(1 - \frac{(6g+1)p\Omega}{\omega} \right) \\ &= (6g+1)\alpha_R p - \omega t \left(\frac{\frac{\omega}{(6g+1)p} - \Omega}{\frac{\omega}{(6g+1)p}} \right) \\ &= (6g+1)\alpha_R p - s_{6g+1}\omega t \end{aligned}$$

und

$$\frac{\omega}{(6g+1)p} - \frac{d\alpha}{dt} = \left(\frac{\frac{\omega}{(6g+1)p} - \Omega}{\frac{\omega}{(6g+1)p}} \right) \frac{\omega}{(6g+1)p} = s_{6g+1}\Omega_{6g+1}$$

Für die in der Läuferpule induzierte Spannung ergibt sich dann (durch Einsetzen der letzten beiden Gleichungen in die Gleichung für die induzierte Spannung auf der vorhergehenden Seite):

$$\begin{aligned} u_i(\alpha, t) &= w_2 \cdot 2\ell r \sum_{g=-\infty}^{\infty} B_{6g+1} \sin((6g+1)\alpha_R p - s_{6g+1}\omega t) s_{6g+1}\Omega_{6g+1} \\ &= 2w_2\ell \sum_{g=-\infty}^{\infty} B_{6g+1} \sin((6g+1)\alpha_R p - s_{6g+1}\omega t) s_{6g+1}\Omega_{6g+1} r \\ &= 2w_2\ell \sum_{g=-\infty}^{\infty} B_{6g+1}(\alpha_R, t) v_{6g+1} \\ &= \sum_{g=-\infty}^{\infty} u_{i,6g+1}(\alpha_R, t) \end{aligned}$$

Hierbei ist $v_{6g+1} = s_{6g+1}\Omega_{6g+1}r$ die Relativgeschwindigkeit zwischen der Läuferpule und der Drehfeldoberwelle.

Die induzierte Spannung besteht also aus unendlich vielen Einzelschwingungen $u_{i,6g+1}(\alpha_R, t)$.

Für diese Schwingungen gilt:

$$\begin{aligned} u_{i,6g+1}(\alpha_R, t) &= 2w_2 \ell r s_{6g+1} \Omega_{6g+1} B_{6g+1} \sin((6g+1)\alpha_R p - s_{6g+1}\omega t) \\ &= w_2 \frac{2\ell r}{(6g+1)p} \omega s_{6g+1} B_{6g+1} \sin((6g+1)\alpha_R p - s_{6g+1}\omega t) \\ &= w_2 \phi_{6g+1} \omega s_{6g+1} \sin((6g+1)\alpha_R p - s_{6g+1}\omega t) \end{aligned}$$

Die vom Luftspaltdrehfeld induzierten Bewegungsspannungen $u_{i,6g+1}(\alpha_R, t)$ haben folgende Eigenschaften:

- Die Amplituden der induzierten Spannungen sind proportional zum Fluss der Oberwelle, zur Frequenz der Speisespannung und zum Schlupf.
- Die Frequenz aller induzierter Spannungen ist gleich der Schlupffrequenz.
- Bei Stillstand des Läufers ($n=0$, d.h. $s_{6g+1}=1$) ist die Frequenz aller von den Oberwellen induzierten Spannungen gleich der Speisefrequenz.
- Bei Synchrondrehzahl ($n = n_0$) gilt:

$$s_{6g+1} = \frac{\frac{\omega}{(6g+1)p} - \frac{\omega}{p}}{\omega} = 1 - (6g+1) = -6g$$

Es wird also keine Grundschwingungsspannung ($g=0$) induziert; die Oberwellen induzieren aber Oberschwingungen unterschiedlicher Frequenzen.

- Bei sonstigen Drehzahlen induziert die Grundwelle und jede Oberwelle der Statorwicklung eine Spannung unterschiedlicher Frequenz in der Läuferwelle.
- Die Phasenlage der im Läufer induzierten Spannungen ist nur von der räumlichen Lage der Spule $\alpha_R (6g+1)p$ abhängig.

Wird der Läufer nun auch mit einer Drehstromwicklung versehen, so werden die drei Stränge auch hier um den Winkel $2\pi/3p$ versetzt angeordnet. Gilt für die Nutenzahl pro Pol und Strang des Rotors $q > 1$, so muss auch hier der Wicklungsfaktor (Index „2“ für den Rotor) berücksichtigt werden. Es gilt dann für die in dem k -ten Strang des Läufers ($k=1,2,3$) induzierte Spannung ($\alpha_R = (k-1) \cdot 2\pi/3p$):

$$u_{i,2,k}(t) = \sum_{g=-\infty}^{\infty} w_2 \xi_{2,6g+1} \phi_{6g+1} \omega s_{6g+1} \sin\left((6g+1) \frac{2\pi}{3} (k-1) - s_{6g+1} \omega t\right)$$

Das Luftspaltfeld induziert auch in der Ständerwicklung Spannungen. Ersetzt man in der obigen Formel $w_2 \xi_{2,6g+1}$ durch $w_1 \xi_{1,6g+1}$, und berücksichtigt man, dass für die Ständerwicklung $s_{6g+1}=1$ beträgt (da der Ständer stillsteht), so folgt für die in der Ständerwicklung induzierte Spannung:

$$u_{i,1,k}(t) = \sum_{g=-\infty}^{\infty} w_1 \xi_{1,6g+1} \phi_{6g+1} \omega \sin\left((6g+1) \frac{2\pi}{3} (k-1) - \omega t\right)$$

Das Verhältnis der induzierten Spannungen (Maxima) im Stator, hervorgerufen durch die eine Luftspaltoberwelle bzw. die Grundwelle, beträgt:

$$\frac{u_{i,1,6g+1}}{u_{i,1,1}} = \frac{\xi_{1,6g+1}}{\xi_{1,1}} \frac{\phi_{6g+1}}{\phi_1} = \frac{\xi_{1,6g+1}}{\xi_{1,1}} \frac{B_{6g+1}}{(6g+1)B_1} = \left(\frac{\xi_{1,6g+1}}{\xi_{1,1}(6g+1)} \right)^2$$

Das Verhältnis der induzierten Spannungen (Maxima) in Rotor und Stator, hervorgerufen durch die selbe Luftspaltüberwelle, beträgt:

$$\frac{u_{i,2,6g+1}}{u_{i,1,6g+1}} = \frac{w_2 \xi_{2,6g+1}}{w_1 \xi_{1,6g+1}} s_{6g+1}$$

Die Effektivwerte der von der Grundwelle in Stator und Rotor induzierten Spannungen betragen:

$$U_{i,1,1} = w_1 \xi_{1,1} \omega \frac{\phi_1}{\sqrt{2}}$$

$$U_{i,2,1} = w_2 \xi_{2,1} s_1 \omega \frac{\phi_1}{\sqrt{2}}$$

3.7 Drehmoment und Leistung

Für die folgenden Betrachtungen zu Drehmoment und Leistung werden nur die Grundwellen herangezogen; der Einfluss der Oberwellen wird vernachlässigt.

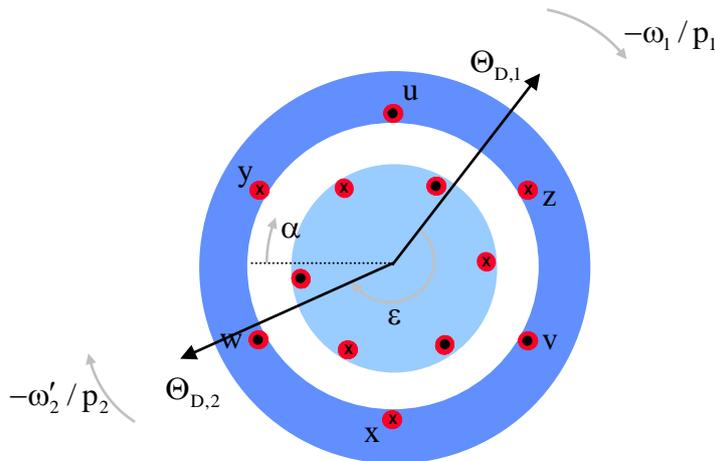
Von der Statorwicklung werde eine Drehdurchflutung $\Theta_{D,1}$ erzeugt, die mit ω_1/p_1 umläuft:

$$\Theta_{D,1}(\alpha, t) = \frac{3}{2} \frac{2}{\pi} \frac{w_1 \xi_{s1}}{p_1} \sqrt{2} I_1 \sin(\alpha p_1 - \omega_1 t) = \Theta_{D,1} \sin(\alpha p_1 - \omega_1 t)$$

Von der Rotorwicklung werde analog eine Drehdurchflutung $\Theta_{D,2}$ erzeugt, die mit ω'_2/p_2 umläuft und um den Winkel ε räumlich voreilt. Hierbei setzt sich die Kreisfrequenz der Rotordrehdurchflutung zusammen aus der Rotationskreisfrequenz des Läufers Ω und der Kreisfrequenz der Rotorströme ω_2 ($\omega'_2 = \Omega + \omega_2$):

$$\Theta_{D,2}(\alpha, t) = \frac{3}{2} \frac{2}{\pi} \frac{w_2 \xi_{s2}}{p_2} \sqrt{2} I_2 \sin(\alpha p_2 - \omega'_2 t - \varepsilon p_2) = \Theta_{D,2} \sin(\alpha p_2 - \omega'_2 t - \varepsilon p_2)$$

Hierbei sind zunächst die Polpaarzahlen, die Kreisfrequenzen und die Phasenverschiebung zwischen Ständer- und Rotordrehdurchflutung beliebig. Das folgende Bild zeigt die räumliche Lage der Durchflutungsverteilungen schematisch mit Hilfe von Zeigern: die Lage des jeweiligen Zeigers gibt die Lage des Maximums der Durchflutungsverteilung an, die Länge des Zeigers ist ein Maß für die Amplitude.



Mit Hilfe des Durchflutungsgesetzes erhält man nun durch Überlagerung (auch hier ist also die Sättigung vernachlässigt) das resultierende Luftspaltfeld:

$$H(\alpha, t) \delta = \Theta_{D,1}(\alpha, t) + \Theta_{D,2}(\alpha, t)$$

$$\Rightarrow B(\alpha, t) = \frac{\mu_0}{\delta} (\Theta_{D,1}(\alpha, t) + \Theta_{D,2}(\alpha, t))$$

Die magnetische Energie im Luftspalt ist:

$$W_{\text{mag}} = \int_V \frac{B^2(\alpha, t)}{2\mu_0} dV \quad \text{mit} \quad dV = \ell \cdot \delta \cdot r d\alpha$$

Da Sättigung vernachlässigt wurde (also Linearität vorausgesetzt wurde), ist die magnetische Energie gleich der magnetischen Coenergie. Dann kann das Drehmoment aus der Ableitung der magnetischen Energie nach dem mechanischen Winkel ermittelt werden:

$$\begin{aligned} T &= \frac{\partial W_{\text{mag}}}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int_0^{2\pi} \frac{B^2(\alpha, t)}{2\mu_0} \ell \delta r d\alpha \\ &= \frac{\ell \delta r}{2\mu_0} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} B^2(\alpha, t) \right] d\alpha \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} B^2(\alpha, t) = 2B(\alpha, t) \frac{\partial B(\alpha, t)}{\partial \varepsilon} = 2 \left(\frac{\mu_0}{\delta} \right)^2 (\Theta_{D,1}(\alpha, t) + \Theta_{D,2}(\alpha, t)) \frac{\partial \Theta_{D,2}(\alpha, t)}{\partial \varepsilon}$$

Insgesamt erhält man nun:

$$\begin{aligned} T &= \frac{\ell \delta r}{2\mu_0} 2 \left(\frac{\mu_0}{\delta} \right)^2 \int_0^{2\pi} (\Theta_{D,1}(\alpha, t) + \Theta_{D,2}(\alpha, t)) \frac{\partial \Theta_{D,2}(\alpha, t)}{\partial \varepsilon} d\alpha \\ &= \mu_0 \frac{\ell r}{\delta} \int_0^{2\pi} (\Theta_{D,1} \sin(\alpha p_1 - \omega_1 t) + \Theta_{D,2} \sin(\alpha p_2 - \omega_2 t - \varepsilon p_2)) \Theta_{D,2} [-p_2 \cos(\alpha p_2 - \omega_2 t - \varepsilon p_2)] d\alpha \\ &= -\mu_0 \frac{\ell r}{\delta} \int_0^{2\pi} [p_2 \Theta_{D,1} \Theta_{D,2} \sin(\alpha p_1 - \omega_1 t) \cos(\alpha p_2 - \omega_2 t - \varepsilon p_2) + \\ &\quad p_2 \Theta_{D,2}^2 \sin(\alpha p_2 - \omega_2 t - \varepsilon p_2) \cos(\alpha p_2 - \omega_2 t - \varepsilon p_2)] d\alpha \end{aligned}$$

Berücksichtigt man, dass $\int_0^{2\pi} \sin(x) \cos(x) dx = 0$ gilt, so erhält man:

$$T = -\mu_0 \frac{\ell r}{\delta} p_2 \Theta_{D,1} \Theta_{D,2} \int_0^{2\pi} \sin(\alpha p_1 - \omega_1 t) \cos(\alpha p_2 - \omega_2 t - \varepsilon p_2) d\alpha$$

Mit $\sin(x) \cos(y) = \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)]$ folgt weiter:

$$T = -\mu_0 \frac{\ell r}{\delta} p_2 \Theta_{D,1} \Theta_{D,2} \frac{1}{2} \left[\int_0^{2\pi} \sin((p_1 + p_2)\alpha - (\omega_1 + \omega_2)t - \varepsilon p_2) d\alpha + \int_0^{2\pi} \sin((p_1 - p_2)\alpha - (\omega_1 - \omega_2)t + \varepsilon p_2) d\alpha \right]$$

Es gilt nun ganz allgemein:

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx + \varphi) dx = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq 0 \\ 2\pi \sin(\varphi) & \text{für } n = 0 \end{cases}$$

Da p_1 und p_2 die Polpaarzahlen von Stator bzw. Rotor sind, sind es positive, ganze Zahlen. Damit gilt aber:

$$\int_0^{2\pi} \sin((p_1 + p_2)\alpha - (\omega_1 + \omega_2)t - \varepsilon p_2) d\alpha = 0$$

und

$$\int_0^{2\pi} \sin((p_1 - p_2)\alpha - (\omega_1 - \omega'_2)t + \varepsilon p_2) d\alpha \neq 0 \quad \text{falls } p_1 = p_2 = p$$

Ein Drehmoment kann also nur dann entstehen, wenn die Polpaarzahlen von Stator und Rotor identisch sind. Dann gilt:

$$T = -\mu_0 \frac{\ell r}{\delta} p \frac{\Theta_{D,1} \Theta_{D,2}}{2} 2\pi \sin(-(\omega_1 - \omega'_2)t + \varepsilon p)$$

Das Drehmoment ist also zeitlich sinusförmig und hat den Mittelwert Null. Es ist ein reines „Pendelmoment“.

Nur wenn die Kreisfrequenzen der Durchflutungsdrehwellen gleich sind ($\omega_1 = \omega'_2 = \omega$), entsteht ein zeitlich konstantes Moment:

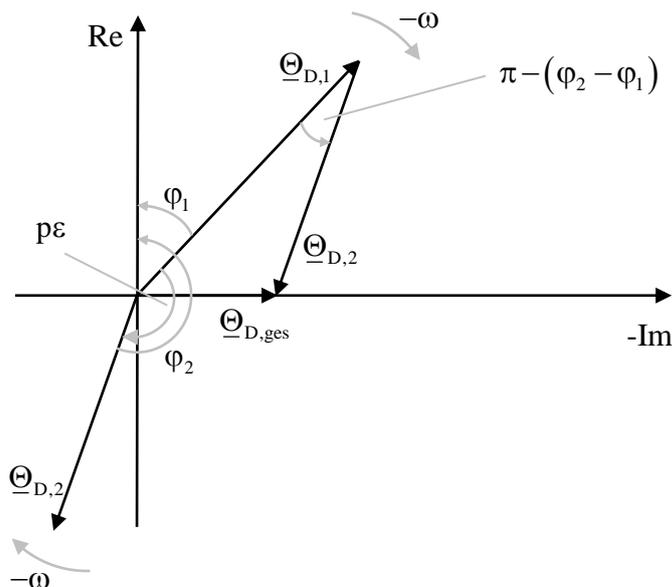
$$T = \mu_0 \frac{\ell r \pi}{\delta} p \Theta_{D,1} \Theta_{D,2} \sin(-\varepsilon p)$$

Sind die beiden Durchflutungsdrehwellen $\Theta_{D,1}(\alpha, t)$ und $\Theta_{D,2}(\alpha, t)$ in Phase, d.h. ist $\varepsilon = 0$, dann ist auch das Drehmoment gleich Null. Das Drehmoment wird maximal für $\varepsilon p = \pi/2$, d.h. wenn die Durchflutungsdrehwellen um 90° phasenverschoben sind.

Das Drehfeld wurde wie folgt ermittelt:

$$B(\alpha, t) = \frac{\mu_0}{\delta} (\Theta_{D,1}(\alpha, t) + \Theta_{D,2}(\alpha, t)) = \frac{\mu_0}{\delta} \Theta_{D,ges}(\alpha, t)$$

Im Folgenden soll dies mit Hilfe von Zeitzeigern in der komplexen Ebene dargestellt werden. Zeitzeiger stellen mit ihrer Länge die Amplitude der entsprechen Drehwelle dar, die Richtung der Zeitzeiger gibt die Lage des Maximalwertes der Drehwelle an.



Mit Hilfe des Cosinussatzes erhält man den Betrag der Gesamtdrehdurchflutung:

$$\begin{aligned}\Theta_{D,ges} &= \sqrt{\Theta_{D,1}^2 + \Theta_{D,2}^2 - 2\Theta_{D,1}\Theta_{D,2} \cos[\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)]} \\ &= \sqrt{\Theta_{D,1}^2 + \Theta_{D,2}^2 + 2\Theta_{D,1}\Theta_{D,2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}\end{aligned}$$

Der Sinussatz ergibt:

$$\begin{aligned}\frac{\Theta_{D,2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right)} &= \frac{\Theta_{D,ges}}{\sin(\pi - (\varphi_2 - \varphi_1))} \\ \Rightarrow \frac{\Theta_{D,2}}{\cos(\varphi_1)} &= \frac{\Theta_{D,ges}}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)} = \frac{\Theta_{D,ges}}{\sin(2\pi - p\varepsilon)} = \frac{\Theta_{D,ges}}{\sin(-p\varepsilon)} \\ \Rightarrow \Theta_{D,2} \sin(-p\varepsilon) &= \Theta_{D,ges} \cos(\varphi_1)\end{aligned}$$

Für das Drehmoment folgt dann:

$$\begin{aligned}T &= \mu_0 \frac{\ell r \pi}{\delta} p \Theta_{D,1} \Theta_{D,ges} \cos(\varphi_1) \\ &= \mu_0 \frac{\ell r \pi}{\delta} p \Theta_{D,1} \frac{\delta}{\mu_0} B \cos(\varphi_1) \\ &= \ell r \pi p \Theta_{D,1} B \cos(\varphi_1) \\ &= \ell r \pi p \frac{3}{2} \frac{w_1 \xi_1}{\pi} \sqrt{2} I_1 B \cos(\varphi_1) \\ &= 3 \ell r w_1 \xi_1 \sqrt{2} I_1 B \cos(\varphi_1)\end{aligned}$$

Mit dem Effektivwert der induzierten Spannung

$$U_{i,1} = w_1 \xi_1 \omega \frac{\phi}{\sqrt{2}}$$

und dem Fluss

$$\phi = \frac{2 \ell r}{p} B$$

gilt für das Drehmoment weiter:

$$T = 3 U_{i,1} I_1 \frac{p}{\omega} \cos(\varphi_1) = \frac{3 U_{i,1} I_1 \cos(\varphi_1)}{\Omega_1} = \frac{3 U_{i,1} I_1 \cos(\varphi_1)}{2 \pi n_0}$$

Hierbei ist der Ausdruck

$$P_D = 3 U_{i,1} I_1 \cos(\varphi_1)$$

die Drehfeldleistung. Diese Drehfeldleistung ist gleich der vom Netz aufgenommenen Wirkleistung minus der Ständerkupferverluste:

$$P_D = P_1 - 3 R_1 I_1^2$$

Die Drehfeldleistung wird über den Luftspalt umgesetzt:

$$P_D = 3 U_{i,1} I_1 \cos(\varphi_1) = T \cdot 2 \pi n_0$$

Die an der Welle abgegebene mechanische Leistung beträgt:

$$P_{\text{mech}} = T \cdot 2\pi n = T \cdot 2\pi n_0 (1-s) = (1-s)P_D$$

Die Differenz zwischen der Drehfeldleistung und der mechanischen Leistung an der Welle wird im Läufer in Verlustwärme umgesetzt:

$$P_{V,\text{Rotor}} = P_D - P_{\text{mech}} = P_D - (1-s)P_D = sP_D$$

Rotiert der Läufer mit synchroner Drehzahl ($n = n_0$, d.h. $s=0$), so ist die mechanische Leistung an der Welle gleich der Drehfeldleistung; die Rotorverluste sind Null.

Um ein zeitlich konstantes Drehmoment zu erzeugen, muss $\omega_1 = \omega'_2 = \omega$ gelten. Die Kreisfrequenz der Rotordurchflutungsdrehwelle ω'_2 kann man dann schreiben als:

$$\begin{aligned} \omega'_2 = \omega &= 2\pi f = 2\pi p n_0 = 2\pi p ((1-s)n_0 + s n_0) \\ &= 2\pi p \left(n + s \frac{f}{p} \right) = 2\pi p n + 2\pi s f = 2\pi p n + 2\pi f_2 \\ &= \Omega + \omega_2 \end{aligned}$$

Hierbei ist n die mechanische Drehzahl des Rotors und f_2 die Frequenz der Rotorströme. Weitere Formulierungen sind:

$$\begin{aligned} f_2 = s f &= s f_1 \\ &= f_1 - p n \end{aligned} \quad n = \frac{f_1 - f_2}{p}$$

Wird der Rotor der Drehfeldmaschine nun mit Wechselstrom ($f_2 > 0$) gespeist, so gilt:

$$n < \frac{f_1}{p} = n_0$$

Der Rotor dreht also mit einer Drehzahl, die kleiner als die Synchrondrehzahl n_0 ist. Eine solche Maschine wird Asynchronmaschine genannt. Je nach Frequenz der Rotorströme stellt sich die Drehzahl der Maschine ein.

Wird der Rotor der Drehfeldmaschine mit Gleichstrom ($f_2 = 0$) gespeist, so gilt:

$$n = \frac{f_1}{p} = n_0$$

Der Rotor dreht also mit synchroner Drehzahl. Eine solche Maschine wird Synchronmaschine genannt. Die Drehzahl der Maschine hängt ausschließlich von der Frequenz der Statorströme ab.

4 Asynchronmaschine

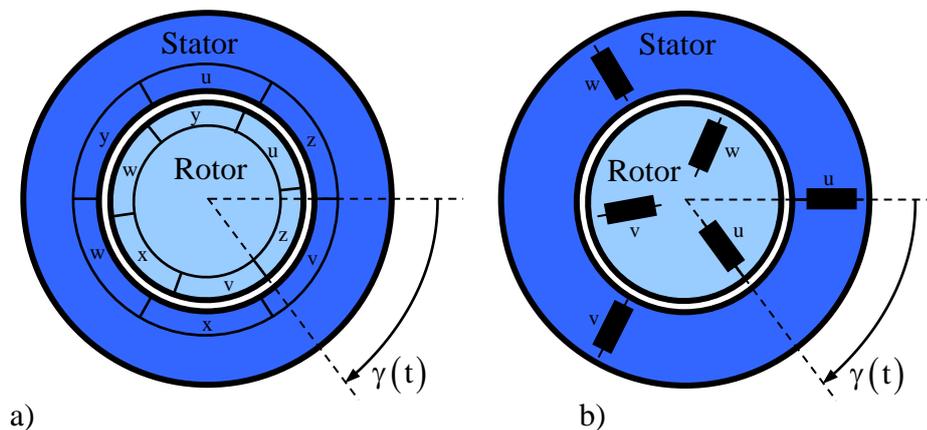
4.1 Aufbau und Ersatzschaltbild

In die Nuten von Ständer und Läufer einer Asynchronmaschine ist jeweils eine symmetrische Wicklung eingelegt. Der Ständer mit der Strangzahl $m_1 = 3$ und der effektiven Windungszahl $w_1 \xi_1$ wird von einem symmetrischen Drehstromsystem der Frequenz f_1 gespeist. Somit wird ein Drehfeld erzeugt, das mit der synchronen Drehzahl $n_0 = f_1/p$ umläuft. Mit Rücksicht auf die Erzeugung eines konstanten Drehmomentes sind die Polpaarzahlen in Ständer und Läufer gleich ($p_1 = p_2 = p$).

Die Läuferwicklung kann entweder direkt kurzgeschlossen werden oder aber über Schleifringe nach außen geführt und dort direkt oder über Vorschaltwiderstände kurzgeschlossen werden. In den m_2 Strängen der geschlossenen Läuferwicklung mit der effektiven Windungszahl $w_2 \xi_2$ werden nun vom Drehfeld Ströme induziert. Diese Läuferströme bilden zusammen mit dem Ständerdrehfeld ein Drehmoment, das den Läufer mit der mechanischen Drehzahl $n = (1-s)n_0$ antreibt.

Der Rotor dreht (im Motorbetrieb) immer mit kleinerer Drehzahl als der Synchrondrehzahl n_0 , da bei synchroner Drehzahl keine Ströme mehr im Läufer induziert werden, und somit kein Drehmoment mehr generiert wird. Die Differenzdrehzahl zwischen Ständerdrehfeld und Läufer beträgt $n_2 = sn_0$; im Rotor werden Ströme der Frequenz $f_2 = sf_1$ induziert. Diese Ströme erzeugen ein Läuferdrehfeld, das (relativ zum Läufer) mit der Drehzahl n_2 umläuft. Relativ zum Stator besitzt dieses Drehfeld die Drehzahl $n_2 + n = n_0$. Somit ist die Frequenzbedingung zur Erzeugung eines konstanten Drehmomentes erfüllt.

Das folgende Bild zeigt den Zonenplan und die symbolische Darstellung der Wicklungen einer Asynchronmaschine:



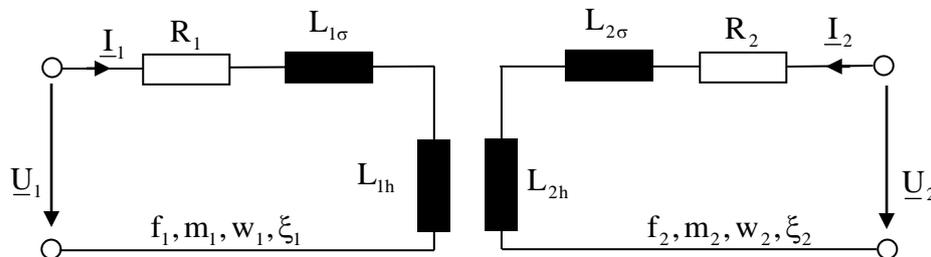
a) Zonenaufteilung für drei Statorstränge und drei Rotorstränge ($2p = 2$)

b) Symbolische Darstellung

Um diese elektrische Maschine mathematisch einfacher behandeln zu können, soll zunächst das System gekoppelter und beweglicher Spulen auf ein System aus ruhenden Elementen mit gleicher Windungs- und Strangzahl in Stator und Rotor umgerechnet werden.

Hierzu wird im Folgenden eine reine Grundwellenbetrachtung durchgeführt. Zur Berechnung des stationären Betriebes wird die komplexe Wechselstromrechnung angewandt. Aus Symmetriegründen reicht die einsträngige Betrachtung.

Ständer- und Läuferwicklung können mit konzentrierten Elementen beschrieben werden: Wirkwiderstand, Streu- und Hauptinduktivität. Das Ersatzschaltbild sieht dann wie folgt aus (beide Teilsysteme sind im Verbraucherzählpfeilsystem dargestellt):



Die Spannungsgleichungen lauten (mit den Gegeninduktivitäten L_{21} und L_{12}):

$$\underline{U}_1 = R_1 \underline{I}_1 + j\omega_1 L_{1\sigma} \underline{I}_1 + j\omega_1 L_{21} \underline{I}_2$$

$$\underline{U}_2 = R_2 \underline{I}_2 + j\omega_2 L_{2\sigma} \underline{I}_2 + j\omega_2 L_{12} \underline{I}_1$$

Hierbei gilt:

$$L_1 = L_{1\sigma} + L_{1h}, \quad L_2 = L_{2\sigma} + L_{2h}$$

Es werden nun in der ruhenden Statorwicklung Spannungen und Ströme gesucht, die die gleiche Wirkung besitzen wie die realen Spannungen und Ströme der rotierenden Läuferwicklung. Die so transformierten Ströme und Spannungen werden als Kennzeichnung mit einem Strich versehen. Folgende Bedingungen müssen erfüllt sein:

1. gleiche Durchflutung:

$$\frac{m_2}{2} \frac{4}{\pi} \frac{w_2 \xi_2}{p} \sqrt{2} I_2 = \frac{m_1}{2} \frac{4}{\pi} \frac{w_1 \xi_1}{p} \sqrt{2} I'_2$$

$$\Rightarrow I'_2 = I_2 \frac{m_2 w_2 \xi_2}{m_1 w_1 \xi_1}$$

2. gleicher Hauptfluss:

$$\sqrt{2} U_{i,2} = \omega_2 w_2 \xi_2 \phi_h$$

$$\sqrt{2} U'_{i,2} = \omega_1 w_1 \xi_1 \phi_h$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} U'_{i,2} = \omega_1 w_1 \xi_1 \frac{\sqrt{2} U_{i,2}}{\omega_2 w_2 \xi_2}$$

Für $\omega_2 = \omega_1$ ist $U_{i,2} = U_{2,0}$ (induzierte Spannung ist gleich der Leerlaufspannung). Dann folgt weiter:

$$U'_{i,2} = U_{i,2} \frac{\omega_1 w_1 \xi_1}{\omega_2 w_2 \xi_2} = \frac{1}{s} U_{2,0} \frac{w_1 \xi_1}{w_2 \xi_2} = \frac{1}{s} U'_{2,0}$$

3. gleiche Stromwärmeverluste:

$$m_2 R_2 I_2^2 = m_1 R_2' I_2'^2$$

$$\Rightarrow R_2' = R_2 \frac{m_1 (w_1 \xi_1)^2}{m_2 (w_2 \xi_2)^2}$$

4. gleiche magnetische Energie (hier für den linearen, d.h. ungesättigten Fall):

$$\frac{m_1}{2} \Psi_1 I_1 + \frac{m_2}{2} \Psi_2 I_2 = \frac{m_1}{2} (\Psi_1 I_1 + \Psi_2' I_2')$$

$$\Rightarrow \frac{m_1}{2} (L_1 I_1^2 + L_{21} I_1 I_2) + \frac{m_2}{2} (L_2 I_2^2 + L_{12} I_1 I_2) = \frac{m_1}{2} (L_1 I_1^2 + 2L_{1h} I_1 I_2' + L_2' I_2'^2)$$

Es folgt weiter:

$$L_2' = L_2 \frac{m_1 (w_1 \xi_1)^2}{m_2 (w_2 \xi_2)^2}$$

$$L_{21} = L_{1h} \frac{m_2 w_2 \xi_2}{m_1 w_1 \xi_1}$$

$$L_{12} = L_{1h} \frac{w_2 \xi_2}{w_1 \xi_1}$$

Es ist zu beachten, dass gilt: $L_{21} = L_{12} \frac{m_2}{m_1}$.

Die Spannungsgleichungen können nun wie folgt umgeformt werden:

$$\underline{U}_1 = R_1 \underline{I}_1 + j\omega_1 L_1 \underline{I}_1 + j\omega_1 \frac{m_1 w_1 \xi_1}{m_2 w_2 \xi_2} L_{21} \frac{m_2 w_2 \xi_2}{m_1 w_1 \xi_1} \underline{I}_2$$

$$\underline{U}_2 \frac{\omega_1 w_1 \xi_1}{\omega_2 w_2 \xi_2} = R_2 \frac{\omega_1 (w_1 \xi_1)^2}{\omega_2 (w_2 \xi_2)^2} \frac{m_1}{m_2} \underline{I}_2 \frac{m_2 w_2 \xi_2}{m_1 w_1 \xi_1}$$

$$+ j\omega_2 \frac{\omega_1 (w_1 \xi_1)^2}{\omega_2 (w_2 \xi_2)^2} \frac{m_1}{m_2} L_2 \frac{m_2 w_2 \xi_2}{m_1 w_1 \xi_1} \underline{I}_2 + j\omega_2 \frac{\omega_1 w_1 \xi_1}{\omega_2 w_2 \xi_2} L_{12} \underline{I}_1$$

Durch Einsetzen der auf den Stator umgerechneten Größen („gestrichene“ Größen) erhält man:

$$\underline{U}_1 = R_1 \underline{I}_1 + j\omega_1 L_1 \underline{I}_1 + j\omega_1 L_{1h} \underline{I}_2'$$

$$\frac{\underline{U}_2'}{s} = \frac{R_2'}{s} \underline{I}_2' + j\omega_1 L_2' \underline{I}_2' + j\omega_1 L_{1h} \underline{I}_1$$

Mit Einführung der Reaktanzen

$$X_{1h} = \omega_1 L_{1h} \quad \text{Hauptreaktanz}$$

$$X_1 = X_{1\sigma} + X_{1h} \quad \text{Gesamtreaktanz des Stators}$$

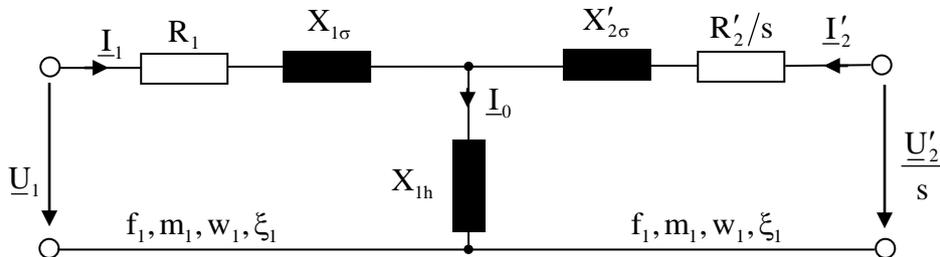
$$X_2' = X_{2\sigma}' + X_{1h} \quad \text{Gesamtreaktanz des Rotors (auf den Stator bezogen)}$$

und dem Leerlaufstrom $\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2'$ erhält man folgendes Gleichungssystem:

$$\underline{U}_1 = R_1 \underline{I}_1 + jX_{1\sigma} \underline{I}_1 + jX_{1h} \underline{I}_0$$

$$\frac{\underline{U}'_2}{s} = \frac{R'_2}{s} \underline{I}'_2 + jX'_{2\sigma} \underline{I}'_2 + jX_{1h} \underline{I}_0$$

Hieraus kann man nun das folgende Ersatzschaltbild ableiten:

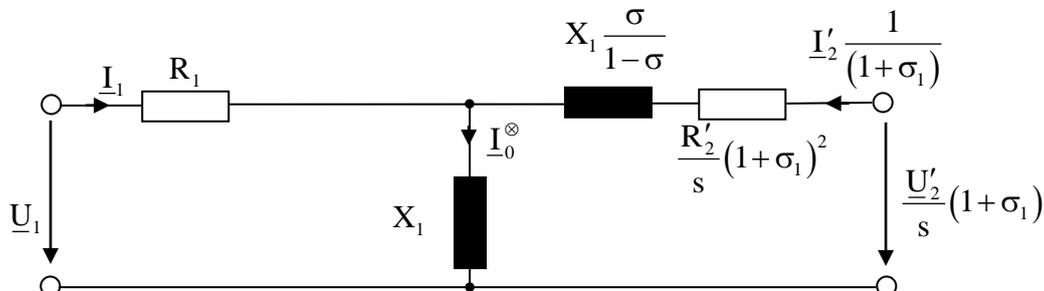


Das Ersatzschaltbild (bei dem alle Größen auf Statorfrequenz, Statorstrangzahl und effektiver Statorwindungszahl umgerechnet sind) ist wie beim Transformator aufgebaut, siehe Kapitel 9. Für $s=1$ (d.h. stillstehender Rotor) erfolgt die Spannungsübersetzung entsprechend dem Verhältnis der effektiven Windungszahlen:

$$\frac{U_{i,1}}{U_{i,2}} = \ddot{u} = \frac{w_1 \xi_1}{w_2 \xi_2}$$

Bei Betrieb der Asynchronmaschine mit konstanter Statorflussverkettung benutzt man häufig folgendes Übersetzungsverhältnis (die ständerseitige Streureaktanz verschwindet):

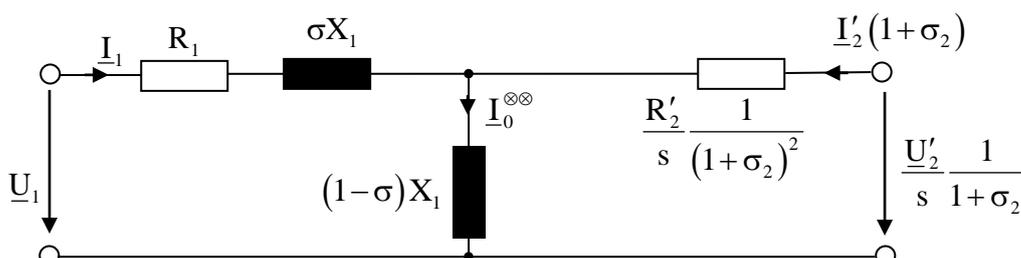
$$\ddot{u} = \frac{w_1 \xi_1}{w_2 \xi_2} (1 + \sigma_1)$$



Für den Betrieb mit konstanter Rotorflussverkettung wählt man häufig (die läuferseitige Streureaktanz verschwindet):

$$\ddot{u} = \frac{w_1 \xi_1}{w_2 \xi_2} \frac{1}{1 + \sigma_2}$$

Das Ersatzschaltbild wird zu:



4.2 Widerstände und Induktivitäten

1. Strangwiderstand:

Mit der mittleren Windungslänge ℓ_m , der Windungszahl w eines Stranges, dem Leiterquerschnitt q_L und dem spezifischen Widerstand ρ_{Cu} wird der Strangwiderstand:

$$R = \rho_{Cu} \frac{w \ell_m}{q_L}$$

Die mittlere Windungslänge lässt sich aus der Blechpaketlänge und der Länge einer Windung in den Wickelköpfen ermitteln.

2. Hauptinduktivität:

Speist man den Stator mit I_1 und f_1 im Leerlauf (d.h. bei stromlosem Rotor), so gilt:

$$L_{1h} = \frac{X_{1h}}{\omega_1} = \frac{U_i}{\omega_1 I_1}$$

Für die induzierte Spannung gilt nach der Drehfeldtheorie:

$$\sqrt{2} U_i = \frac{3}{2} \mu_0 w_1 \xi_1 \frac{\ell_r}{\delta} \frac{w_1 \xi_1}{p^2} \frac{4}{\pi} \omega_1 \sqrt{2} I$$

Es folgt also insgesamt:⁵

$$L_{1h} = \frac{3}{2} \mu_0 \left(\frac{w_1 \xi_1}{p} \right)^2 \frac{4}{\pi} \frac{\ell_r}{\delta}$$

3. Streuinduktivität:

Die Streuung setzt sich zusammen aus der Oberwellenstreuung (doppeltverkettete Streuung), der Stirnkopfstreuung und der Nutstreuung. Diese drei Anteile werden getrennt berechnet und dann aufsummiert. Die getrennte Betrachtung einzelner Feldanteile ist bereits in Kapitel 3.2 (für den Nut- und Luftspaltbereich) erläutert worden; auch hier wird eine solche Trennung der Feldbereiche durchgeführt. Die Aufsummierung (d.h. Überlagerung) der einzelnen Anteile ist wegen der vorausgesetzten Linearität zulässig.

Oberwellenstreuung (doppeltverkettete Streuung):

In der Drehfeldtheorie wurde gezeigt, dass alle Oberwellen in der sie erzeugenden Wicklung nur Spannungen gleicher Frequenz und Phasenlage induzieren. Alle diese Spannungen können also algebraisch addiert werden. Die Summe dieser Spannungen wird als Spannungsabfall an einer Streureaktanz aufgefasst, da sie kein Nutfeld erzeugen.

⁵ Zum Luftspalt δ siehe die Anmerkungen in Kapitel 3.5.

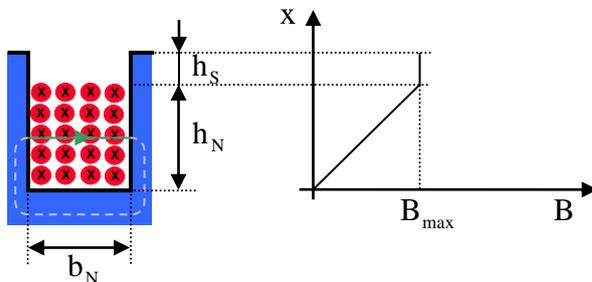
$$\begin{aligned} L_{1,\sigma,0} &= \frac{1}{\omega_1} \sum_{g \neq 0} \frac{U_{i,6g+1}}{I_1} \\ &= \frac{3}{2} \mu_0 \left(\frac{w_1 \xi_1}{p} \right)^2 \frac{4 \ell r}{\pi \delta} \sum_{g \neq 0} \left(\frac{\xi_{6g+1}}{\xi_1 (6g+1)} \right)^2 \\ &= \sigma_0 L_{1h} \end{aligned}$$

Hierbei ist:

$$\sigma_0 = \sum_{g \neq 0} \left(\frac{\xi_{6g+1}}{\xi_1 (6g+1)} \right)^2$$

Nutstreuung:

Betrachtet wird die folgende Nut:



Das Durchflutungsgesetz liefert unter der Voraussetzung $\mu_{Fe} \rightarrow \infty$ im leitergefüllten Nutbereich (z_N Leiter in der Nut, a Anzahl paralleler Zweige):

$$\begin{aligned} \Theta(x) &= \frac{z_N}{a} \frac{x}{h_N} \sqrt{2I} = \frac{B(x)}{\mu_0} b_N \\ B(x) &= B_{max} \frac{x}{h_N}, \quad B_{max} = \mu_0 \frac{z_N \sqrt{2I}}{a b_N} \end{aligned}$$

Im Bereich der Nut ohne Leiter (Streusteg- bzw. Keilbereich) gilt:

$$\begin{aligned} \Theta(x) &= \frac{z_N}{a} \sqrt{2I} = \frac{B(x)}{\mu_0} b_N \\ B(x) &= B_{max} \end{aligned}$$

Die Nutstreuinduktivität wird nun mit Hilfe der magnetischen Energie berechnet. Für einen Strang mit $2pq$ Nuten gilt:

$$W_{mag} = \frac{1}{2\mu_0} \int_V B^2 dV = \frac{1}{2} L_{\sigma,N} (\sqrt{2I})^2$$

Also folgt:

$$\begin{aligned}
 W_{\text{mag}} &= \frac{2pq}{2\mu_0} \int_0^{h_N} \left(B_{\text{max}} \frac{x}{h_N} \right)^2 b_N \ell dx + \frac{2pq}{2\mu_0} \int_{h_N}^{h_N+h_S} B_{\text{max}}^2 b_N \ell dx \\
 &= 2pq \left(\frac{\mu_0 \frac{z_N}{a} \sqrt{2I}}{b_N} \right)^2 \frac{b_N \ell}{2\mu_0} \left(\frac{h_N}{3} + h_S \right) = \frac{1}{2} \mu_0 2pq \ell \left(\frac{z_N}{a} \right)^2 \left(\frac{h_N}{3b_N} + \frac{h_S}{b_N} \right) (\sqrt{2I})^2
 \end{aligned}$$

Man erhält also:

$$L_{\sigma,N} = \mu_0 2pq \ell \left(\frac{z_N}{a} \right)^2 \left(\frac{h_N}{3b_N} + \frac{h_S}{b_N} \right)$$

Mit $\frac{z_N}{a} = \frac{w}{pq}$ folgt weiter:

$$L_{\sigma,N} = 2\mu_0 \frac{w^2}{p} \ell \frac{\lambda_N}{q}, \quad \text{mit} \quad \lambda_N = \left(\frac{h_N}{3b_N} + \frac{h_S}{b_N} \right)$$

Hierbei wird λ_N Nutstreuleitwert genannt.

Stirnstreuung (Wickelkopfstreuung):

Die Stirnstreuung wird durch das Streufeld des Wickelkopfes hervorgerufen. Wegen der komplizierten Form des Wickelkopfes ist eine allgemeingültige Berechnung nicht möglich. Erfahrungswerte ergeben etwa folgenden Wert:

$$\begin{aligned}
 L_{\sigma,W} &= 2\mu_0 \frac{w^2}{p} \ell_w \lambda_w \\
 \lambda_w &\approx 0,2 \dots 0,4
 \end{aligned}$$

Hierbei ist ℓ_w die mittlere Drahtlänge in einem Wickelkopf und λ_w wird Stirnstreuleitwert genannt.⁶

⁶ Für einfache Ausführungen des Wickelkopfes ist die Wickelkopfstreuinduktivität z.B. in den folgenden Veröffentlichungen berechnet:

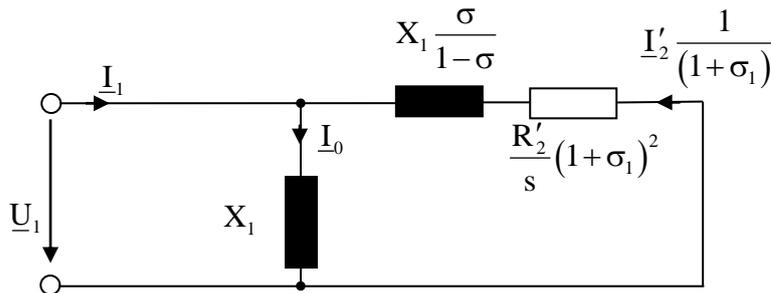
1. Gerling, D.; Schramm, A.: "Analytical Calculation Of The End Winding Leakage Inductance Based On The Solution Of Neumann Integrals", IEEE International Symposium on Industrial Electronics (ISIE) Conference, 20.-23. Juni 2005, Dubrovnik. Kroatien
2. Gerling, D.; Schramm, A.: "Calculation of the Magnetic Field in the End Winding Region of Unsaturated Electrical Machines with Small Air-Gap", 12th International Symposium on Electromagnetic Fields in Mechatronics, Electrical and Electronic Engineering (ISEF), 15.-17. September 2005, Baiona, Spanien

4.3 Betriebsverhalten

1. Stromortskurve:

Zur Ermittlung der Ortskurve des Ständerstromes wird zunächst der Ständerwiderstand vernachlässigt: $R_1 = 0$. Diese Näherung, die für Maschinen größerer Leistung bei Speisung mit Netzfrequenz i.a. zulässig ist, wird später wieder aufgehoben.

Es wird das Ersatzschaltbild mit $\underline{u} = \frac{w_1 \xi_1}{w_2 \xi_2} (1 + \sigma_1)$ gewählt; die Läuferwicklung ist entweder als Käfigläufer oder aber als gewickelter Läufer über die Bürsten kurzgeschlossen. Man erhält folgendes Ersatzschaltbild:



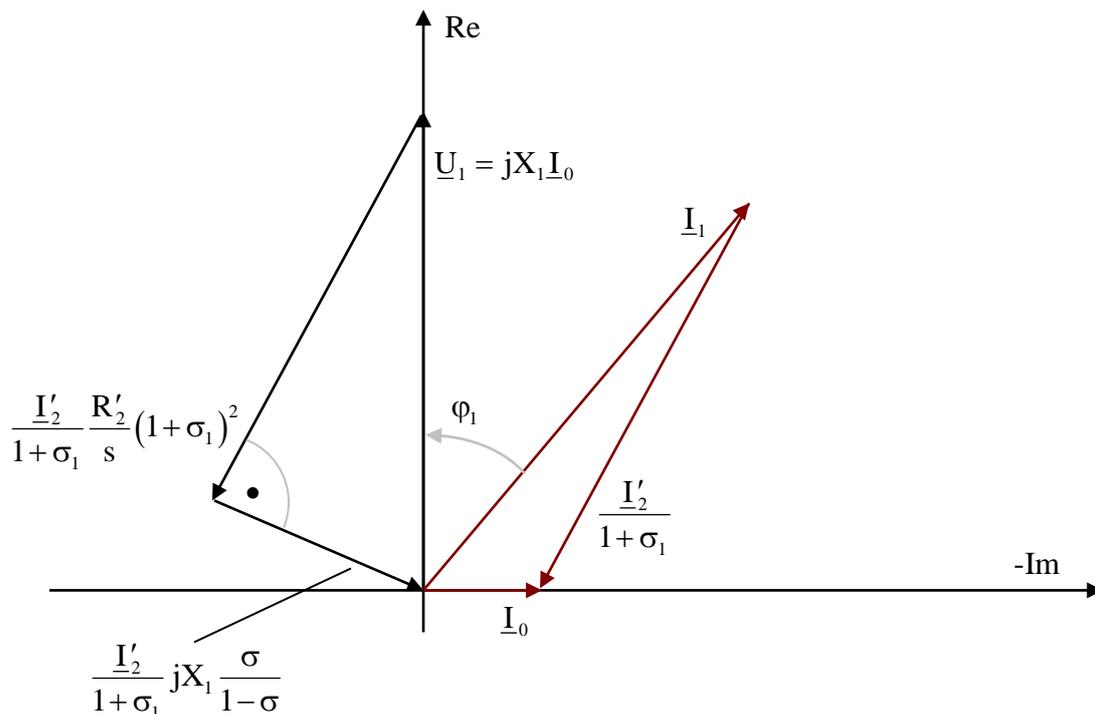
Es gilt:

$$\underline{U}_1 = jX_1 \underline{I}_0$$

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \frac{\underline{I}'_2}{1 + \sigma_1}$$

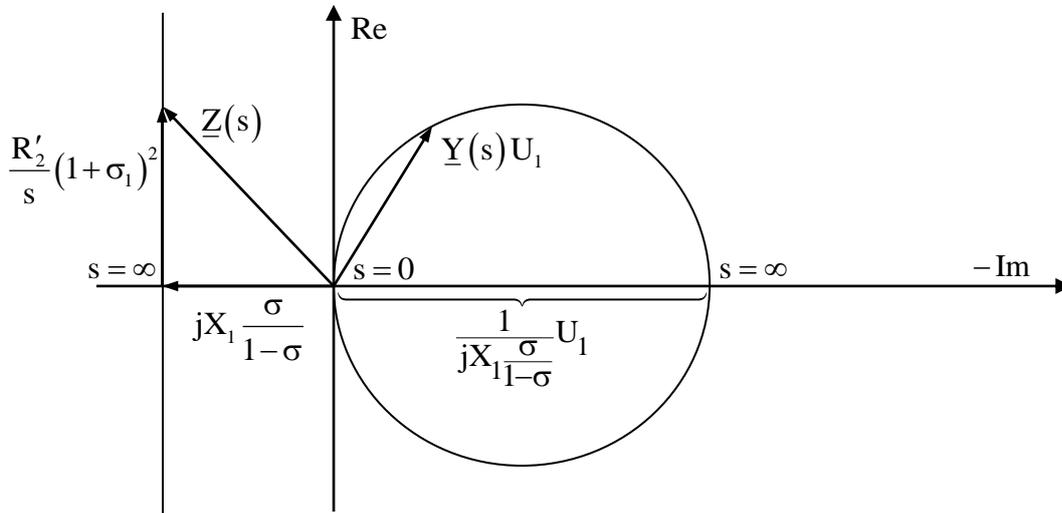
$$\underline{U}_1 + \frac{\underline{I}'_2}{1 + \sigma_1} \left(\frac{R'_2}{s} (1 + \sigma_1)^2 + jX_1 \frac{\sigma}{1 - \sigma} \right) = 0$$

Legt man die Spannung \underline{U}_1 in die positive reelle Achse, so erhält man folgendes Zeigerbild:



Berechnet man nun den Ständerstrom \underline{I}_1 in Abhängigkeit vom Schlupf s , so erhält man:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_0 - \frac{\underline{I}'_2}{1 + \sigma_1} = \frac{\underline{U}_1}{jX_1} + \frac{\underline{U}_1}{\frac{R'_2}{s}(1 + \sigma_1)^2 + jX_1 \frac{\sigma}{1 - \sigma}}$$



Die Ortskurve des Ständerstromes erhält man nun wie folgt:

- Der komplexe Widerstand $\underline{Z}(s) = \frac{R'_2}{s}(1 + \sigma_1)^2 + jX_1 \frac{\sigma}{1 - \sigma}$ ist eine Gerade in der komplexen Ebene.
- Der komplexe Leitwert $\underline{Y}(s) = 1/\underline{Z}(s)$ ist nach der Ortskurventheorie ein Kreis, der für $s=0$ den Ursprung der komplexen Ebene berührt, der den Mittelpunkt auf der $-Im$ -Achse hat und der den Durchmesser $\left(X_1 \frac{\sigma}{1 - \sigma}\right)^{-1}$ besitzt.
- Durch Multiplikation mit $\underline{U}_1 \equiv U_1$ (die Spannung war in die reelle Achse gelegt worden) erhält man die Ortskurve von $-\frac{\underline{I}'_2}{1 + \sigma_1} = U_1 \underline{Y}(s)$.
- Die Ortskurve des Ständerstromes \underline{I}_1 berechnet sich nun durch Addition des Stromes \underline{I}_0 : $\underline{I}_1 = \underline{I}_0 - \frac{\underline{I}'_2}{1 + \sigma_1} = -j\frac{U_1}{X_1} + U_1 \underline{Y}(s)$. Die Ortskurve von $U_1 \underline{Y}(s)$ wird also um den Betrag U_1/X_1 in Richtung der negativen imaginären Achse verschoben.

Der Leerlaufstrom ($s=0$) ist

$$\underline{I}_0 = -j\frac{U_1}{X_1}$$

Der auf den Stator umgerechnete Rotorstrom ist

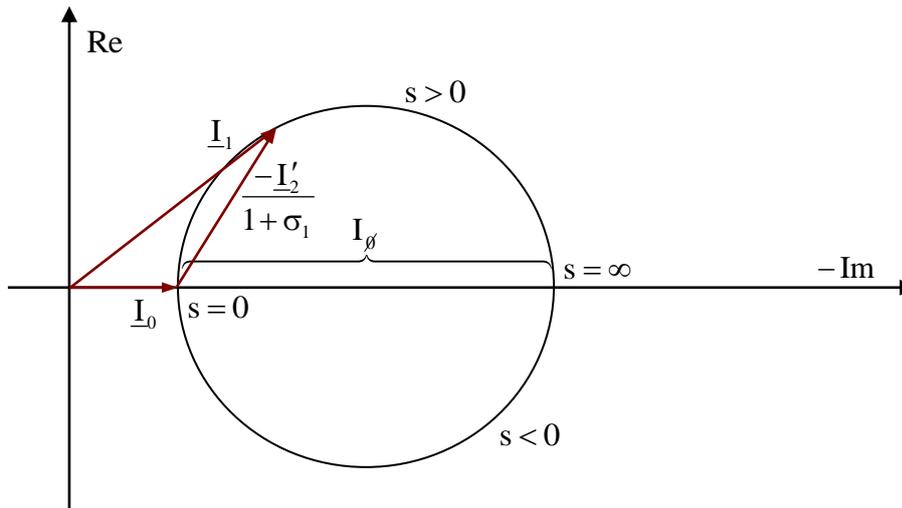
$$-\frac{\underline{I}'_2}{1 + \sigma_1} = \frac{\underline{U}_1}{\frac{R'_2}{s}(1 + \sigma_1)^2 + jX_1 \frac{\sigma}{1 - \sigma}}$$

Der Statorstrom ist

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_0 - \frac{\underline{I}'_2}{1 + \sigma_1}$$

Der Durchmesserstrom ist

$$\underline{I}_\emptyset = \frac{U_1}{X_1 \frac{\sigma}{1 - \sigma}}$$



Die Ortskurve des Ständerstromes \underline{I}_1 beschreibt also in der komplexen Ebene einen Kreis. Lage und Größe dieses Kreises sind nur durch die Hauptreaktanz X_1 und die Gesamtstreuzyiffer σ bestimmt (bei Vernachlässigung von R_1).

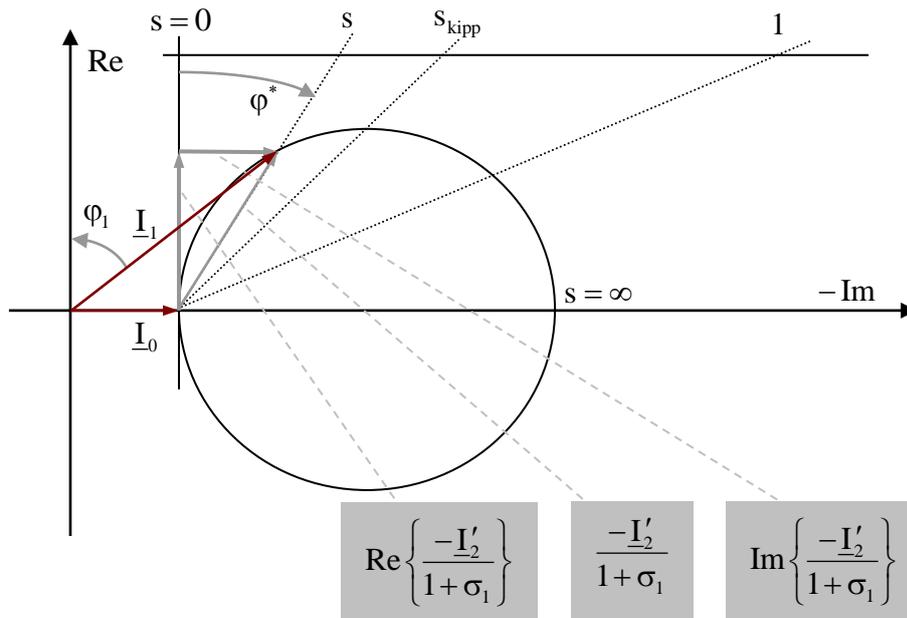
Um den Kreis zu parametrieren, wird das Verhältnis von Imaginärteil zu Realteil des auf den Ständer umgerechneten Läuferstromes $-\frac{\underline{I}'_2}{1 + \sigma_1}$ betrachtet (zur Erläuterung siehe das Bild auf der folgenden Seite):

$$\tan(\varphi^*) = \frac{\text{Im}\{\underline{I}'_2\}}{\text{Re}\{\underline{I}'_2\}} = \frac{-X_1 \frac{\sigma}{1 - \sigma}}{R_2' (1 + \sigma_1)^2} s$$

Da diese Funktion linear in s ist, kann sie (auf einfache Art) zur Parametrierung genutzt werden. Die „Schlupfgerade“ zur Parametrierung kann jede beliebige Parallele zur $-\text{Im}$ -Achse sein:

- Die Tangente an den Kreis (Orstkurve des Ständerstromes) im Punkt $\underline{I}'_2 = 0$ schneidet die Schlupfgerade im Punkt $s = 0$.
- Jede Verlängerung des Stromes $\frac{\underline{I}'_2}{1 + \sigma_1}$ schneidet die Schlupfgerade im zugehörigen

Schlupf s , weil $\tan(\varphi^*) \sim s$ ist. Um die Parametrierung festzulegen, muss also der Schlupf eines Kreispunktes bekannt sein (der Schlupf aller anderen Kreispunkte folgt dann aus der linearen Unterteilung der Schlupfgeraden).



Als Kipp-Punkt wird der Scheitelpunkt des Kreises bezeichnet; der zugehörige Schlupf-Wert heißt Kipp-Schlupf. Bei diesem Punkt entwickelt die Asynchronmaschine ihr maximales Drehmoment. In diesem Punkt sind Real- und Imaginärteil von $\frac{I'_2}{1 + \sigma_1}$ betragsmäßig gleich

groß, es gilt $\tan(\varphi^*) = -1$. Damit folgt sofort:

$$s_{\text{kipp}} = \frac{R'_2 (1 + \sigma_1)^2}{X_1 \frac{\sigma}{1 - \sigma}}$$

Und damit folgt weiter allgemein:

$$\tan(\varphi^*) = \frac{s}{s_{\text{kipp}}}$$

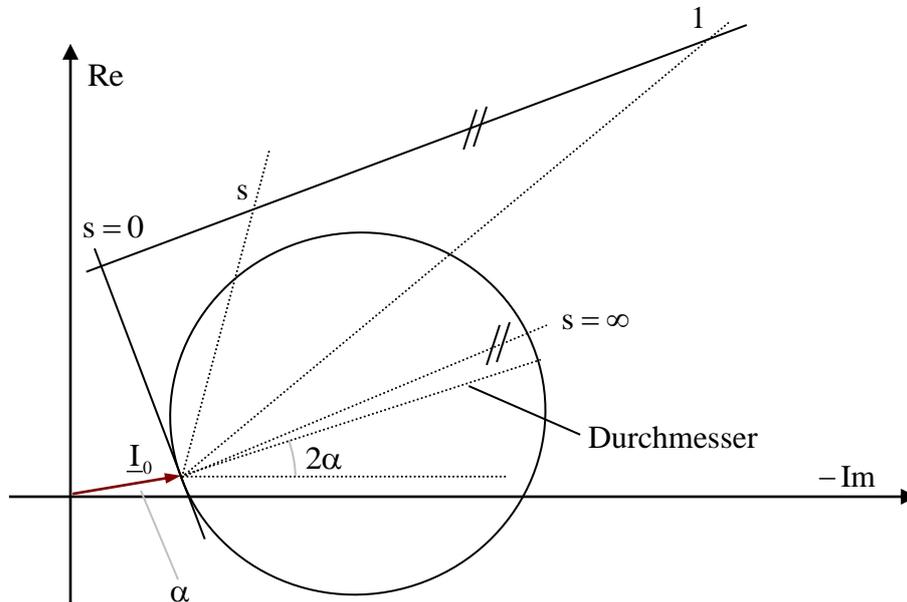
Beim Anfahren ist $s = 1$; der dann fließende Kurzschlussstrom ist $I_{1,K} \approx 5 \cdot \dots \cdot 8 I_{1,N}$. Hierbei ist $I_{1,N}$ der Statorstrom im Nennbetriebspunkt.

Wie bereits vorher gezeigt wurde, sind (bei Vernachlässigung von R_1) Lage und Größe des Ortskurvenkreises nur durch X_1 und σ bestimmt. Der obigen Formel lässt sich nun entnehmen, dass die Lage der Schlupfpunkte von R'_2 abhängt.

Folgende drei Betriebsbereiche können unterschieden werden:

- **Motorbetrieb:**
Für den Motorbetrieb gilt: $0 < s < 1$ (d.h. $n_0 > n > 0$), also befindet sich die Spitze des Statorstromzeigers im linken Teil der oberen Kreishälfte. Der Nennpunkt einer Asynchronmaschine liegt im Bereich: $0 < s_N < s_{\text{kipp}}$.
- **Bremsbetrieb:**
Für den Bremsbetrieb gilt: $s > 1$ (d.h. $n < 0$), also befindet sich die Spitze des Statorstromzeigers im rechten Teil der oberen Kreishälfte.
- **Generatorbetrieb:**
Für den Generatorbetrieb gilt: $s < 0$ (d.h. $n > n_0$), also befindet sich die Spitze des Statorstromzeigers in der unteren Kreishälfte.

Bei kleinen Asynchronmaschinen oder bei Stromrichterspeisung mit kleinen Frequenzen darf der Widerstand R_1 i.a. nicht mehr vernachlässigt werden. Der Kreis der Statorstromortskurve ändert sich dann bezüglich Lage, Durchmesser und Parametrierung. Schematisch gilt Folgendes:



Für den Winkel α gilt: $\tan(\alpha) = \frac{R_1}{X_1}$.

2. Drehmoment und Leistung:

Bei Vernachlässigung des Ständerwiderstandes R_1 ist die aufgenommene Wirkleistung der Asynchronmaschine gleich der Drehfeldleistung:

$$P_1 = 3U_1 I_1 \cos(\varphi_1) = P_D = 2\pi n_0 T$$

Bei konstanter Klemmenspannung U_1 ist also die Drehfeldleistung P_D bzw. das Drehmoment T proportional zum Statorwirkstrom $I_{1,\text{wirk}} = I_1 \cos(\varphi_1)$.

Der Statorwirkstrom $I_{1,\text{wirk}}$ eines Arbeitspunktes kann (bei Vernachlässigung des Statorwiderstandes R_1) im Kreisdiagramm als Projektion von \underline{I}_1 bzw. $\frac{\underline{I}'_2}{1 + \sigma_1}$ auf die reelle Achse ermittelt werden.

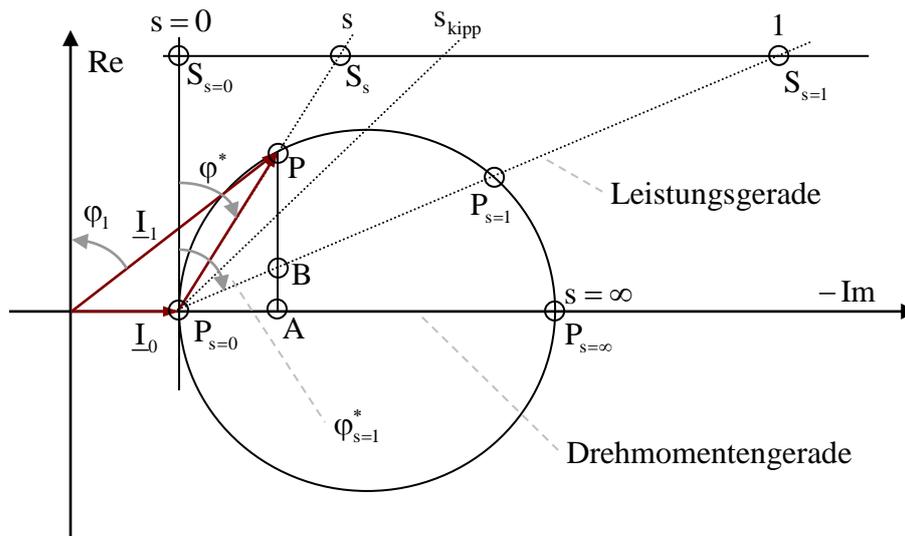
Mit Hilfe der Bezeichnungen der folgenden Grafik gilt:

$$I_{1,\text{wirk}} = C \cdot \overline{AP},$$

wobei C ein konstanter Faktor ist. Für das Drehmoment folgt dann:

$$T = \frac{1}{2\pi n_0} 3U_1 \cdot C \cdot \overline{AP}$$

Die Verbindungsgerade der Punkte $P_{s=0}$ und $P_{s=\infty}$ ($\overline{P_{s=0}P_{s=\infty}}$) heißt Drehmomentengerade.



Für die Winkel φ^* und $\varphi_{s=1}^*$ gilt Folgendes:

$$\frac{\tan(\varphi^*)}{\tan(\varphi_{s=1}^*)} = \frac{\overline{S_{s=0}S_s} / \overline{P_{s=0}S_{s=0}}}{\overline{S_{s=0}S_{s=1}} / \overline{P_{s=0}S_{s=0}}} = \frac{\overline{S_{s=0}S_s}}{\overline{S_{s=0}S_{s=1}}} = \frac{s}{1} = s$$

$$\frac{\tan(\varphi^*)}{\tan(\varphi_{s=1}^*)} = \frac{\overline{P_{s=0}A} / \overline{AP}}{\overline{P_{s=0}A} / \overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AP}}$$

Also folgt:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} = s \quad \text{und damit auch:} \quad \frac{\overline{BP}}{\overline{AP}} = 1 - s.$$

Die Strecke \overline{AP} wird also durch die sogenannte Leistungsgerade $\overline{P_{s=0}P_{s=1}}$ im Verhältnis s zu $1-s$ geteilt. Damit kann dem Kreisdiagramm direkt die Aufteilung der Drehfeldleistung (entspricht der Eingangsleistung bei Vernachlässigung des Statorwiderstandes R_1) in die verschiedenen Anteile entnommen werden:

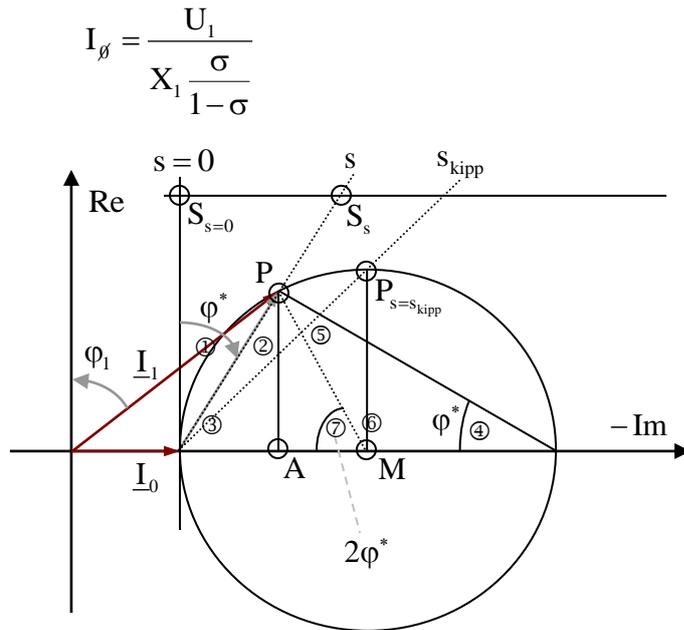
- Drehfeldleistung: $P_D = 3U_1 \cdot C \cdot \overline{AP}$
- Elektrische Leistung (Rotorverluste): $P_{el} = 3U_1 \cdot C \cdot \overline{AB}$
- Mechanische Leistung: $P_{mech} = 3U_1 \cdot C \cdot \overline{BP}$

3. Drehmoment als Funktion des Schlupfes:

Die Drehmoment-Schlupf-Charakteristik soll im Folgenden mit Hilfe des Kreisdiagramms abgeleitet werden. Folgende Beziehungen wurden bereits hergeleitet:

$$\tan(\varphi^*) = \frac{s}{s_{kipp}}$$

$$s_{kipp} = \frac{R'_2 (1 + \sigma_1)^2}{X_1 \frac{\sigma}{1 - \sigma}}$$



Herleitung der Winkelbeziehungen:

- ① Winkeldefinition: φ^*
- ② Geometrie: φ^*
- ③ Dreieck: $\pi - \pi/2 - \varphi^* = \pi/2 - \varphi^*$
- ④ Dreieck: $\pi - \pi/2 - (\pi/2 - \varphi^*) = \varphi^*$
- ⑤ gleichschenkeliges Dreieck: φ^*
- ⑥ Dreieck: $\pi - 2\varphi^*$
- ⑦ Gerade: $\pi - (\pi - 2\varphi^*) = 2\varphi^*$

Für das Drehmoment im Arbeitspunkt gilt:

$$T = \frac{3p}{\omega_1} U_1 \cdot C \cdot \overline{AP}$$

Für das Drehmoment im Kipp-Punkt gilt:

$$T_{\text{kipp}} = \frac{3p}{\omega_1} U_1 \cdot C \cdot \overline{MP_{s=s_{\text{kipp}}}}$$

Also folgt:

$$\begin{aligned} \frac{T}{T_{\text{kipp}}} &= \frac{\overline{AP}}{\overline{MP_{s=s_{\text{kipp}}}}} = \frac{\sin(2\varphi^*) \cdot \frac{1}{2} I_{\vartheta}}{\frac{1}{2} I_{\vartheta}} = \sin(2\varphi^*) \\ &= 2 \sin(\varphi^*) \cos(\varphi^*) = 2 \frac{\sin(\varphi^*)}{\cos(\varphi^*)} \cos^2(\varphi^*) = 2 \tan(\varphi^*) \frac{1}{1 + \tan^2(\varphi^*)} \\ &= \frac{2}{\tan(\varphi^*) + \frac{1}{\tan(\varphi^*)}} \end{aligned}$$

Hieraus folgt dann direkt die Kloss'sche Formel:

$$\frac{T}{T_{\text{kipp}}} = \frac{2}{\frac{s}{s_{\text{kipp}}} + \frac{s_{\text{kipp}}}{s}}$$

Das Kippmoment berechnet sich zu:

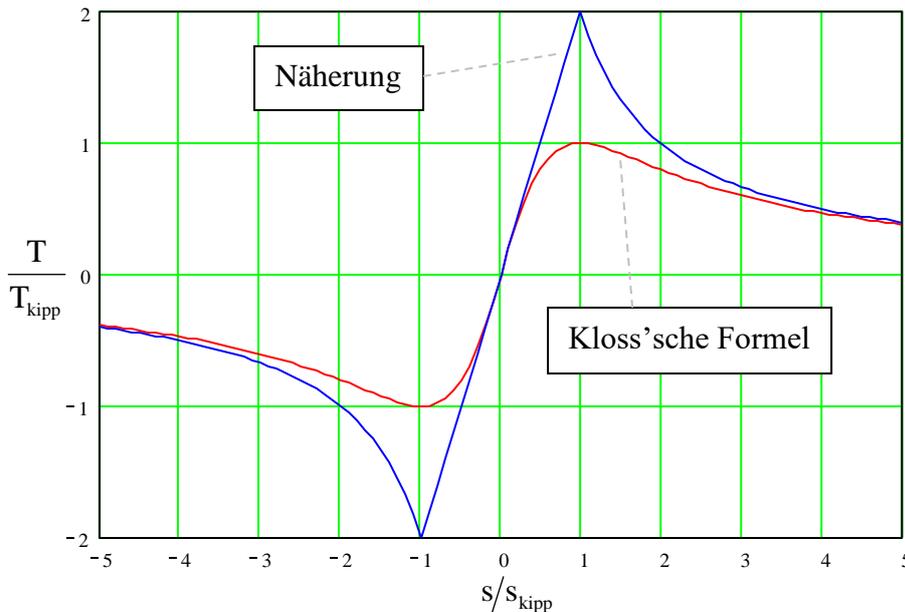
$$T_{\text{kipp}} = \frac{3p}{\omega_1} U_1 I_{1,\text{wirk,kipp}} = \frac{3p}{\omega_1} U_1 \frac{I_{\vartheta}}{2} = \frac{3p}{\omega_1} U_1 \frac{U_1}{2X_1 \frac{\sigma}{1-\sigma}} = \frac{3p}{2\omega_1} \frac{U_1^2}{X_1 \frac{\sigma}{1-\sigma}}$$

Das Kippmoment wird also durch die Gesamtstreuiziffer bestimmt (hohes Moment für geringe Streuung).

Als Näherung kann der Verlauf der Kippmoment-Schlupf-Charakteristik in die beiden folgenden Bereiche eingeteilt werden:

- $s \ll s_{\text{kipp}}$: $\frac{T}{T_{\text{kipp}}} = \frac{2s}{s_{\text{kipp}}}$
- $s \gg s_{\text{kipp}}$: $\frac{T}{T_{\text{kipp}}} = \frac{2s_{\text{kipp}}}{s}$

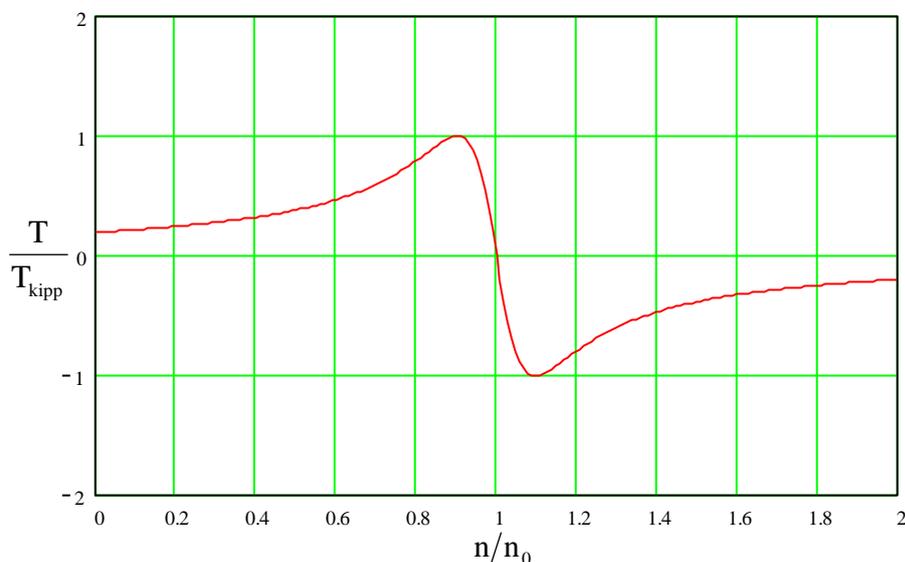
Das folgende Bild zeigt die Auswertung der Kloss'schen Formel sowie die Näherung:



Die Kloss'sche Formel und das Kippmoment sind unabhängig vom Rotorwiderstand. Lediglich der Absolutwert des Kipp-Schlupfes s_{kipp} wird vom Rotorwiderstand beeinflusst.

Der stabile Arbeitsbereich der Asynchronmaschine ist: $-1 < s/s_{\text{kipp}} < 1$.

Im Bild unten ist für $s_{\text{kipp}} = 0,1$ die Darstellung T/T_{kipp} als Funktion von n/n_0 gezeigt:



4. Vorwiderstände im Läuferkreis:

Bei Schleifringläufermaschinen kann man zusätzliche Vorwiderstände in den Läuferkreis einschalten. Hierbei bleibt die Ortskurve des Statorstromes erhalten (sie war ja unabhängig vom Rotorwiderstand). Es ändert sich allerdings die Parametrierung.

Rechnet man auch den Vorwiderstand auf die Statorseite um, so erhält man:

$$R'_V = R_V \frac{m_1 (w_1 \xi_1)^2}{m_2 (w_2 \xi_2)^2}$$

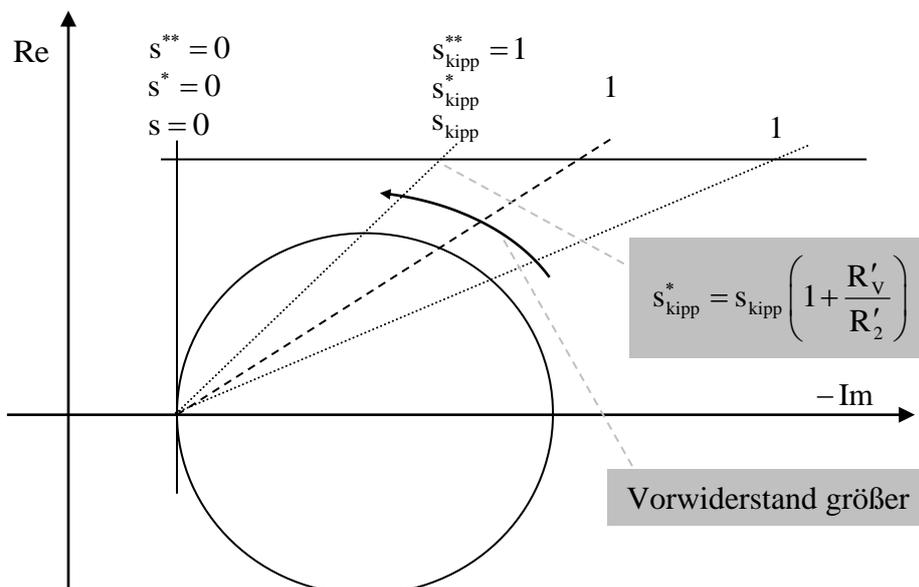
Es wird genau dann der gleiche Kreispunkt beschrieben, wenn für die neue Parametrierung mit s^* gilt:

$$\frac{R'_2 + R'_V}{s^*} = \frac{R'_2}{s}$$

$$\Rightarrow s^* = s \left(1 + \frac{R'_V}{R'_2} \right)$$

Analog hierzu ändert sich auch der Kipp-Schlupf:

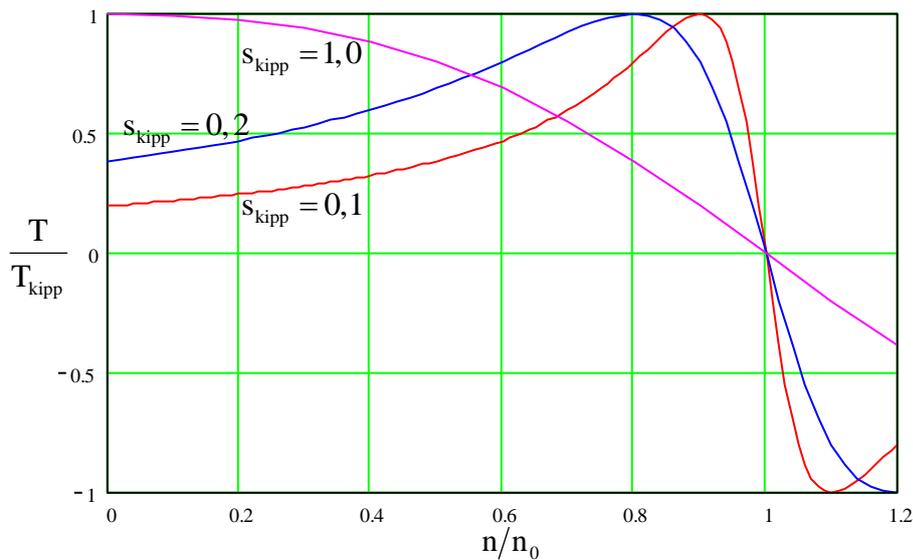
$$s_{\text{kipp}}^* = s_{\text{kipp}} \left(1 + \frac{R'_V}{R'_2} \right)$$



Beim Einschalten von Vorwiderständen in den Läuferkreis bleibt das Kippmoment in seiner Größe erhalten; der Anfahrpunkt wird jedoch in Richtung des Kippmomentes verschoben. Man kann sogar mit dem Kippmoment anfahren ($s_{\text{kipp}}^{**} = 1$). Gleichzeitig wird der Anfahrstrom verringert. Man erkaufte sich diese Vorteile allerdings mit erhöhten Rotorverlusten.

Außerdem ist mit den Vorwiderständen eine Drehzahlstellung unter Last möglich, die aber verlustbehaftet ist und deshalb nur selten angewandt wird.

Im folgenden Bild ist für $s_{\text{kipp}} = 0,1; 0,2$ und $1,0$ die Darstellung T/T_{kipp} als Funktion von n/n_0 gezeigt:



5. Betrieb mit optimalem Leistungsfaktor:

Im Leerlauf wird die Asynchronmaschine mit reinem Blindstrom \underline{I}_0 betrieben. Dies entspricht der für den Betrieb der Asynchronmaschine notwendigen Magnetisierungsblindleistung, die vom Netz bezogen wird. Es gilt:

$$\underline{I}_0 = \frac{U_1}{jX_1} = -j \frac{U_1}{\omega_1 (1 + \sigma_1) \frac{3}{2} \mu_0 \left(\frac{w_1 \xi_1}{p} \right)^2 \frac{4}{\pi} \frac{\ell r}{\delta}} \sim \delta$$

Um den Leerlaufstrom möglichst klein zu halten, sollte der Luftspalt möglichst klein gewählt werden. Dies hat jedoch technische Grenzen (Wellendurchbiegung, Lagertoleranz) und ökonomische Grenzen (Genauigkeit der Fertigung). In der Praxis erreicht man

$$\frac{I_0}{I_N} \approx 0,2 (\text{niederpolig}) \dots 0,5 (\text{hochpolig})$$

Das maximal erreichbare Drehmoment der Asynchronmaschine (Kippmoment) wird durch den Durchmesser des Ortskurvenkreises des Ständerstromes bestimmt. Deshalb sollte der Strom $I_\infty = I_0 + I_\emptyset$ möglichst groß sein. Es gilt:

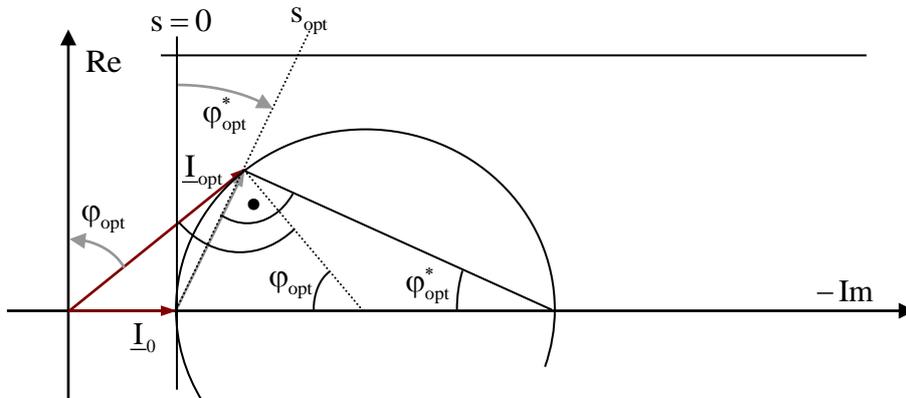
$$\frac{I_\infty}{I_N} = \frac{I_0 + I_\emptyset}{I_N} = \frac{\frac{U_1}{X_1} + \frac{U_1}{X_1 \frac{\sigma}{1-\sigma}}}{I_N} = \frac{U_1}{\sigma X_1 I_N} = \frac{1}{\sigma} \frac{I_0}{I_N}$$

Praktisch erreichbare Werte für die Gesamtstreuiziffer sind: $\sigma \approx 0,03 \dots 0,1$. Daraus ergibt sich für das Verhältnis der Ströme:

$$\frac{I_\infty}{I_N} = 5 \dots 7$$

Der Nennbetriebspunkt der Asynchronmaschine wird häufig so gewählt, dass der Leistungsfaktor $\cos(\varphi)$ möglichst groß wird (dann ist die Blindstrombelastung des Netzes

möglichst klein). Der Arbeitspunkt mit dem größten $\cos(\varphi)$ wird Optimalpunkt genannt. Man erhält ihn als Tangente des Ständerstromes an den Ortskurvenkreis:



Wird der Nennbetriebspunkt in den Optimalpunkt gelegt, so gelten folgende Beziehungen:

$$\varphi_{\text{opt}} = 2\varphi_{\text{opt}}^*, \quad I_{\infty} = I_0 + I_{\text{Ø}}$$

$$\cos(\varphi_{\text{opt}}) = \frac{\frac{1}{2}I_{\text{Ø}}}{\frac{1}{2}I_{\text{Ø}} + I_0} = \frac{\frac{1}{2}(I_{\infty} - I_0)}{\frac{1}{2}(I_{\infty} + I_0)} = \frac{(I_{\infty} - I_0)/I_N}{(I_{\infty} + I_0)/I_N} = \frac{\frac{1}{\sigma} \frac{I_0}{I_N} - \frac{I_0}{I_N}}{\frac{1}{\sigma} \frac{I_0}{I_N} + \frac{I_0}{I_N}} = \frac{1 - \sigma}{1 + \sigma}$$

In der Praxis erreichbar ist: $\cos(\varphi_{\text{opt}}) \approx 0,8 \dots 0,9$.

$$I_{\text{opt}} = \left(I_0 + \frac{1}{2}I_{\text{Ø}} \right) \sin(\varphi_{\text{opt}}) = \frac{1}{2}(I_0 + I_{\infty}) \sqrt{1 - \cos^2(\varphi_{\text{opt}})}$$

$$= \frac{1}{2} \left(I_0 + \frac{1}{\sigma} I_0 \right) \sqrt{1 - \left(\frac{1 - \sigma}{1 + \sigma} \right)^2} = \frac{I_0}{2} \frac{\sigma + 1}{\sigma} \sqrt{\left(\frac{1 + \sigma}{1 + \sigma} \right)^2 - \left(\frac{1 - \sigma}{1 + \sigma} \right)^2}$$

$$= \frac{I_0}{2\sigma} \sqrt{(1 + \sigma)^2 - (1 - \sigma)^2} = \frac{I_0}{2\sigma} \sqrt{4\sigma}$$

$$= \frac{I_0}{\sqrt{\sigma}}$$

Für den Schlupf im Optimalpunkt gilt:

$$\tan(\varphi_{\text{opt}}^*) = \frac{s_{\text{opt}}}{s_{\text{kipp}}}$$

$$\Rightarrow s_{\text{opt}} = s_{\text{kipp}} \tan\left(\frac{\varphi_{\text{opt}}}{2}\right) = s_{\text{kipp}} \sqrt{\frac{1 - \cos(\varphi_{\text{opt}})}{1 + \cos(\varphi_{\text{opt}})}}$$

$$= s_{\text{kipp}} \sqrt{\frac{1 - \frac{1 - \sigma}{1 + \sigma}}{1 + \frac{1 - \sigma}{1 + \sigma}}} = s_{\text{kipp}} \sqrt{\frac{(1 + \sigma) - (1 - \sigma)}{(1 + \sigma) + (1 - \sigma)}} = s_{\text{kipp}} \sqrt{\sigma}$$

In der Praxis liegt der Kipp-Schlupf bei $s_{\text{kipp}} \approx 0,05 \dots 0,2$ und der Nenn-Schlupf bei $s_N \approx 0,01 \dots 0,05$.

Für das Verhältnis der Drehmomente im Kipp-Punkt und im Optimalpunkt gilt:

$$\frac{T_{\text{kipp}}}{T_{\text{opt}}} = \frac{\frac{s_{\text{kipp}} + s_{\text{opt}}}{s_{\text{opt}} s_{\text{kipp}}}}{2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{\sigma}} + \sqrt{\sigma}}{2} = \frac{1 + \sigma}{2\sqrt{\sigma}}$$

Mit den oben angegebenen Werten für die Gesamtstreuiziffer folgt für die Überlastfähigkeit:
 $T_{\text{kipp}}/T_{\text{opt}} \approx 1,7 \dots 3,0$.

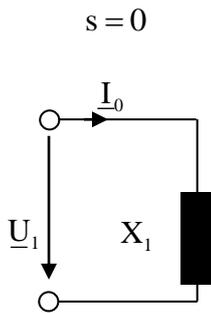
Bisher wurden die Statorkupferverluste, die Eisenverluste und die Reibungsverluste vernachlässigt; nur die Rotorkupferverluste wurden berücksichtigt. Dann gilt für den Wirkungsgrad:

$$\eta = \frac{P_{\text{mech}}}{P_1} = \frac{P_{\text{mech}}}{P_D} = 1 - s$$

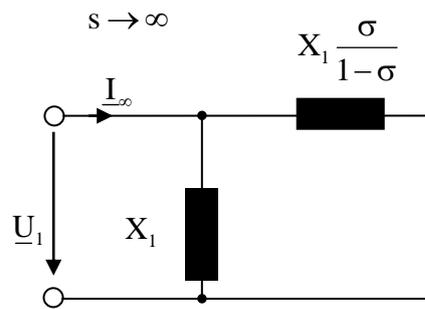
Für den Optimalpunkt erhält man:

$$\eta_{\text{opt}} = 1 - s_{\text{opt}} = 1 - s_{\text{kipp}} \sqrt{\sigma}$$

Für $s = 0$ bzw. $s \rightarrow \infty$ erhält man die folgenden Ersatzschaltbilder:



$$I_0 = \frac{U_1}{X_1}$$



$$I_{\infty} = U_1 \left(\frac{X_1 \cdot X_1 \frac{\sigma}{1-\sigma}}{X_1 + X_1 \frac{\sigma}{1-\sigma}} \right)^{-1} = U_1 \left(\frac{X_1}{\frac{1-\sigma}{\sigma} + 1} \right)^{-1}$$

$$= U_1 (\sigma X_1)^{-1} = \frac{U_1}{\sigma X_1}$$

Nun gilt weiter:

$$\sigma X_1 = \left(1 - \frac{1}{(1 + \sigma_1)(1 + \sigma_2)} \right) (1 + \sigma_1) X_{1h}$$

$$= \left((1 + \sigma_1) - \frac{1}{(1 + \sigma_2)} \right) X_{1h}$$

$$\approx ((1 + \sigma_1) - (1 - \sigma_2)) X_{1h} = (\sigma_1 + \sigma_2) X_{1h} = X_{1\sigma} + X'_{2\sigma}$$

Also folgt:

$$I_{\infty} \approx \frac{U_1}{X_{1\sigma} + X'_{2\sigma}}$$

Anmerkung: Für die Gesamtstreuiziffer gilt:

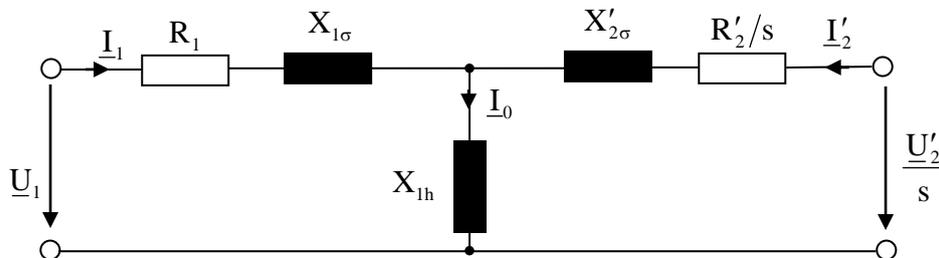
$$\begin{aligned} \sigma &= 1 - \frac{1}{(1 + \sigma_1)(1 + \sigma_2)} \\ &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_1\sigma_2}{1 + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_1\sigma_2} \\ &\approx \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{1 + \sigma_1 + \sigma_2} \approx \sigma_1 + \sigma_2 \end{aligned}$$

Änderungen der Maschinenparameter haben also den folgenden Einfluss auf die Ortskurve des Statorstromes und damit auf das Betriebsverhalten:

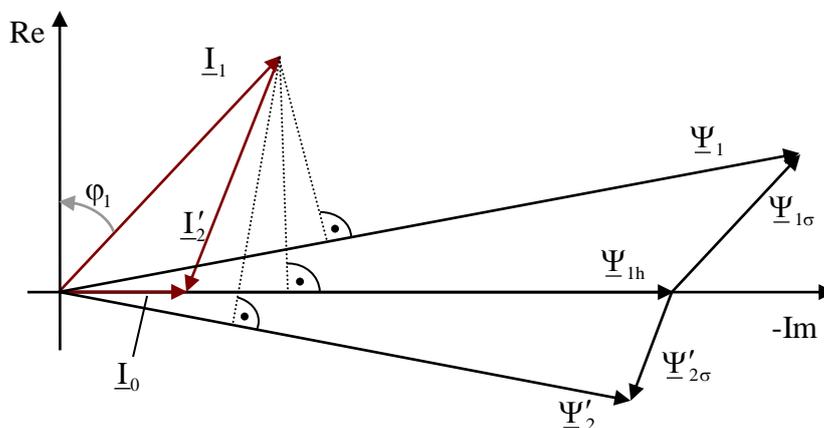
- Durch einen größeren Luftspalt wird die Hauptreaktanz X_1 kleiner. Dies bedeutet, dass der Magnetisierungsstrom I_0 größer wird.
- Durch Verringerung der Streureaktanz (z.B. Verkleinerung von $X'_{2\sigma}$ durch Stromverdrängung) wird der Strom I_∞ größer. Hierdurch steigen also das Kippmoment und der Anfahrstrom.
- Vergrößerung des Rotorwiderstandes R'_2 (z.B. durch Stromverdrängung). Hierdurch ändert sich die Parametrierung der Schlupfgeraden. Man kann dann mit höherem Moment und geringerem Strom anfahren, erkauft sich dies aber durch höhere (Rotor-) Verluste.

6. Weitere Formulierungen zur Berechnung des Drehmomentes:

Im Folgenden wird das Ersatzschaltbild mit ständer- und läuferseitiger Streureaktanz benutzt:



Hierzu gehört folgendes Zeigerbild (falls $R_1 = 0$ ist):



Aus der Drehfeldtheorie folgt:

$$T = 3\ell r w_1 \xi_1 \sqrt{2} I_1 B \cos(\varphi_1)$$

$$= \frac{3}{2} p \Psi_{1h} \sqrt{2} I_1 \cos(\varphi_1) = \frac{3}{2} p \Psi_{1h} \sqrt{2} I_1 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right)$$

Mit $\hat{\underline{I}}_1 = \sqrt{2} \cdot I_1 \cdot e^{-j\varphi_1}$ und $\underline{\Psi}_{1h} = \Psi_{1h} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}$ folgt:

$$\underline{\Psi}_{1h} \times \hat{\underline{I}}_1 = \Psi_{1h} \sqrt{2} I_1 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right)$$

und damit:

- $T = \frac{3}{2} p (\underline{\Psi}_{1h} \times \hat{\underline{I}}_1)$ Hauptfluss und Statorstrom
- Mit $\underline{\Psi}_1 = L_{1\sigma} \hat{\underline{I}}_1 + \underline{\Psi}_{1h}$ gilt: $\underline{\Psi}_{1h} \times \hat{\underline{I}}_1 = \underline{\Psi}_1 \times \hat{\underline{I}}_1$ und damit:
 $T = \frac{3}{2} p (\underline{\Psi}_1 \times \hat{\underline{I}}_1)$ Statorfluss und Statorstrom
- Mit $\underline{\Psi}_{1h} = L_{1h} (\hat{\underline{I}}_1 + \hat{\underline{I}}_2')$ gilt: $\underline{\Psi}_{1h} \times \hat{\underline{I}}_1 = L_{1h} \hat{\underline{I}}_2' \times \hat{\underline{I}}_1$ und damit:
 $T = \frac{3}{2} p L_{1h} (\hat{\underline{I}}_2' \times \hat{\underline{I}}_1)$ Rotorstrom und Statorstrom
- Mit $\underline{\Psi}_2' = L_2' \hat{\underline{I}}_2' + L_{1h} \hat{\underline{I}}_1$ gilt: $\underline{\Psi}_2' \times \hat{\underline{I}}_1 = L_2' \hat{\underline{I}}_2' \times \hat{\underline{I}}_1$ und damit:
 $T = \frac{3}{2} p \frac{L_{1h}}{L_2'} (\underline{\Psi}_2' \times \hat{\underline{I}}_1)$ Rotorfluss und Statorstrom
- Mit $\underline{\Psi}_1 = L_1 \hat{\underline{I}}_1 + L_{1h} \hat{\underline{I}}_2'$ gilt: $\underline{\Psi}_1 \times \hat{\underline{I}}_2' = L_1 \hat{\underline{I}}_1 \times \hat{\underline{I}}_2'$ und damit:
 $T = -\frac{3}{2} p \frac{L_{1h}}{L_1} (\underline{\Psi}_1 \times \hat{\underline{I}}_2')$ Statorfluss und Rotorstrom
- Mit $L_{1h} (\hat{\underline{I}}_1 \times \hat{\underline{I}}_2') = L_{1h} ((\hat{\underline{I}}_1 + \hat{\underline{I}}_2') \times \hat{\underline{I}}_2') = \underline{\Psi}_{1h} \times \hat{\underline{I}}_2'$ gilt:
 $T = -\frac{3}{2} p (\underline{\Psi}_{1h} \times \hat{\underline{I}}_2')$ Hauptfluss und Rotorstrom
- Mit $\underline{\Psi}_{1h} = \underline{\Psi}_2' - L_{2\sigma}' \hat{\underline{I}}_2'$ gilt: $\underline{\Psi}_{1h} \times \hat{\underline{I}}_2' = \underline{\Psi}_2' \times \hat{\underline{I}}_2'$ und damit:
 $T = -\frac{3}{2} p (\underline{\Psi}_2' \times \hat{\underline{I}}_2')$ Rotorfluss und Rotorstrom
- Mit $\underline{\Psi}_2' = L_2' \hat{\underline{I}}_2'$ gilt:
 $T = -\frac{3}{2} p \frac{L_{1h}}{L_1 L_2'} (\underline{\Psi}_1 \times \underline{\Psi}_2')$ Statorfluss und Rotorfluss

Mit $A \times B = -B \times A$ können weitere Formulierungen abgeleitet werden.

Die obigen Gleichungen gelten für Speisung des Motors mit sinusförmigen Spannungen und Strömen (die Großbuchstaben symbolisieren Effektiv- bzw. Spitzenwerte, je nachdem, ob elektrische oder magnetische Größen bezeichnet werden). Die Berechnung des Drehmomentes für beliebige Zeitabhängigkeiten der speisenden Spannungen und Ströme erfolgt in einer späteren Vorlesung. Bei beliebigen Zeitabhängigkeiten können dann auch dynamische Vorgänge berechnet werden; auch das Drehmoment ist dann (im Gegensatz zum hier behandelten stationären Betrieb) zeitabhängig.

4.4 Käfigläufer

Der Käfigläufer (Kurzschlussläufer) einer Asynchronmaschine besteht in der einfachsten Form aus einem Blechpaket-Rotor, in dessen Nuten je ein (Kupfer-) Stab eingebettet ist; diese Stäbe werden an den Stirnseiten mit zwei (Kupfer-) Kurzschlussringen verbunden. Bei Maschinen kleinerer Leistung werden die Nuten auch mittels Aluminium-Druckguss gefüllt und die Endringe im gleichen Arbeitsgang gefertigt.

Die Asynchronmaschine mit Käfigläufer ist die am häufigsten verwendete elektrische Maschine. Sie ist einfach, robust und preiswert.

Bei N_2 Rotornuten kann man die Käfigwicklung als eine mehrsträngige Wicklung mit N_2 Strängen auffassen. Hierbei wird dann jeder Strang aus einem Stab gebildet (bzw.: je zwei benachbarte Stäbe bilden, jeder zu Hälfte, zusammen mit den beiden verbindenden Endringstücken, die Windung eines Stranges). Die Windungszahl beträgt dann:

$$w_2 = \frac{N_2 z_N}{2 m_2 a} = \frac{1}{2} \quad (z_N = 1, \quad a = 1)$$

Die Grundwelle besitzt den Wicklungsfaktor:

$$\xi_{2,1} = 1.$$

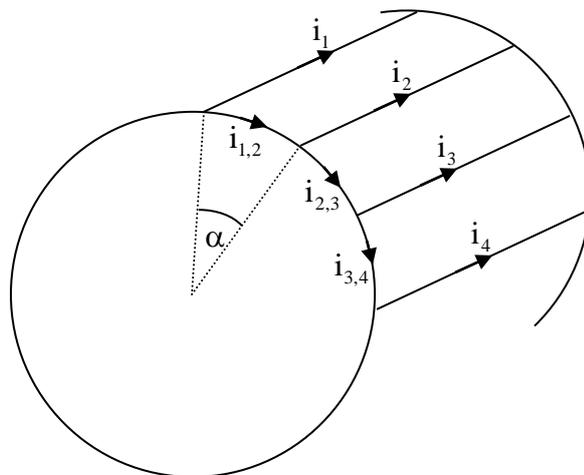
Der Käfigläufer hat keine durch die Wicklung bestimmte Polzahl; er nimmt aufgrund der Induktionswirkung die Polzahl des Stators an.

Die Grundwelle der Rotordurchflutung ist (analog zur Drehstromwicklung):

$$\begin{aligned} \Theta_{2,1} &= \frac{m_2}{2} \frac{w_2 \xi_{2,1}}{p} \frac{4}{\pi} \sqrt{2} I_2 = \frac{N_2}{2} \frac{4}{\pi} \frac{1}{2} \sqrt{2} I_{\text{Stab}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{N_2}{p} I_{\text{Stab}} \end{aligned}$$

Hierbei ist $I_2 = I_{\text{Stab}}$ der Strom eines Rotorstabes.

Nun soll der Zusammenhang zwischen Stab- und Ringströmen ermittelt werden. Das folgende Bild erläutert die Bezeichnungsweise:



Es gilt:

$$\beta = p\alpha = \frac{p \cdot 2\pi}{N_2}$$

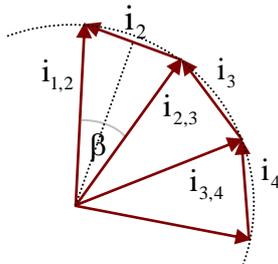
Aus

$$\sum_{k=1}^{N_2} \mathbf{i}_k = 0 \quad (\text{es existieren im Rotor keine Stromquellen})$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_{k-1,k} &= \mathbf{i}_k + \mathbf{i}_{k,k+1} \\ \Rightarrow \mathbf{i}_k + \mathbf{i}_{k,k+1} - \mathbf{i}_{k-1,k} &= 0 \end{aligned}$$

kann das folgende Zeigerbild entwickelt werden:



Die Phasenverschiebung zweier benachbarter Stabströme ist gleich der Phasenverschiebung zweier benachbarter Ringströme. Es folgt:

$$I_{\text{Ring}} = \frac{\frac{1}{2} I_{\text{Stab}}}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)} = \frac{I_{\text{Stab}}}{2 \sin\left(\frac{p\pi}{N_2}\right)}$$

Der Querschnitt des Kurzschlussringes muss also entsprechend größer dimensioniert werden als der Querschnitt eines Stabes (da i.a. gleiche Stromdichten erreicht werden sollen).

Das Spannungsübersetzungsverhältnis ist (vgl. Kap. 4.1):

$$\dot{u}_U = \frac{U'_2}{U_{\text{Stab}}} = \frac{w_1 \xi_1}{w_2 \xi_2} = \frac{w_1 \xi_1}{\frac{1}{2} \cdot 1} = 2w_1 \xi_1$$

Das Stromübersetzungsverhältnis ist (vgl. Kap. 4.1):

$$\dot{u}_I = \frac{I'_2}{I_{\text{Stab}}} = \frac{m_2}{m_1} \frac{w_2 \xi_2}{w_1 \xi_1} = \frac{N_2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1}{3w_1 \xi_1} = \frac{N_2}{6w_1 \xi_1}$$

Der Rotorwiderstand wird aus Stabwiderstand und anteiligem Ringwiderstand gebildet. Grundlage für die Umrechnung des Rotorwiderstandes auf den Stator ist die Gleichheit der Verluste:

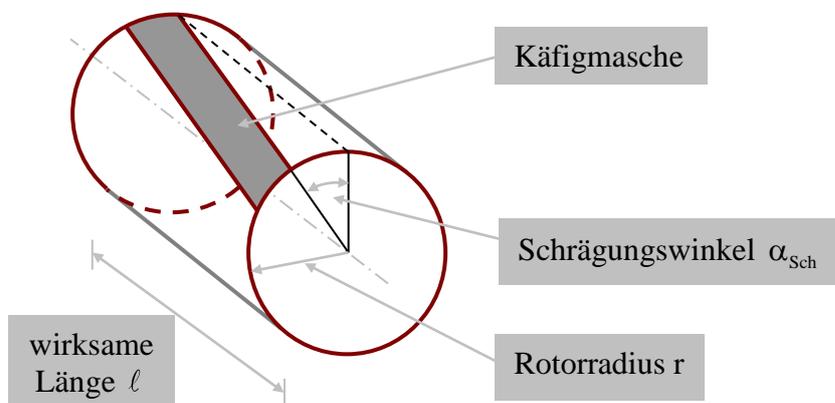
$$\begin{aligned} m_1 I_2'^2 R_2' &= m_2 I_2^2 R_2 \\ &= N_2 I_{\text{Stab}}^2 R_{\text{Stab}} + 2N_2 I_{\text{Ring}}^2 R_{\text{Ring}} \\ &= N_2 I_{\text{Stab}}^2 R_{\text{Stab}} + 2N_2 R_{\text{Ring}} \left(\frac{I_{\text{Stab}}}{2 \sin(p\pi/N_2)} \right)^2 \end{aligned}$$

Weiter folgt:

$$\begin{aligned}
 R'_2 &= \frac{N_2 I_{\text{Stab}}^2}{m_1 I_2'^2} \left(R_{\text{Stab}} + 2R_{\text{Ring}} \frac{1}{4 \sin^2(p\pi/N_2)} \right) \\
 &= \frac{N_2}{m_1 I_2'^2} \left(\frac{2m_1 w_1 \xi_1}{N_2} I_2' \right)^2 \left(R_{\text{Stab}} + R_{\text{Ring}} \frac{1}{2 \sin^2(p\pi/N_2)} \right) \\
 &= \frac{4m_1 (w_1 \xi_1)^2}{N_2} \left(R_{\text{Stab}} + R_{\text{Ring}} \frac{1}{2 \sin^2(p\pi/N_2)} \right) \\
 &= \frac{12(w_1 \xi_1)^2}{N_2} \left(R_{\text{Stab}} + R_{\text{Ring}} \frac{1}{2 \sin^2(p\pi/N_2)} \right) \\
 &= \ddot{u}_R R_2, \quad R_2 = R_{\text{Stab}} + R_{\text{Ring}} \frac{1}{2 \sin^2(p\pi/N_2)}
 \end{aligned}$$

Geschrägte Rotornuten

Außer der Grundwelle treten im Luftspalt auch Oberwellen der Induktionsverteilung auf, z.B. in Folge der Wicklungsverteilung und der Nutung. Die Oberwellen werden meist als „Streufelder“ aufgefasst (Luftspaltstreuung, Oberwellenstreuung, doppeltverkettete Streuung). In einer Käfigwicklung können sie jedoch wie das Grundfeld Spannungen induzieren und entsprechende Ströme, Verluste und (störende) Drehmomente hervorrufen. Durch eine Schrägung der Käfigstäbe lässt sich die Wirkung der Oberwellen abmildern. Das folgende Bild zeigt schematisch einen Rotor mit geschrägten Stäben:

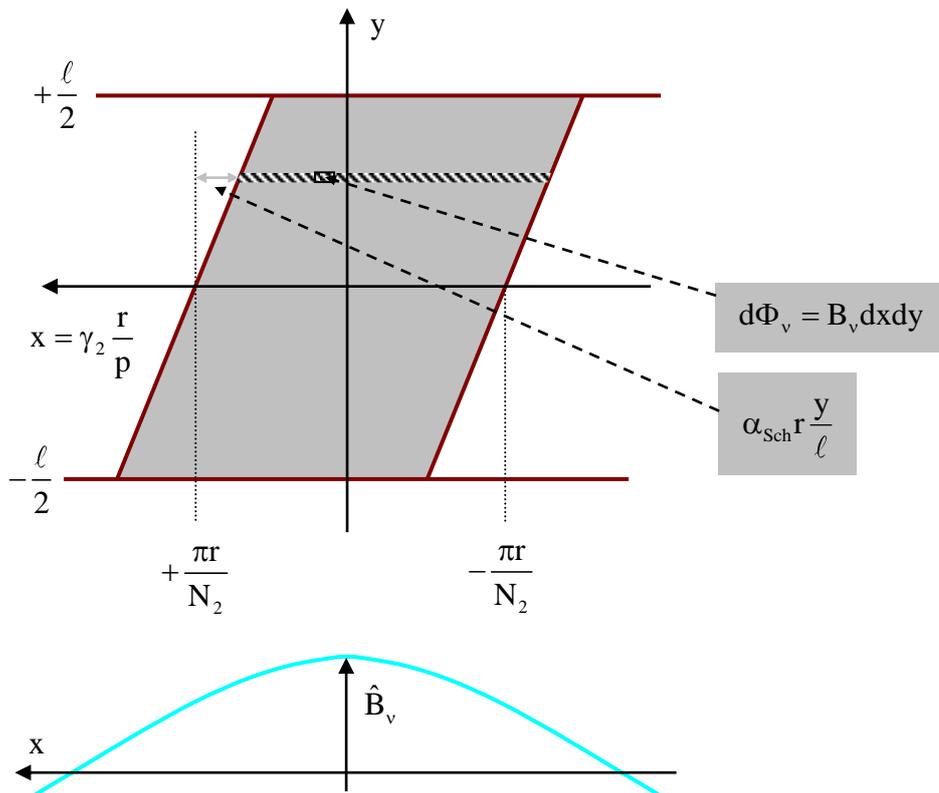


Die Ordnungszahlen der von einer symmetrischen Mehrphasenwicklung erzeugten Drehfelder sind (siehe Kapitel Drehfeldtheorie):

$$\begin{aligned}
 v &= 2m_1 g + 1 \\
 &= 6g + 1, \quad g = 0, \pm 1, \pm 2, \dots
 \end{aligned}$$

Für $g = 0$, d.h. $v = 1$, bildet sich die Grundwelle aus.

Betrachtet man die geschrägte Käfigmasche in der Abwicklung (x-Koordinate: Umfangsrichtung; y-Koordinate: axiale Richtung), so ergibt sich:



Für die Grund- und Oberwellen des Luftspaltfeldes gilt (zur besseren Unterscheidung wird hier die Amplitude der magnetischen Flussdichte mit einem „^“ gekennzeichnet):

$$B_v = \hat{B}_v \cos(v\gamma_2)$$

Damit ergibt sich für den Fluss in der (geschrägten) Käfigmaschine:

$$\begin{aligned} \Phi_v &= \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \int_{-\frac{\pi r}{N_2} - \alpha_{Sch} r \frac{y}{\ell}}^{+\frac{\pi r}{N_2} - \alpha_{Sch} r \frac{y}{\ell}} B_v dx dy \\ &= \hat{B}_v \frac{r}{p} \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \int_{-\frac{p\pi}{N_2} - \alpha_{Sch} p \frac{y}{\ell}}^{+\frac{p\pi}{N_2} - \alpha_{Sch} p \frac{y}{\ell}} \cos(v\gamma_2) d\gamma_2 dy \end{aligned}$$

Löst man zunächst das innere Integral auf, so ergibt sich:

$$\Phi_v = \hat{B}_v \frac{r}{p} \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \left[\frac{1}{v} \sin(v\gamma_2) \right]_{\gamma_2 = -\frac{p\pi}{N_2} - \alpha_{Sch} p \frac{y}{\ell}}^{\gamma_2 = +\frac{p\pi}{N_2} - \alpha_{Sch} p \frac{y}{\ell}} dy$$

und weiter:

$$\begin{aligned}\Phi_v &= \hat{B}_v \frac{r}{p} \frac{1}{v} \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \left[\sin \left(+ \frac{vp\pi}{N_2} - v\alpha_{\text{Sch}} p \frac{y}{\ell} \right) - \sin \left(- \frac{vp\pi}{N_2} - v\alpha_{\text{Sch}} p \frac{y}{\ell} \right) \right] dy \\ &= \hat{B}_v \frac{2r}{vp} \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \left[\cos \left(-v\alpha_{\text{Sch}} p \frac{y}{\ell} \right) \sin \left(\frac{vp\pi}{N_2} \right) \right] dy \\ &= \hat{B}_v \frac{2r}{vp} \sin \left(\frac{vp\pi}{N_2} \right) \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \cos \left(-v\alpha_{\text{Sch}} p \frac{y}{\ell} \right) dy\end{aligned}$$

Löst man nun noch das verbleibende Integral auf, so folgt:

$$\begin{aligned}\Phi_v &= \hat{B}_v \frac{2r}{vp} \sin \left(\frac{vp\pi}{N_2} \right) \frac{-\ell}{vp\alpha_{\text{Sch}}} \sin \left(-vp\alpha_{\text{Sch}} \frac{y}{\ell} \right) \Bigg|_{y=-\frac{\ell}{2}}^{y=\frac{\ell}{2}} \\ &= \hat{B}_v \frac{2r\ell}{vp} \sin \left(\frac{vp\pi}{N_2} \right) \frac{\sin \left(\frac{vp\alpha_{\text{Sch}}}{2} \right) - \sin \left(\frac{-vp\alpha_{\text{Sch}}}{2} \right)}{vp\alpha_{\text{Sch}}} \\ &= \hat{B}_v \frac{2r\ell}{vp} \sin \left(\frac{vp\pi}{N_2} \right) \frac{2 \cos(0) \sin \left(\frac{vp\alpha_{\text{Sch}}}{2} \right)}{vp\alpha_{\text{Sch}}}\end{aligned}$$

Eine Umformung ergibt nun:

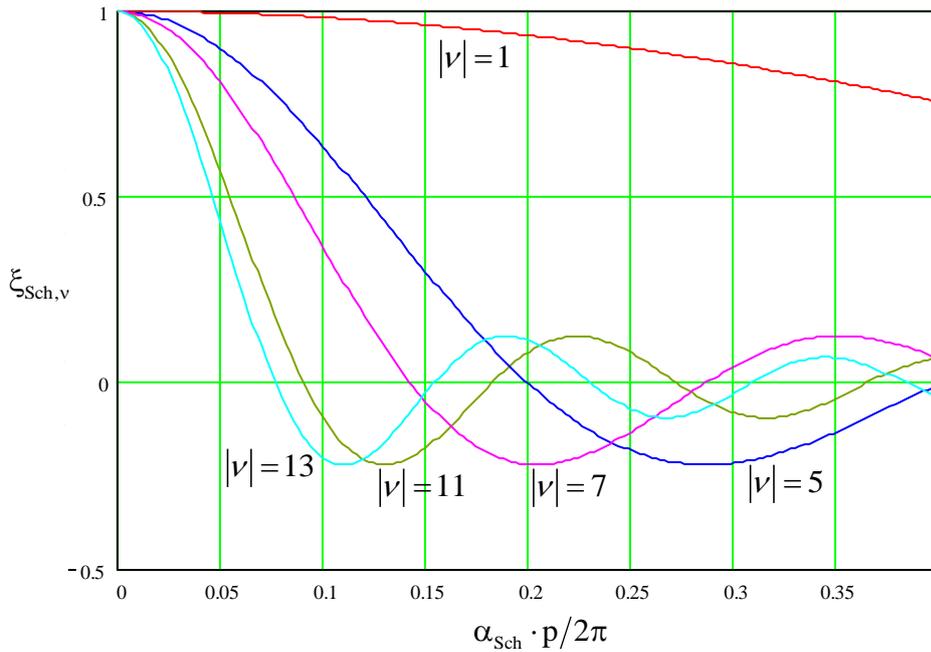
$$\begin{aligned}\Phi_v &= \hat{B}_v \frac{2r\ell}{vp} \frac{vp\pi}{N_2} \frac{\sin \left(\frac{vp\pi}{N_2} \right)}{\frac{vp\pi}{N_2}} \frac{\sin \left(\frac{vp\alpha_{\text{Sch}}}{2} \right)}{\frac{vp\alpha_{\text{Sch}}}{2}} \\ &= \hat{B}_v \frac{2\pi r\ell}{N_2} \frac{\sin \left(\frac{vp\pi}{N_2} \right)}{\frac{vp\pi}{N_2}} \frac{\sin \left(\frac{vp\alpha_{\text{Sch}}}{2} \right)}{\frac{vp\alpha_{\text{Sch}}}{2}} \\ &= \hat{B}_v \frac{2\pi r\ell}{N_2} \text{si} \left(\frac{vp\pi}{N_2} \right) \text{si} \left(\frac{vp\alpha_{\text{Sch}}}{2} \right)\end{aligned}$$

Der Fluss einer Oberwelle in einer Käfigmasche ergibt sich also aus dem Maximalwert der Flussdichteoberwelle, der Luftspaltfläche einer Käfigmasche, dem Kopplungsfaktor

$$\xi_{K,v} = \text{si} \left(\frac{vp\pi}{N_2} \right) \text{ und dem Schrägungsfaktor } \xi_{\text{Sch},v} = \text{si} \left(\frac{vp\alpha_{\text{Sch}}}{2} \right).$$

Für den Kopplungsfaktor gilt: $\xi_{K,v} \rightarrow 1$ für $N_2 \rightarrow \infty$.

Der Schrägungsfaktor ist für die Grundwelle und die ersten 4 Oberwellen im nächsten Bild als Funktion des Schrägungswinkels dargestellt:



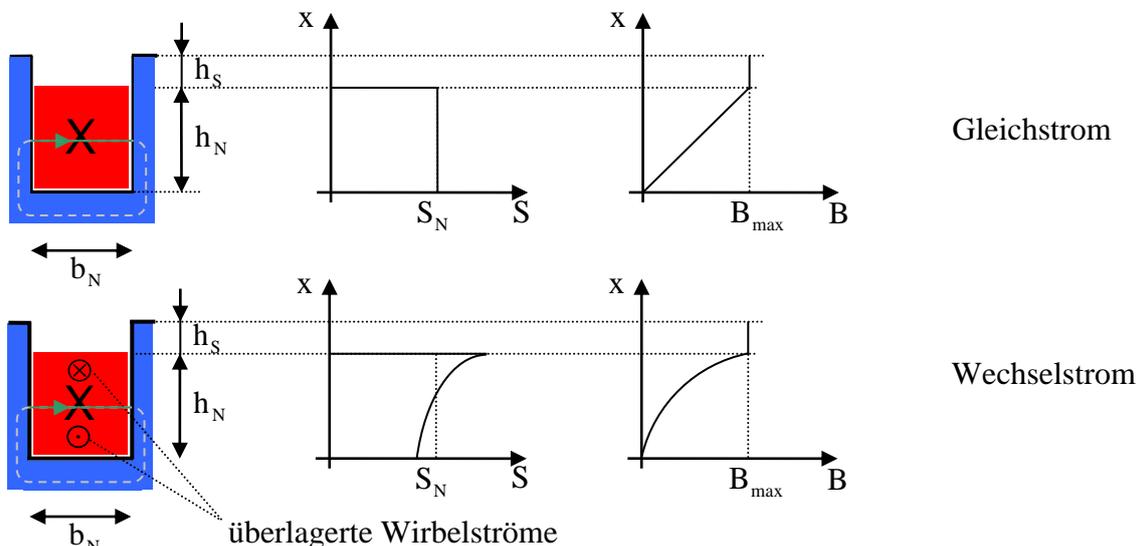
Die Wirkung der Schrägung besteht also darin, dass die Oberwellen weitgehend abgedämpft werden, während die Grundwelle möglichst unbeeinflusst bleibt. Der Schrägungsfaktor wird Null für:

$$\xi_{Sch,v} = 0 \Rightarrow \left| \frac{vp\alpha_{Sch}}{2} \right| = k \cdot \pi, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$\Rightarrow \frac{p\alpha_{Sch}}{2\pi} = \frac{k}{|v|}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Stromverdrängung

Bei Käfigläufern tritt wegen der massiven Ausführung der Stäbe stets eine einseitige Stromverdrängung (zur Nutöffnung hin) auf: Das Nutenstrefelfeld durchsetzt den Stab und induziert Spannungen, die Wirbelströme und dadurch eine ungleichmäßige Stromverteilung zur Folge haben. Nach der Lenzschen Regel sind diese induzierten Spannungen so gerichtet, dass die hierdurch erzeugten Wirbelströme der Ursache (Nutenstrefelfeld) entgegenwirken.

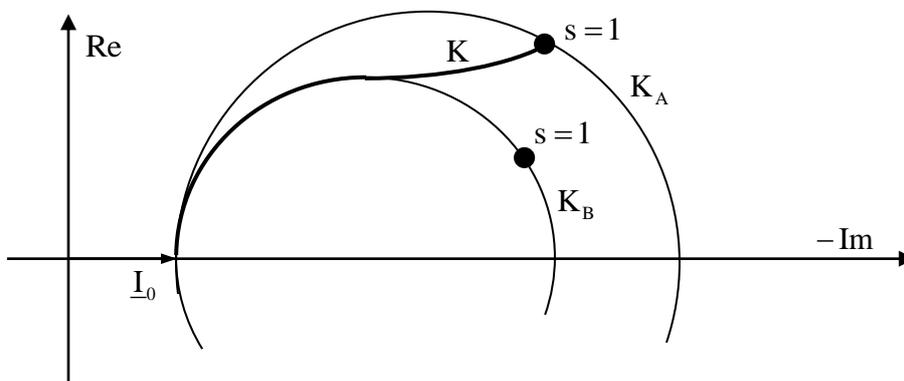


Das Integral der überlagerten Wirbelströme über den Nutenquerschnitt ist Null, d.h. der Gesamtstrom ändert sich nicht (es ändert sich nur die Verteilung des Stromes über dem Querschnitt).

Im allgemeinen ist die Stromverdrängung bei elektrischen Maschinen nicht erwünscht, da sie zusätzliche Verluste in den Stäben verursacht und somit eine größere Erwärmung und einen geringeren Wirkungsgrad zur Folge hat.

Bei der Asynchronmaschine mit Käfigläufer kann die Stromverdrängung allerdings zur Verbesserung des Anlaufverhaltens genutzt werden: Durch die Stromverdrängung wird der Rotorwiderstand im Anlauf (d.h. bei großer Frequenz der Rotorströme) größer und somit auch das Stillstandsmoment. Zugleich wird die Streureaktanz kleiner (die Induktion im Läuferstab ist geringer), was für den Kreis der Statorstromortskurve eine Vergrößerung des Durchmessers bedeutet.

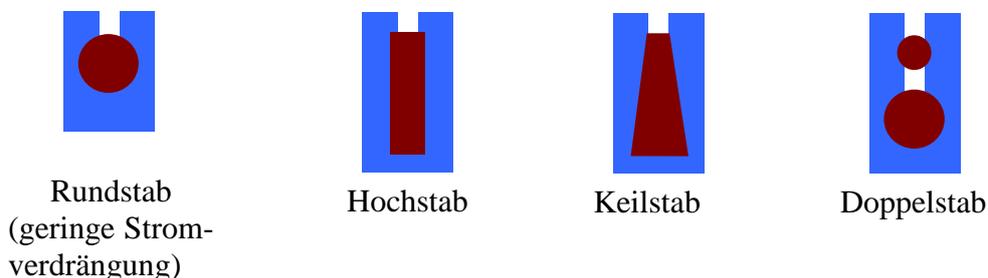
In dem Maß, in dem der Motor hochläuft, wird die Stromverdrängung geringer, bis sie schließlich im Nennpunkt kaum noch auftritt. Die Ortskurve des Statorstromes K kann aus dem Anlaufkreis K_A und dem Betriebskreis K_B ermittelt werden (der Strom \underline{I}_0 ist für beide Fälle gleich, weil sich X_1 nicht ändert):



Es gilt:

$s = 1$ (d.h. $f_2 = f_1$)	X_1 unverändert; $X'_{2\sigma}$ klein, R'_2 groß
$s \rightarrow 0$ (d.h. $f_2 \rightarrow 0$)	X_1 unverändert; $X'_{2\sigma}$ groß, R'_2 klein

Dieser Effekt wird gezielt bei „Stromverdrängungsläufern“ ausgenutzt:



Die Änderung des Rotorwiderstandes und der Rotorstreuinduktivität mit der Frequenz wird i.a. durch die folgenden Faktoren angegeben:

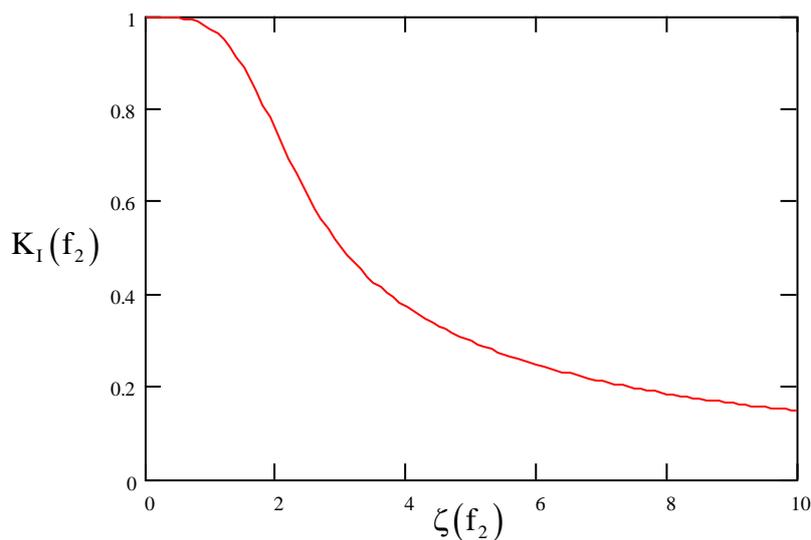
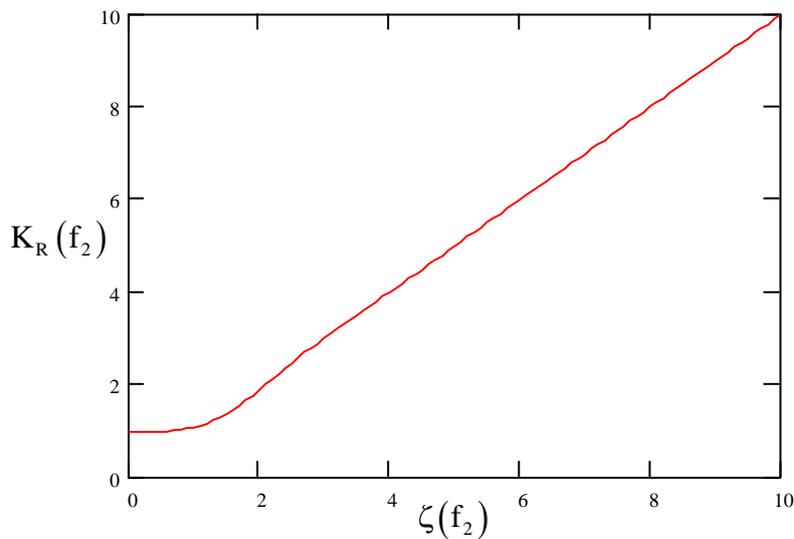
$R_2(f_2) = K_R(f_2) \cdot R_2(f_2 = 0)$	$K_R(0) = 1$	$K_R(f_2 = f_1) \approx 3 \dots 5$
$L_{2\sigma N}(f_2) = K_I(f_2) \cdot L_{2\sigma N}(f_2 = 0)$	$K_I(0) = 1$	$K_I(f_2 = f_1) \approx 0,25 \dots 0,4$

Für den Hochstabläufer mit der Nuthöhe h und dem spezifischen Widerstand ρ gilt (hier ohne Herleitung):

$$K_R(f_2) = \zeta \frac{\sinh(2\zeta) + \sin(2\zeta)}{\cosh(2\zeta) - \cos(2\zeta)}, \quad \zeta(f_2) = \sqrt{\frac{\pi\mu_0 f_2}{\rho}} \cdot h$$

$$K_I(f_2) = \frac{3}{2\zeta} \frac{\sinh(2\zeta) - \sin(2\zeta)}{\cosh(2\zeta) - \cos(2\zeta)}$$

Die folgenden Bilder zeigen die Faktoren $K_R(f_2)$ und $K_I(f_2)$ als Funktion von $\zeta(f_2)$ für den Hochstabläufer:



4.5 Möglichkeiten zur Drehzahlstellung

Die wesentlichen Verfahren zur Verstellung der Drehzahl bei Asynchronmaschinen kann man der folgenden Gleichung entnehmen:

$$n = \frac{f_1}{p}(1-s)$$

1. Veränderung (Vergrößerung) des Schlupfes:

Man kann entweder Widerstände in den Läuferkreis eines Schleifringläufers einschalten oder die Klemmenspannung absenken ($T \sim U_1^2$). In beiden Fällen wird die zusätzliche Schlupfleistung in Wärme umgesetzt und der Wirkungsgrad verschlechtert sich:

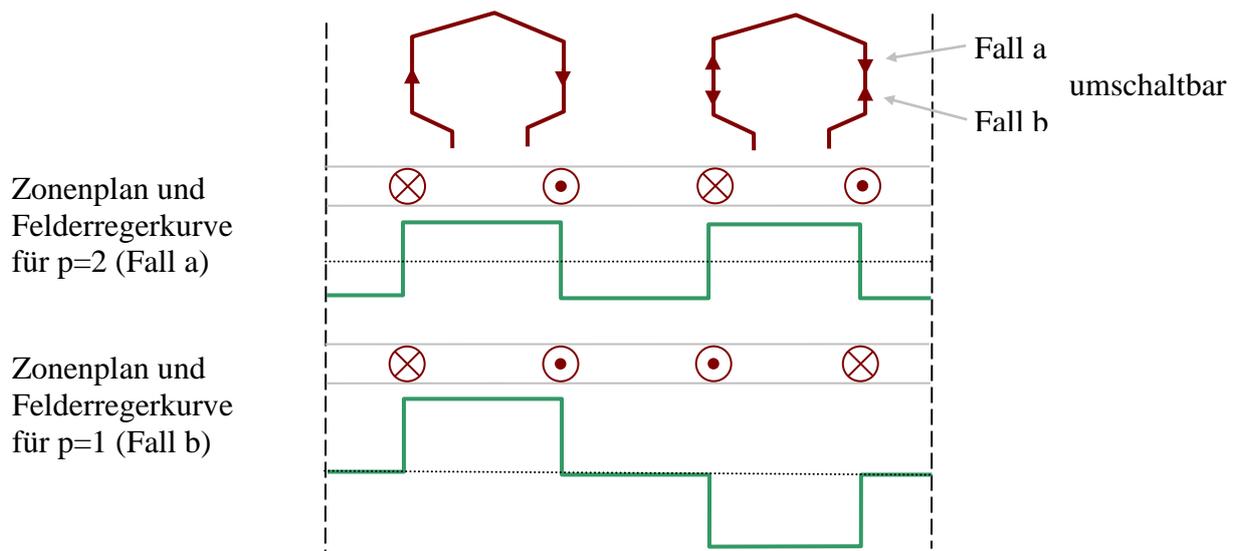
$$\eta = 1 - s$$

Die Leerlaufdrehzahl bleibt erhalten.

2. Änderung der Polpaarzahl:

Da sich der Käfigläufer auf jede Polzahl einstellen kann, lässt sich hierbei die synchrone Drehzahl (Leerlaufdrehzahl) $n_0 = f_1/p$ durch Änderung von p in diskreten Schritten verstellen. Dazu kann der Stator

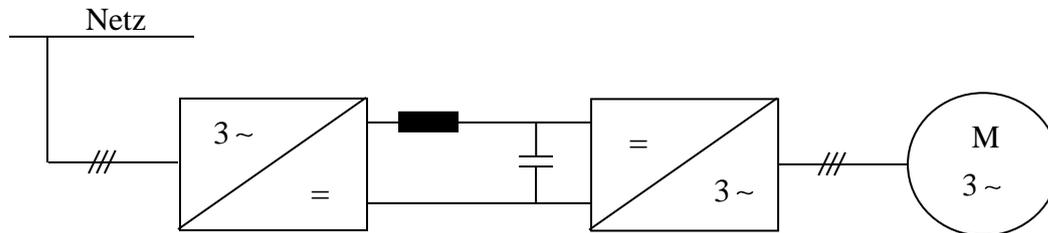
- mit mehreren galvanisch voneinander getrennten, aber in denselben Nuten untergebrachten Drehstromwicklungen versehen werden (hoher Aufwand, geringe Ausnutzung) oder
- mit einer einzigen Wicklung mit umschaltbaren Wicklungsabschnitten versehen werden (siehe Bild unten).



Die Polumschaltung wird z.B. bei der sogenannten „Dahlanderschaltung“ genutzt.

3. Änderung der Speisefrequenz:

Die Leistung wird aus dem 50Hz-Drehstromnetz entnommen, gleichgerichtet und über einen Zwischenkreis (Gleichstrom oder Gleichspannung) einem Wechselrichter zugeführt, der die Asynchronmaschine mit variabler Spannung speist:



Für das Kreisdiagramm (Ortskurve des Statorstromes) gilt bei veränderlicher Speisefrequenz:

- $I_0 = \frac{U_1}{X_1} \sim \frac{U_1}{f_1}$
- $I_\infty = \frac{I_0}{\sigma} \sim \frac{U_1}{f_1}$

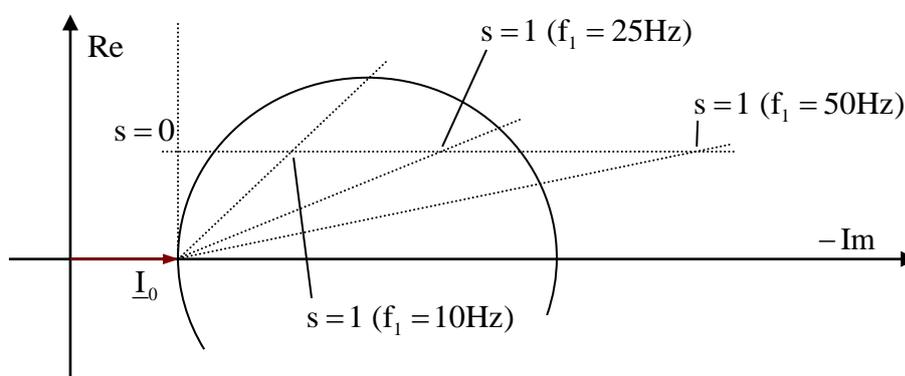
Der Kreis bleibt also in seiner Form erhalten, wenn man die angelegte Spannung proportional zur Frequenz ändert. Damit bleibt auch das Kippmoment erhalten:

$$T_{\text{kipp}} = \frac{3p}{\omega_1} \frac{U_1^2}{X_1 \frac{\sigma}{1-\sigma}} \sim \left(\frac{U_1}{f_1} \right)^2$$

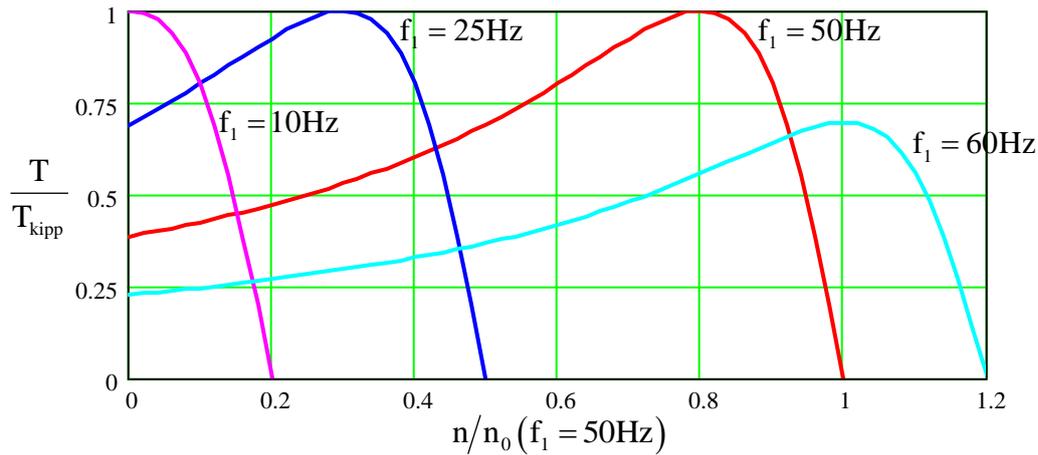
Für dieses Kreisdiagramm ändert sich allerdings die Parametrierung:

$$\tan(\varphi^*) = \frac{X_1 \frac{\sigma}{1-\sigma}}{R_2' (1+\sigma_1)^2} \cdot s \sim s \cdot f_1 = f_2$$

Mit fallender Speisefrequenz wandert der Kurzschlusspunkt also in Richtung auf den Leerlaufpunkt.



Die Drehmoment-Drehzahl-Charakteristik ist im nächsten Bild dargestellt:



Wenn die Speisefrequenz f_1 kleiner wird, muss der Statorwiderstand R_1 berücksichtigt werden, weil dann R_1 gegenüber X_1 nicht mehr vernachlässigbar ist. Wird R_1 berücksichtigt, dann wird der Kreis der Ortskurve kleiner und das Kippmoment sinkt (wegen des Spannungsabfalls an R_1). Zur Kompensation des Spannungsabfalls an R_1 wird bei niedriger Frequenz die Spannung nur unterproportional abgesenkt (Einstellung eines konstanten Statorflusses).

Kann bei Steigerung der Frequenz ab dem sogenannten Nennpunkt die Spannung nicht mehr weiter erhöht werden, sinkt das Kippmoment umgekehrt proportional zum Quadrat der Frequenz; diesen Bereich nennt man „Feldschwächbetrieb“.

4.6 Stern-Dreieck-Schaltung

Beim Aufschalten der stillstehenden Asynchronmaschine an das Netz würde sofort der volle Kurzschlussstrom fließen, der ein Mehrfaches des Nennstromes beträgt. Da dies eine zu hohe Belastung für die Maschine darstellt, muss der Anlaufstrom begrenzt werden.

Eine Möglichkeit zur Begrenzung dieses Stromes besteht bei Schleifringläufern darin, Vorwiderstände in den Läuferkreis zu schalten, siehe Kapitel 4.3.

Bei Käfigläufermotoren ist dies nicht möglich. Hier wird entweder (bei großen Leistungen) die Spannung mit einem Anlasstrafo herabgesetzt oder (bei kleinen und mittleren Leistungen) die Spannung beim Anlauf über die Stern-Dreieck-Schaltung herabgesetzt.

Sind die Motorstränge im Stern verschaltet, so gilt:

$$U_{\text{Strang,Y}} = \frac{1}{\sqrt{3}} U_{\text{Netz}} \quad I_{\text{Strang,Y}} = I_{\text{Netz,Y}}$$

Für die Dreieckschaltung gilt:

$$U_{\text{Strang,\Delta}} = U_{\text{Netz}} \quad I_{\text{Strang,\Delta}} = \frac{1}{\sqrt{3}} I_{\text{Netz,\Delta}}$$

Da das Drehmoment dem Quadrat der Strangspannung proportional ist, folgt:

$$\frac{T_Y}{T_\Delta} = \left(\frac{U_{\text{Strang,Y}}}{U_{\text{Strang,\Delta}}} \right)^2 = \frac{1}{3}$$

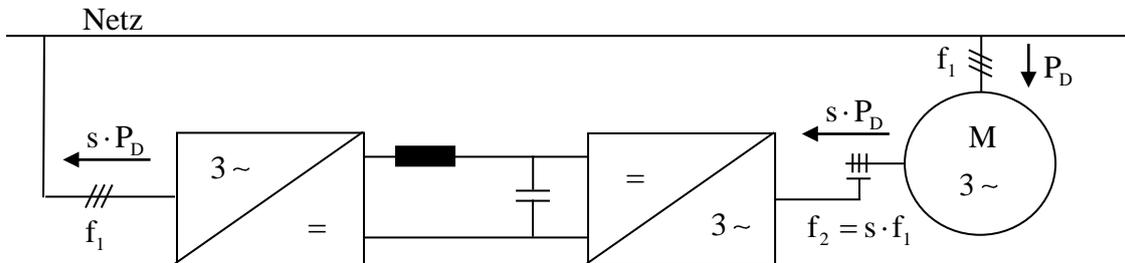
Für den Netzstrom gilt:

$$\frac{I_{\text{Netz,Y}}}{I_{\text{Netz,\Delta}}} = \frac{I_{\text{Strang,Y}}}{\sqrt{3} \cdot I_{\text{Strang,\Delta}}} = \frac{I_{\text{Strang,Y}}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot I_{\text{Strang,Y}}} = \frac{1}{3}$$

Drehmoment und Netzstrom werden also beim Anlaufen um den Faktor 3 herabgesetzt. Das Umschalten auf die Dreieckschaltung geschieht dann in der Nähe des Nennpunktes.

4.7 Doppeltgespeiste Asynchronmaschine

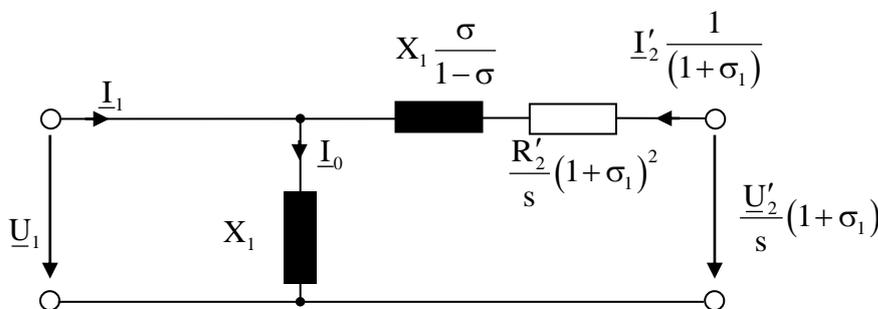
Der Schleifringläufer einer Asynchronmaschine kann mit schlupffrequenten Spannungen gespeist werden (früher wurde die Schlupfleistung über einen weiteren Maschinensatz, heute i.a. über einen Wechselrichter übertragen):



Über den Wechselrichter kann dem Läuferkreis zusätzliche Leistung zugeführt oder entzogen werden. Bei Zuführung der Leistung wird ein Betrieb oberhalb der Synchrondrehzahl eingestellt, bei Entzug der Leistung unterhalb der Synchrondrehzahl (Motorbetrieb).

Bis auf die Wechselrichterverluste ist hierdurch eine (nahezu) verlustfreie Drehzahlstellung möglich. Der Vorteil bei dieser Art der Drehzahlstellung ist, dass der Wechselrichter nur für die Schlupfleistung dimensioniert werden muss. Anwendung findet diese Art der Drehzahlstellung z.B. in Windkraftanlagen (Generatorbetrieb).

Zur Berechnung des Drehmomentverlaufes wird von folgendem Ersatzschaltbild ausgegangen:



Es gilt:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_0 - \underline{I}'_2 \frac{1}{1 + \sigma_1}$$

$$\underline{I}_0 = \frac{\underline{U}_1}{jX_1}$$

$$\underline{I}'_2 \frac{1}{1 + \sigma_1} \left(\frac{R'_2}{s} (1 + \sigma_1)^2 + jX_1 \frac{\sigma}{1 - \sigma} \right) = \frac{\underline{U}'_2}{s} (1 + \sigma_1) - \underline{U}_1$$

$$\Rightarrow \underline{I}'_2 \frac{1}{1 + \sigma_1} = \frac{\underline{U}'_2 (1 + \sigma_1) - s\underline{U}_1}{R'_2 (1 + \sigma_1)^2 + jsX_1 \frac{\sigma}{1 - \sigma}}$$

Man erkennt, dass der Rotorstrom aus der Überlagerung zweier Anteile besteht: Ein Anteil wird hervorgerufen durch die statorseitige Klemmenspannung \underline{U}_1 , der zweite durch die (als Stellgröße genutzte) rotorseitige Spannung \underline{U}'_2 .

Im Leerlauf gilt $\underline{I}'_2 = 0$. Dies ist erfüllt für

$$s = s'_0 = \frac{\underline{U}'_2 (1 + \sigma_1)}{\underline{U}_1}$$

Der Wert s'_0 wird Leerlaufschlupf genannt. Da der Leerlaufschlupf eine reelle Zahl sein muss, muss auch $\frac{\underline{U}'_2}{\underline{U}_1}$ eine reelle Zahl sein, d.h. diese beiden Spannungen müssen in Phase (oder in Gegenphase) liegen. Die Leerlaufdrehzahl

$$n = n'_0 = n_0 (1 - s'_0) = \frac{\omega_1}{2\pi p} (1 - s'_0)$$

lässt sich also über die Spannung \underline{U}'_2 beeinflussen; z.B. ergibt sich

- für $0 < s'_0 < 0,5$ eine Leerlaufdrehzahl von $n_0 > n'_0 > 0,5n_0$
- für $-0,5 < s'_0 < 0$ eine Leerlaufdrehzahl von $1,5n_0 > n'_0 > n_0$

Das Drehmoment lässt sich nun aus der Drehfeldleistung bestimmen. Mit

$$\operatorname{Re}\{\underline{I}_1\} = \operatorname{Re}\left\{-\underline{I}'_2 \frac{1}{1 + \sigma_1}\right\}$$

folgt:

$$\begin{aligned} T &= \frac{p}{\omega_1} P_D = \frac{3p}{\omega_1} \underline{U}_1 \operatorname{Re}\left\{-\underline{I}'_2 \frac{1}{1 + \sigma_1}\right\} \\ &= \frac{3p}{\omega_1} \underline{U}_1 \operatorname{Re}\left\{\frac{s\underline{U}_1 - \underline{U}'_2 (1 + \sigma_1)}{R'_2 (1 + \sigma_1)^2 + jsX_1 \frac{\sigma}{1 - \sigma}}\right\} \end{aligned}$$

Mit

$$s_{\text{kipp}} = \frac{R'_2 (1 + \sigma_1)^2}{X_1 \frac{\sigma}{1 - \sigma}}$$

folgt weiter, wenn $\underline{U}_1 = U_1$ reell gewählt wird:

$$T = \frac{3p}{\omega_1} \frac{U_1^2}{X_1} \frac{\sigma}{1-\sigma} \operatorname{Re} \left\{ \frac{s - \frac{U'_2}{U_1} (1 + \sigma_1)}{s_{\text{kipp}} + js} \right\}$$

$$= \frac{3p}{\omega_1} \frac{U_1^2 (1-\sigma)}{\sigma X_1} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\left(s - \frac{U'_2}{U_1} (1 + \sigma_1) \right) (s_{\text{kipp}} - js)}{s_{\text{kipp}}^2 + s^2} \right\}$$

Betrachtet man nun nur Läufer Spannungen, die in Phase zur Statorspannung liegen (es wurde oben ja bereits gezeigt, dass nur für solche Spannungen ein Leerlauf der Maschine möglich ist), dann gilt:

$$T = \frac{3p}{\omega_1} \frac{U_1^2 (1-\sigma)}{\sigma X_1} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\left(s - \frac{U'_2}{U_1} (1 + \sigma_1) \right) (s_{\text{kipp}} - js)}{s_{\text{kipp}}^2 + s^2} \right\}$$

$$= \frac{3p}{\omega_1} \frac{U_1^2 (1-\sigma)}{\sigma X_1} \left(s - \frac{U'_2}{U_1} (1 + \sigma_1) \right) \frac{s_{\text{kipp}}}{s_{\text{kipp}}^2 + s^2}$$

Bezieht man dieses Drehmoment auf das Kippmoment bei der Läufer Spannung Null (siehe Kapitel 4.3), so erhält man:

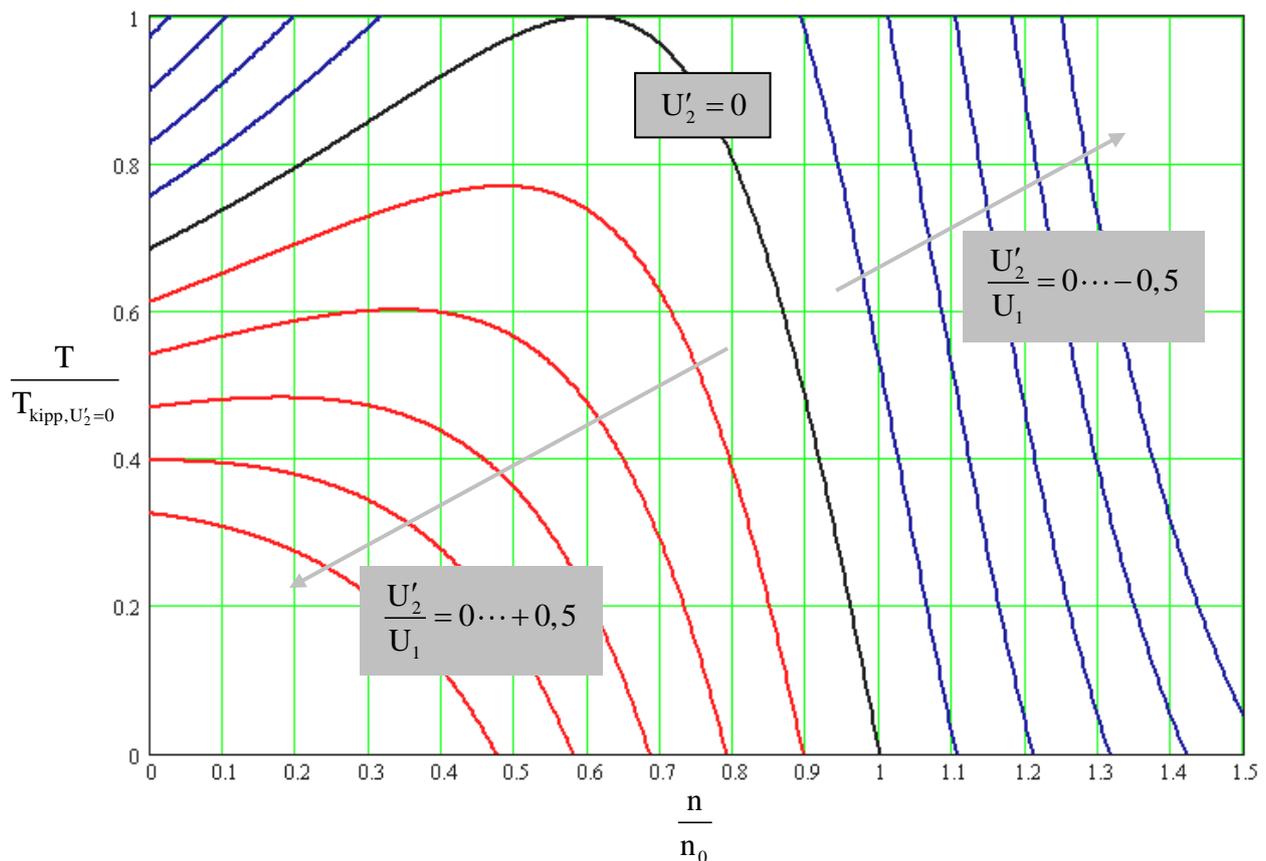
$$T_{\text{kipp}, U'_2=0} = \frac{3p}{2\omega_1} \frac{U_1^2}{X_1} \frac{\sigma}{1-\sigma}$$

$$\Rightarrow \frac{T}{T_{\text{kipp}, U'_2=0}} = 2 \left(s - \frac{U'_2}{U_1} (1 + \sigma_1) \right) \frac{s_{\text{kipp}}}{s_{\text{kipp}}^2 + s^2}$$

Eine weitere Umformung ergibt schließlich:

$$\frac{T}{T_{\text{kipp}, U'_2=0}} = \left(1 - \frac{\frac{U'_2}{U_1} (1 + \sigma_1)}{s} \right) \frac{2}{\frac{s_{\text{kipp}}}{s} + \frac{s}{s_{\text{kipp}}}}$$

Das folgende Bild zeigt beispielhaft für eine Maschine mit $s_{\text{kipp}} \approx 0,4$ das (auf das Kippmoment bei $U'_2 = 0$) bezogene Drehmoment als Funktion der (auf die synchrone Drehzahl) bezogenen Drehzahl.



Der Vorteil dieser Art der Drehzahlstellung besteht darin, dass der Wechselrichter nur für die Schlupfleistung ausgelegt werden muss, und somit kleiner als bei einem statorseitigen Wechselrichter ausfallen kann.

Nachteilig an diesem Verfahren zur Drehzahlstellung ist, dass nur ein begrenzter Drehzahlstellbereich realisiert werden kann (je größer der Drehzahlstellbereich, desto größer die notwendige Leistung des Wechselrichters) und dass die Maschine mit Schleifringen ausgestattet werden muss. Dies lohnt sich nur bei großen Leistungen (typisch größer 500kW).

Wird der maschinenseitige Wechselrichter als reiner Gleichrichter ausgeführt, so kann der Maschine nur Leistung entzogen werden. Somit kann nur der untersynchrone Bereich genutzt werden, mit dem Vorteil, dass der Elektronikaufwand deutlich kleiner ist. Eine solche Ausführung nennt man untersynchrone Stromrichter-kaskade.

5 Synchronmaschine

5.1 Ersatzschaltbild und Zeigerdiagramm

Die Synchronmaschine besitzt wie die Asynchronmaschine einen Stator mit Drehstromwicklung (sie ist also eine Drehfeldmaschine), allerdings wird die Rotorwicklung mit Gleichstrom gespeist. Im Folgenden sollen die Spannungsgleichungen und das Ersatzschaltbild der Synchronmaschine aus denen der Asynchronmaschine abgeleitet werden. Die Drehstromwicklung des Stators ist an ein speisendes Drehstromnetz mit konstanter Spannung \underline{U}_1 und konstanter Frequenz f_1 geschaltet. Der Rotor trage ebenfalls eine Drehstromwicklung gleicher Polzahl, die an Schleifringe angeschlossen ist. Zwischen zwei Schleifringen wird ein Gleichstrom eingespeist (Erregerstrom I_F). Die Frequenz der Rotorströme ist also $f_2 = 0$.

Nach der Drehfeldtheorie kann die Synchronmaschine nur dann ein von Null verschiedenes, zeitlich konstantes Drehmoment entwickeln, wenn die Frequenzbedingung erfüllt ist:

$$f_2 = s \cdot f_1$$

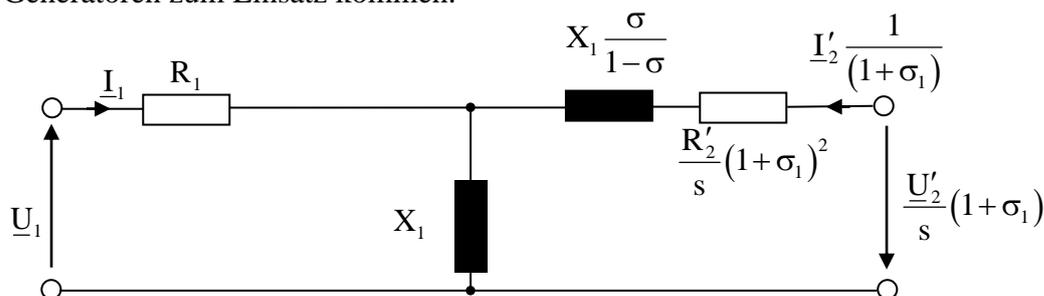
Mit $f_2 = 0$ und $f_1 = f_{\text{Netz}}$ gilt:

$$s = 0 \quad \text{und} \quad n = n_0 = \frac{f_1}{p}$$

Der Rotor dreht sich also im stationären Betrieb ausschließlich mit der Synchrondrehzahl n_0 . Bei jeder anderen Drehzahl $n \neq n_0$ entstehen Pendelmomente mit dem zeitlichen Mittelwert Null.

Im Gegensatz zur Asynchronmaschine, die bei $n = n_0$ kein Drehmoment mehr entwickelt, erzeugt die Synchronmaschine ausschließlich bei $n = n_0$ ein Drehmoment.

Es wird nun, ausgehend vom allgemeinen Ersatzschaltbild der Asynchronmaschine mit Schleifringläufer, das Ersatzschaltbild der Synchronmaschine aufgestellt. Hierbei wird allerdings das Erzeugerzählpeilsystem (EZS) benutzt, da Synchronmaschinen hauptsächlich als Generatoren zum Einsatz kommen.



Die Spannungsgleichungen sind:

$$\underline{U}_1 + R_1 \underline{I}_1 + jX_1 \left(\underline{I}_1 + \frac{\underline{I}'_2}{1 + \sigma_1} \right) = 0$$

$$\frac{\underline{U}'_2}{s} (1 + \sigma_1) = \frac{\underline{I}'_2}{1 + \sigma_1} \left(\frac{R'_2}{s} (1 + \sigma_1)^2 + jX_1 \frac{\sigma}{1 - \sigma} \right) + jX_1 \left(\underline{I}_1 + \frac{\underline{I}'_2}{1 + \sigma_1} \right)$$

Wird die Rotorspannungsgleichung mit s multipliziert und berücksichtigt, dass $s = 0$ ist, so folgt:

$$\underline{U}_1 + R_1 \underline{I}_1 + j(X_{l\sigma} + X_{lh}) \underline{I}_1 = -jX_{lh} \underline{I}'_2$$

$$\underline{U}'_2 = R'_2 \underline{I}'_2$$

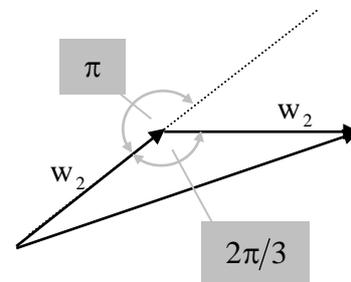
\underline{I}'_2 ist der auf die Statorseite umgerechnete Erregerstrom I_F . Ein in der Statorwicklung mit Netzfrequenz fließender Strom \underline{I}'_2 würde im Luftspalt die gleiche Drehdurchflutung erzeugen wie der Gleichstrom I_F , der in dem mit synchroner Drehzahl rotierenden Rotor (Polrad) fließt. Der Zusammenhang zwischen \underline{I}'_2 und I_F ergibt sich wie folgt:

1. Die Windungszahl der Erregerwicklung beträgt:

$$w_F = 2w_2$$

2. Den Wicklungsfaktor der Erregerwicklung (im Folgenden mit dem Index „F“ bezeichnet) erhält man mit Hilfe der Drehfeldtheorie aus dem Zonungsfaktor und dem Sehnungsfaktor. Für die Grundwelle und für eine Verteilung der Wicklung in sehr viele Nuten ($q \rightarrow \infty$) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \xi_F &= \xi_Z \cdot \xi_S \\ &= \text{si}\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \sin\left(\frac{s}{\tau_p} \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{\sin(\pi/6)}{\pi/6} \cdot \sin\left(\frac{2\pi/3}{\pi} \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{1/2}{\pi/6} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{3}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$



3. Die Gleichheit der Grundwellen der Drehdurchflutung ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \frac{4}{\pi} \frac{w_1 \xi_1}{p} \sqrt{2} \underline{I}'_2 &= \frac{4}{\pi} \frac{w_F \xi_F}{p} I_F \\ \Rightarrow \underline{I}'_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{w_F \xi_F}{p} I_F \frac{2}{3} \frac{p}{w_1 \xi_1} = \frac{2}{3} \frac{w_F \xi_F}{w_1 \xi_1} \frac{I_F}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{2}{3} \frac{2w_2}{w_1 \xi_1} \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{3}{\pi} \frac{I_F}{\sqrt{2}} = \frac{2w_2}{w_1 \xi_1} \frac{\sqrt{3}}{\pi} \frac{I_F}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

4. Die komplexe Größe erhält man nun aufgrund der Tatsache, dass der in der Statorwicklung mit Netzfrequenz fließende Strom \underline{I}'_2 im Luftspalt die gleiche Drehdurchflutung erzeugt wie der Gleichstrom I_F , der in dem mit synchroner Drehzahl rotierenden Rotor (Polrad) fließt; hierbei besitzt der Strom \underline{I}'_2 gegenüber der Spannung \underline{U}_1 den Phasenwinkel φ_2 (siehe das folgende Zeigerbild):

$$\underline{I}'_2 = I'_2 \cdot e^{-j\varphi_2}$$

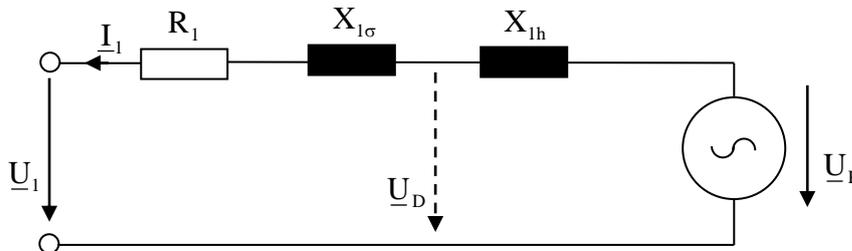
Der auf die Statorseite bezogene Erregerstrom I'_2 induziert an der Hauptreaktanz X_{lh} eine Spannung. Diese Spannung wird Polradspannung genannt:

$$\underline{U}_P = -jX_{lh} \underline{I}'_2$$

Die Statorspannungsgleichung der Synchronmaschine wird dann zu:

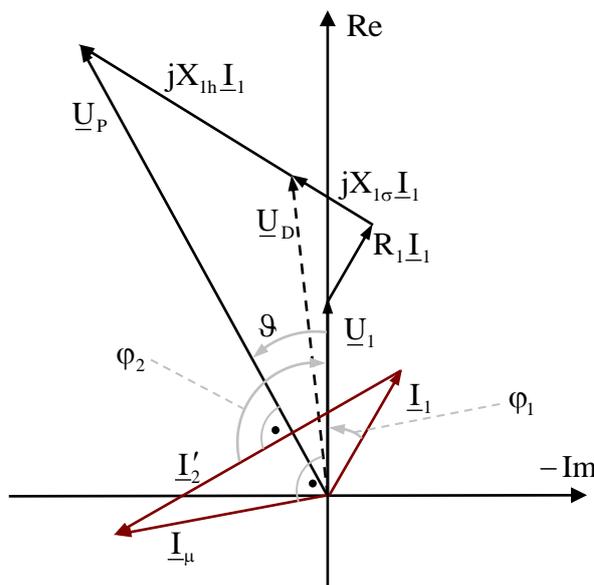
$$\underline{U}_1 + R_1 \underline{I}_1 + j(X_{l\sigma} + X_{lh}) \underline{I}_1 = \underline{U}_P$$

Aus dieser Statorspannungsgleichung lässt sich nun das Ersatzschaltbild der Synchronmaschine ableiten. Hierbei muss die Rotorseite nicht besonders berücksichtigt werden, weil die vom Erregerfeld in der Statorwicklung induzierte Polradspannung U_p in der Statorspannungsgleichung bereits enthalten ist und im stationären Betrieb keine Rückwirkung vom Ständer auf den Läufer erfolgt. Im folgenden Bild sind gegenüber dem am Anfang dieses Kapitels gezeigten Ersatzschaltbild die Richtungen von \underline{U}_1 und \underline{I}_1 herumgedreht, so dass auch hier wieder das Erzeugerzählpfeilsystem (EZS) benutzt wird.



Die Polradspannung U_p lässt sich bei Erregung mit I_F , Antrieb mit Synchrondrehzahl n_0 und Leerlauf ($I_1 = 0$) direkt an den Klemmen der Maschine messen.

Das komplette Zeigerdiagramm der Synchronmaschine bei Generatorbetrieb mit ohmsch-induktiver Last sieht wie folgt aus:



Die vom resultierenden Luftspaltdrehfeld induzierte Spannung \underline{U}_D entspricht dem Magnetisierungszustand (Sättigungszustand) der Maschine:

$$\underline{U}_D = -jX_{lh}\underline{I}_\mu$$

Die Polradspannung U_p ist:

$$\underline{U}_P = -jX_{lh}\underline{I}'_2$$

Die Ankerrückwirkung beträgt:

$$-jX_{lh}\underline{I}_1$$

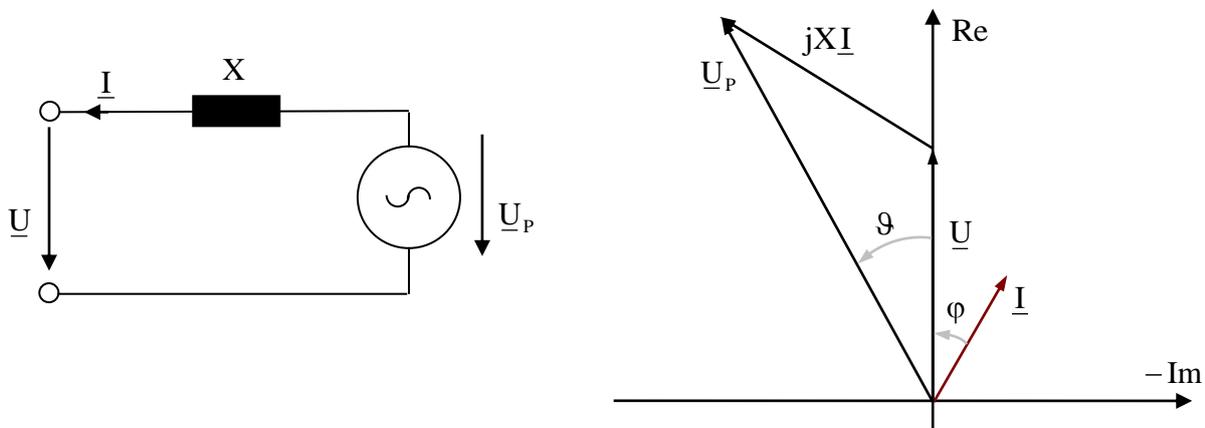
Der Winkel ϑ wird Polradwinkel genannt. Er gibt die Phasenlage der Polradspannung \underline{U}_P gegenüber der Klemmenspannung \underline{U}_1 an. Im Generatorbetrieb ist ϑ positiv, im Motorbetrieb negativ. Im Leerlauf ($\underline{I}_1 = 0$) und bei Betrieb der Synchronmaschine als Blindleistungsmaschine ($\varphi_1 = \pm \pi/2$ und $R_1 = 0$) ist $\vartheta = 0$.

Der Winkel $\delta = \vartheta + \varphi_1$ wird Lastwinkel genannt. Im Generatorbetrieb eilt die Erregerdurchflutung der Ankerdurchflutung um $\frac{\pi}{2} + \delta$ voraus, im Motorbetrieb um $\frac{\pi}{2} - \delta$ nach.

Bei großen Synchronmaschinen kann der Statorwiderstand R_1 gegenüber der Reaktanz X_1 vernachlässigt werden. Da außerdem zur Beschreibung des Betriebsverhaltens nur die Statorspannungsgleichung benötigt wird, können die Indices entfallen. Man erhält dann die folgende Gleichung:

$$\underline{U}_P = \underline{U} + jX\underline{I}$$

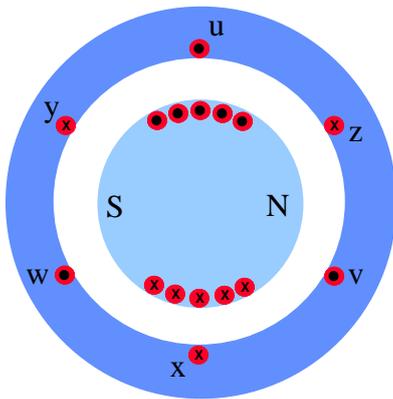
Hieraus kann man dann das folgende Ersatzschaltbild und Zeigerdiagramm ableiten (da im Folgenden der Winkel φ_2 nicht mehr benutzt wird, wird zukünftig der Winkel φ_1 ohne Index benutzt: $\varphi = \varphi_1$):



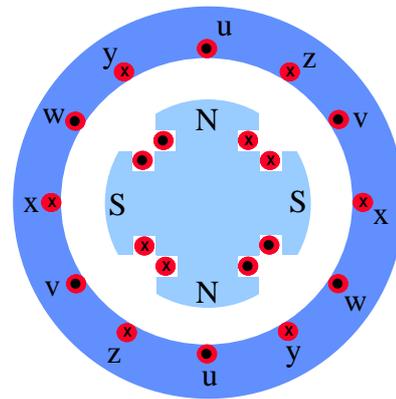
5.2 Ausführungsformen

Der Stator einer Synchronmaschine entspricht im Aufbau dem einer Asynchronmaschine: In die Nuten des Blechpaketes ist eine Drehstromwicklung eingelegt. Beim Rotor unterscheidet man zwei Bauarten:

Vollpolgenerator
(hier dargestellt: $p = 1$)



Schenkelpolgenerator
(hier dargestellt: $p = 2$)



1. Turbogenerator mit Vollpoläufer:

Wenn Synchrongeneratoren von Dampf- oder Gasturbinen angetrieben werden (Wärme Kraftwerke), dann wählt man die Drehzahl mit Rücksicht auf die Turbinenauslegung möglichst hoch. Für 50Hz-Netze ergibt sich dann als höchste Drehzahl 3000 min^{-1} (2-polige Ausführung, d.h. $p = 1$). Der Rotordurchmesser ist durch die auftretenden Beschleunigungskräfte begrenzt. Wegen der hohen mechanischen Beanspruchung wird als Bauform der Vollpolrotor gewählt. Das für die gewünschte Leistung erforderliche Volumen wird durch einen langgestreckten Rotor erzielt.

2. Schenkelpolsynchronmaschine:

Die Turbinen von Wasserkraftwerken laufen mit sehr geringer Drehzahl ($100 \dots 750 \text{ min}^{-1}$). Um diese Drehzahl an die Netzfrequenz anzupassen, muss die Polpaarzahl sehr groß gewählt werden ($p = 30 \dots 4$). Wegen der geringen Beschleunigungskräfte (aufgrund der geringen Drehzahl) kann man hier Einzelpole mit konzentrischen Erregerspulen realisieren. Der Schenkelpolsynchrongenerator besitzt einen großen Durchmesser und eine kleine axiale Länge. Bei dieser Ausführungsform ist der Luftspalt am Umfang nicht konstant, d.h. die magnetische Leitfähigkeit variiert am Umfang.

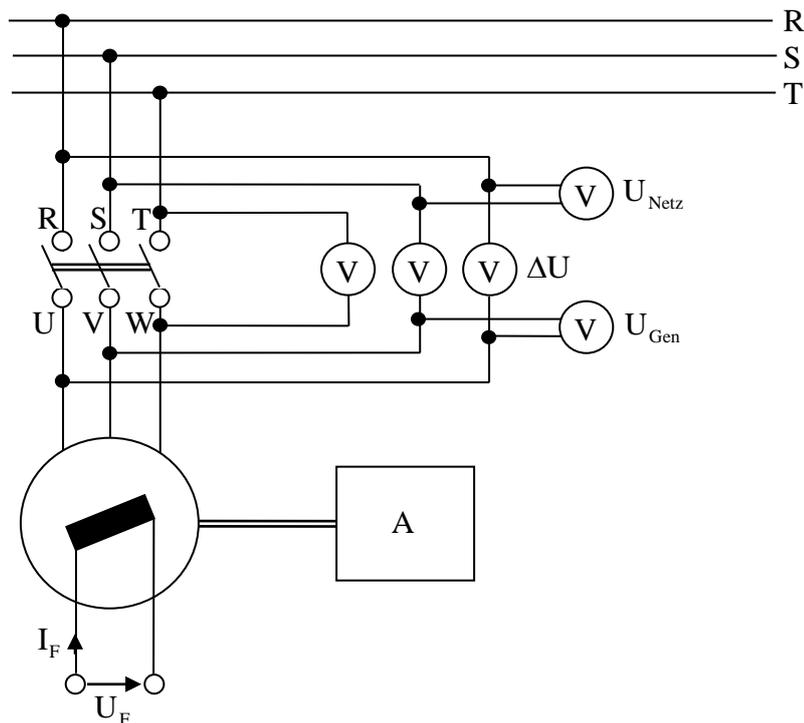
5.3 Betrieb am starren Netz

1. Parallelschalten zum Netz

Die Synchronmaschine darf nur dann an das starre Netz konstanter Spannung und Frequenz geschaltet werden, wenn die folgenden Synchronisierungsbedingungen erfüllt sind:

- Die Synchronmaschine wird von einer Antriebsmaschine auf die Synchrondrehzahl gebracht: $n = n_0$.
- Der Erregerstrom I_F der Synchronmaschine wird so eingestellt, dass die Generatorspannung gleich der Netzspannung ist: $U_{\text{Gen}} = U_{\text{Netz}}$.
- Die Phasenfolge der Klemmenspannungen von Generator und Netz muss übereinstimmen: RST – UVW.
- Die Phasenlage der Spannungssysteme von Generator und Netz muss gleich sein, d.h. die Spannungsdifferenz an den zusammenzuschaltenden Klemmen muss gleich Null sein: $\Delta U = 0$.

Wenn diese Synchronisierungsbedingungen nicht erfüllt sind, muss nach dem Aufschalten der Synchronmaschine auf das Netz mit starken Drehmomentpulsationen und Stromstößen gerechnet werden.



2. Drehmomentbildung

Das Drehmoment ergibt sich aus der Drehfeldleistung dividiert durch die synchrone Winkelgeschwindigkeit. Bei Vernachlässigung der Statorverluste ($R_1 = 0$) entspricht die aufgenommene Wirkleistung gerade der Drehfeldleistung:

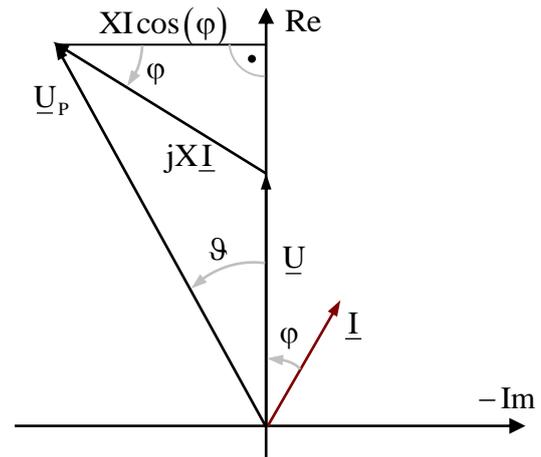
$$T = \frac{P_D}{\Omega_0} = \frac{3UI \cos(\varphi)}{\omega_1/p}$$

Aus dem Zeigerdiagramm kann man ablesen:

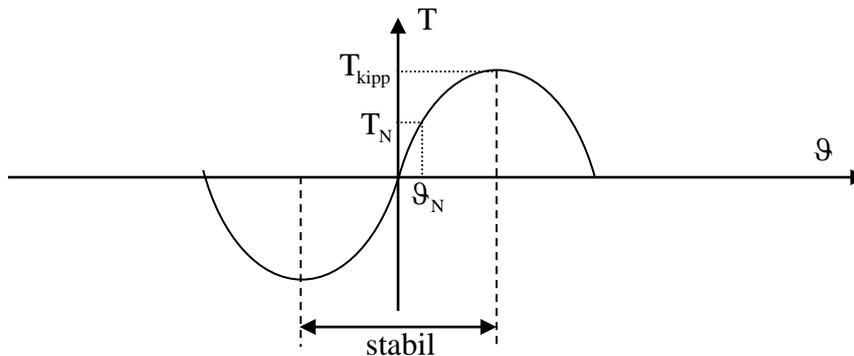
$$\begin{aligned} XI \cos(\varphi) &= U_p \sin(\vartheta) \\ \Rightarrow I \cos(\varphi) &= \frac{U_p}{X} \sin(\vartheta) \end{aligned}$$

Damit folgt für das Drehmoment:

$$T = \frac{3p}{\omega_1} \frac{UU_p}{X} \sin(\vartheta) = T_{\text{kipp}} \sin(\vartheta)$$



Diese Momentengleichung gilt nur für den stationären Betrieb mit $I_F = \text{const.}$ und $n = n_0$.



Generatorbetrieb liegt vor für $\vartheta > 0$, Motorbetrieb ist gegeben für $\vartheta < 0$.

Ein stabiler Betrieb ist nur möglich für $-\pi/2 < \vartheta < \pi/2$: Wird die Belastung langsam gesteigert, so nimmt das Moment und der Polradwinkel ϑ zu, bis die Synchronmaschine bei $\vartheta = \pm \pi/2$ das Kippmoment erreicht und außer Tritt fällt. Als Motor bleibt sie stehen, als Generator geht sie durch. Es treten starke Pendelmomente auf, die mit großen Stromstößen verbunden sind. Die Synchronmaschine muss dann sofort vom Netz getrennt werden.

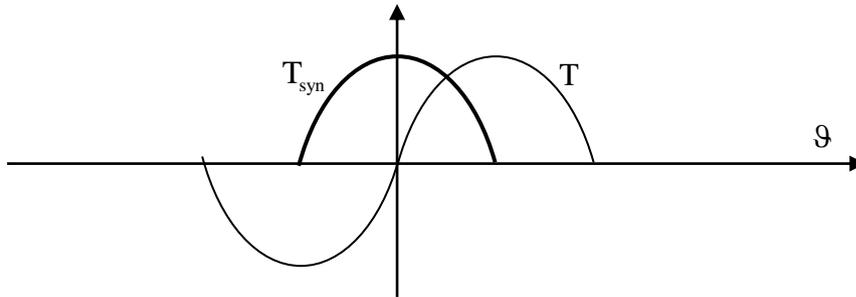
Für die Überlastfähigkeit der Synchronmaschine gilt:

$$\frac{T_{\text{kipp}}}{T_N} = \frac{\frac{3p}{\omega_1} \frac{U_N U_P}{X}}{\frac{3p}{\omega_1} U_N I_N \cos(\varphi_N)} = \frac{U_P}{X I_N \cos(\varphi_N)}$$

In der Praxis wird häufig für die Überlastfähigkeit $\frac{T_{\text{kipp}}}{T_N} > 1,6$ gefordert.

Ein Maß für die Stabilität im stationären Betrieb ist das synchronisierende Moment:

$$T_{\text{syn}} = \frac{dT}{d\vartheta} = T_{\text{kipp}} \cos(\vartheta) > 0$$



Je größer $dT/d\vartheta$ ist, desto größer ist das rückführende Moment T_{syn} nach einem Laststoß. Je kleiner der Betrag von ϑ ist, desto stabiler ist der Betriebspunkt.

3. Betriebsbereiche

Es gilt:

$$\underline{U}_p = U_p e^{j\vartheta} = U_p (\cos(\vartheta) + j\sin(\vartheta))$$

$$\underline{I} = I e^{-j\varphi} = I (\cos(\varphi) - j\sin(\varphi))$$

Dann folgt (falls die Klemmenspannung \underline{U} in die reelle Achse gelegt wird):

$$\underline{U}_p = \underline{U} + jX\underline{I}$$

$$\Rightarrow U_p (\cos(\vartheta) + j\sin(\vartheta)) = U + jXI (\cos(\varphi) - j\sin(\varphi))$$

In Real- und Imaginärteil zerlegt gilt dann:

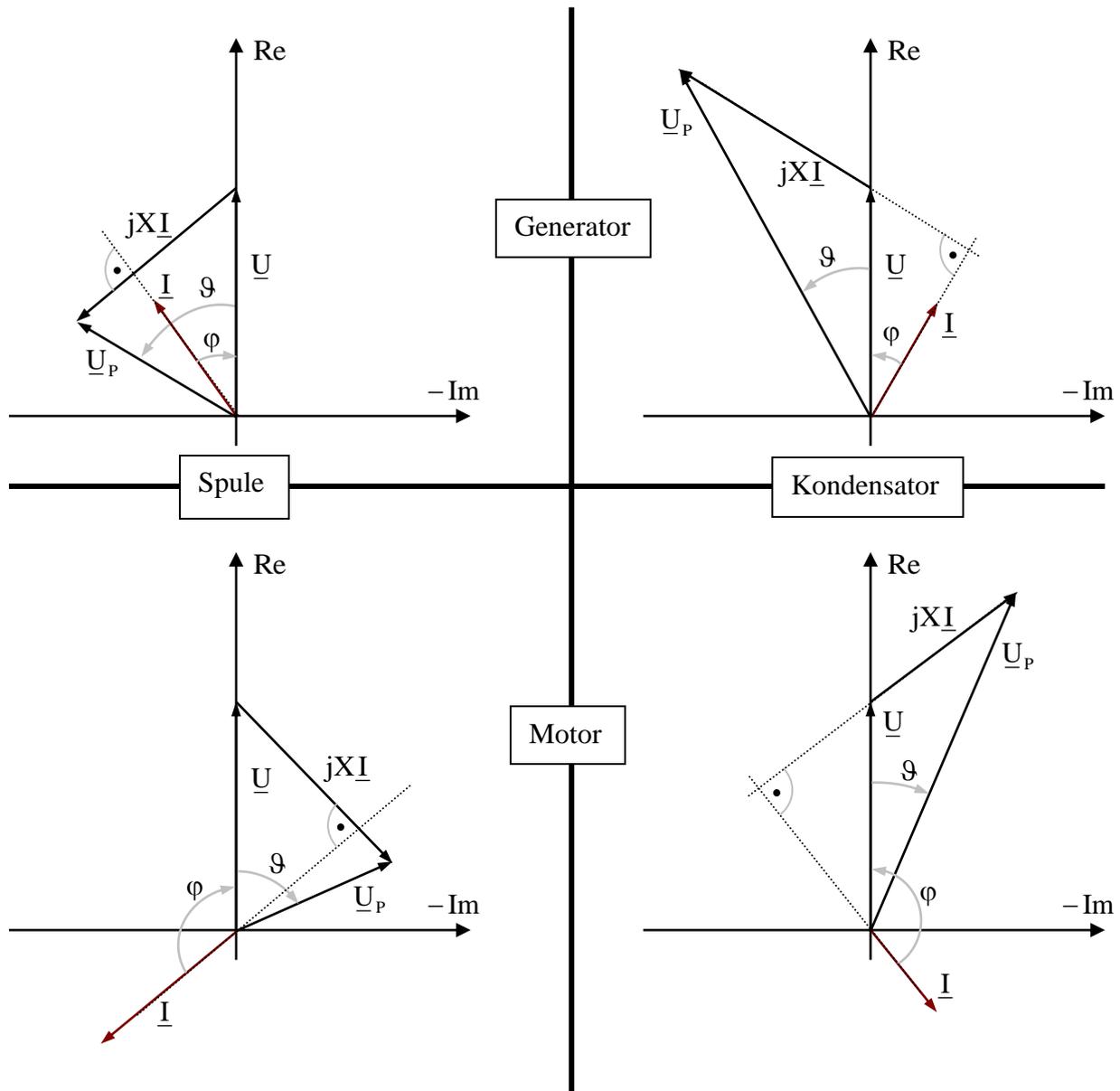
$$U_p \cos(\vartheta) = U + XI \sin(\varphi) \quad \Rightarrow \quad I \sin(\varphi) = \frac{U_p \cos(\vartheta) - U}{X}$$

$$U_p \sin(\vartheta) = XI \cos(\varphi) \quad \Rightarrow \quad I \cos(\varphi) = \frac{U_p \sin(\vartheta)}{X}$$

Es ergeben sich nun 4 Betriebsbereiche, die im Erzeugerzählpeilsystem folgendes Aussehen haben:

- $I \cos(\varphi) > 0$ ($\vartheta > 0$): Wirkleistungsabgabe (Generator)
- $I \cos(\varphi) < 0$ ($\vartheta < 0$): Wirkleistungsaufnahme (Motor)
- $I \sin(\varphi) > 0$ ($U_p \cos(\vartheta) > U$): Blindleistungsabgabe (übererregt)
Maschine wirkt als Kondensator
- $I \sin(\varphi) < 0$ ($U_p \cos(\vartheta) < U$): Blindleistungsaufnahme (untererregt)
Maschine wirkt als Drosselspule

Die charakteristischen Zeigerbilder sind im Folgenden dargestellt:



Die Wirkleistung wird allein durch den Antrieb der Turbine (Generatorbetrieb) bzw. durch das Widerstandsmoment der Last (Motorbetrieb) bestimmt.

Die Blindleistung wird unabhängig hiervon allein durch die Erregung eingestellt (bei Übererregung Blindleistungsabgabe, bei Untererregung Blindleistungsaufnahme).

Manchmal werden Synchronmaschinen ohne Wirkleistung als reine Blindleistungserzeuger im Phasenschieberbetrieb eingesetzt, um den induktiven Blindleistungsbedarf von Transformatoren und Asynchronmaschinen vor Ort zu decken (und damit das Netz zu entlasten). Hierbei liegt die Polradspannung \underline{U}_p in Phase mit der Klemmenspannung \underline{U} ; der Strom \underline{I} ist ein reiner Blindstrom (die Maschine kann im Phasenschieberbetrieb übererregt oder untererregt sein). Im Leerlauf ist der Strom $\underline{I} = 0$ und \underline{U}_p und \underline{U} sind identisch (gleiche Amplitude und Phase).

4. Betriebsgrenzen

Aus

$$\underline{U}_p = \underline{U} + jX\underline{I}$$

und

$$\underline{U}_p = U_p e^{j\vartheta}, \quad \underline{U} = U_{N,\text{Strang}}$$

folgt für den Strom:

$$\underline{I} = \frac{U_p e^{j\vartheta} - U_{N,\text{Strang}}}{jX} = j \frac{U_{N,\text{Strang}}}{X} - j e^{j\vartheta} \frac{U_p}{X}$$

$$\Rightarrow \frac{\underline{I}}{I_N} = e^{j\frac{\pi}{2}} \frac{U_{N,\text{Strang}}}{I_N X} + e^{j\left(-\frac{\pi}{2} + \vartheta\right)} \frac{U_p}{U_{N,\text{Strang}}} \frac{U_{N,\text{Strang}}}{I_N X}$$

Mit $U_p \sim I_F$ und $U_p (I_F = I_{F,0}) = U_{N,\text{Strang}}$ (Leerlauf) folgt:

$$\frac{U_p}{U_{N,\text{Strang}}} = \frac{I_F}{I_{F,0}}$$

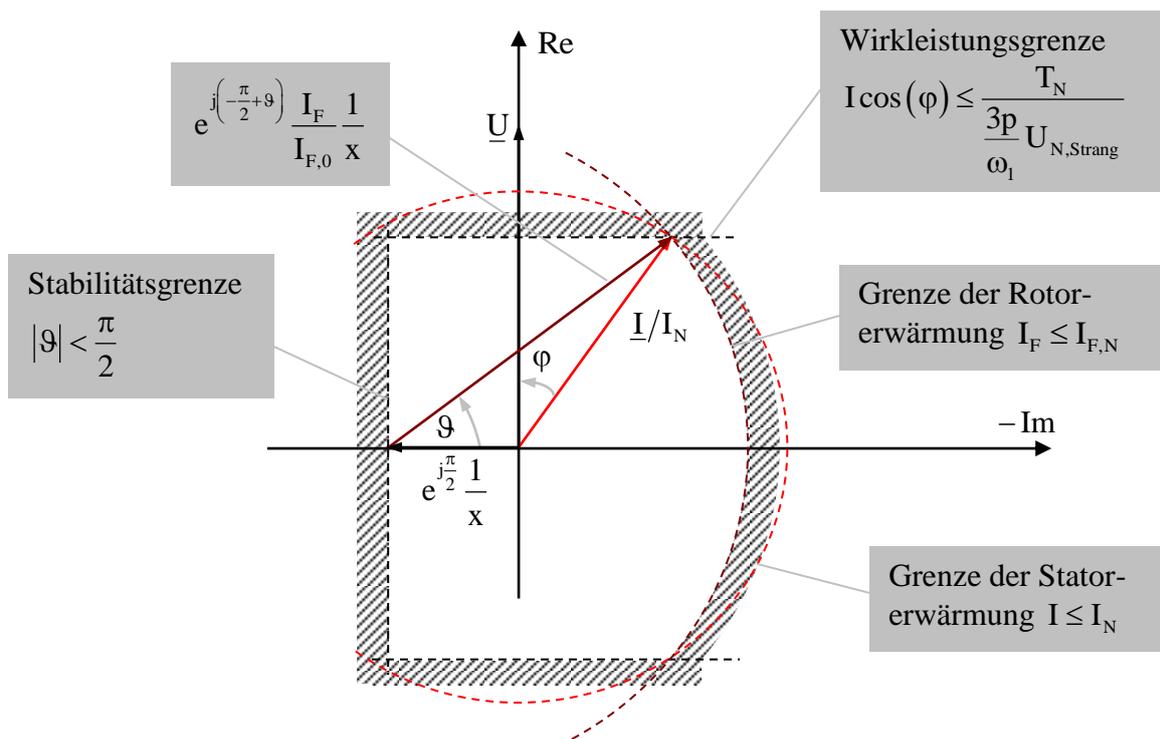
Die auf die Nennimpedanz bezogene Reaktanz X ist:

$$x = \frac{X}{U_{N,\text{Strang}}/I_N} = \frac{I_N X}{U_{N,\text{Strang}}}$$

Also folgt für den Strom:

$$\frac{\underline{I}}{I_N} = e^{j\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x} + e^{j\left(-\frac{\pi}{2} + \vartheta\right)} \frac{I_F}{I_{F,0}} \frac{1}{x}$$

Aus dieser Gleichung kann nun das Stromdiagramm der Synchronmaschine mit den Betriebsgrenzen aufgezeichnet werden:



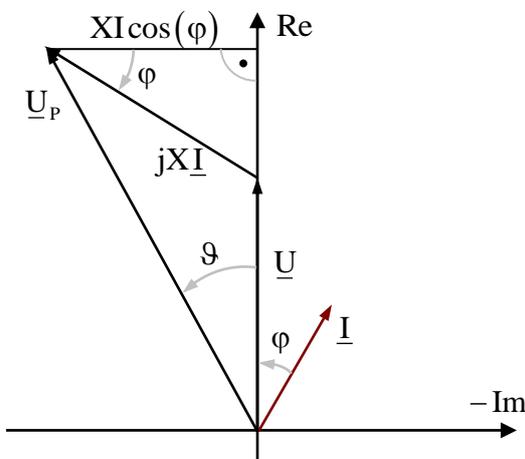
5.4 Inselbetrieb

1. Belastungskennlinien

Wird eine einzelne Synchronmaschine als Generator betrieben und mit Verbrauchern belastet, so spricht man von einem Inselbetrieb. Ein solcher Betrieb findet typischerweise dort statt, wo der Anschluss an ein versorgendes Netz über weite Entfernungen realisiert werden müsste und demzufolge unverhältnismäßig hohe Kosten verursachen würde. Häufig werden Synchronmaschinen im Inselbetrieb von Windkraft- oder Laufwasseranlagen angetrieben.

Im Gegensatz zur bisherigen Betrachtungsweise kann nun nicht mehr ein starres Netz vorausgesetzt werden, vielmehr ändert sich die Spannung an den Klemmen des Generators (bei konstantem Erregerstrom) mit der Belastung.

Es kann zunächst wieder das bekannte Zeigerdiagramm der Synchronmaschine zugrunde gelegt werden:



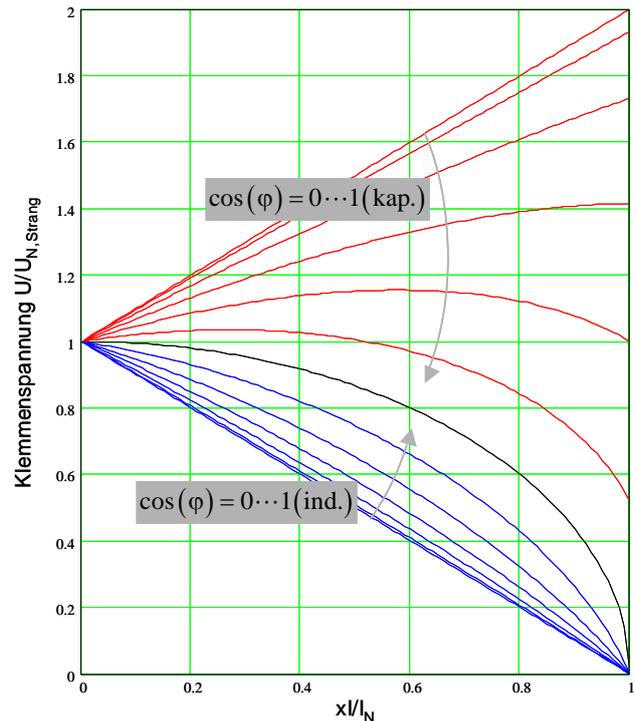
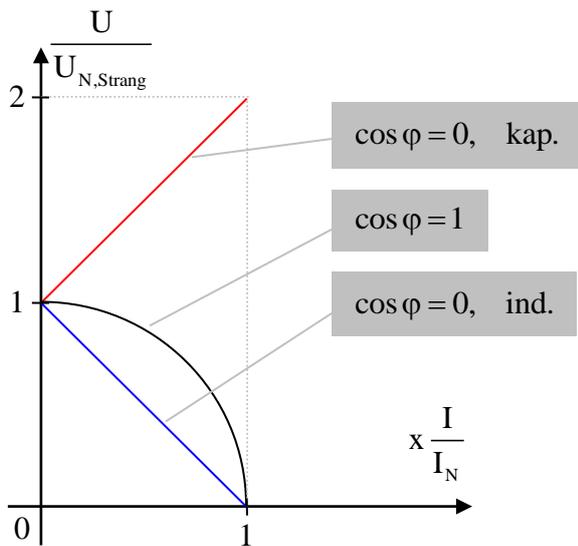
Aus diesem Zeigerdiagramm folgt:

$$\begin{aligned} (U + XI \sin(\varphi))^2 + (XI \cos(\varphi))^2 &= U_P^2 \\ \Rightarrow U^2 + 2UXI \sin(\varphi) + (XI)^2 &= U_P^2 \end{aligned}$$

Für $n = n_0$ und $I_F = I_{F,0}$ gilt: $U_P = U_{N,Strang}$ (diese Spannung ist ja im Leerlauf der Synchronmaschine an den Klemmen messbar). Dann folgt weiter:

$$\begin{aligned} U^2 + 2UXI \sin(\varphi) + (XI)^2 &= U_{N,Strang}^2 \\ \Rightarrow \left(\frac{U}{U_{N,Strang}} \right)^2 + 2 \frac{U}{U_{N,Strang}} \frac{XI}{U_{N,Strang}} \sin(\varphi) + \left(\frac{XI}{U_{N,Strang}} \right)^2 &= 1 \\ \Rightarrow \left(\frac{U}{U_{N,Strang}} \right)^2 + 2 \frac{U}{U_{N,Strang}} \times \frac{I}{I_N} \sin(\varphi) + \left(x \frac{I}{I_N} \right)^2 &= 1 \end{aligned}$$

Hiermit sind die so genannten Belastungskennlinien (Klemmenspannung U des Generators in Abhängigkeit vom Laststrom I) der Synchronmaschine im Inselbetrieb bestimmt. Das folgende Bild zeigt die Klemmenspannung U als Funktion des Laststromes I für verschiedene Belastungsarten $\cos \varphi$.



Bei ohmsch-induktiver Last sinkt also mit zunehmender Belastung die Klemmenspannung ab, bei rein kapazitiver Last steigt die Klemmenspannung mit zunehmender Belastung an (bei ohmsch-kapazitiver Last mit Phasenwinkeln kleiner als $30^\circ \hat{=} \frac{\pi}{6}$ kann, abhängig von der Größe des Belastungsstromes, auch ein Abfall der Klemmenspannung verzeichnet werden).

2. Regelungskennlinien

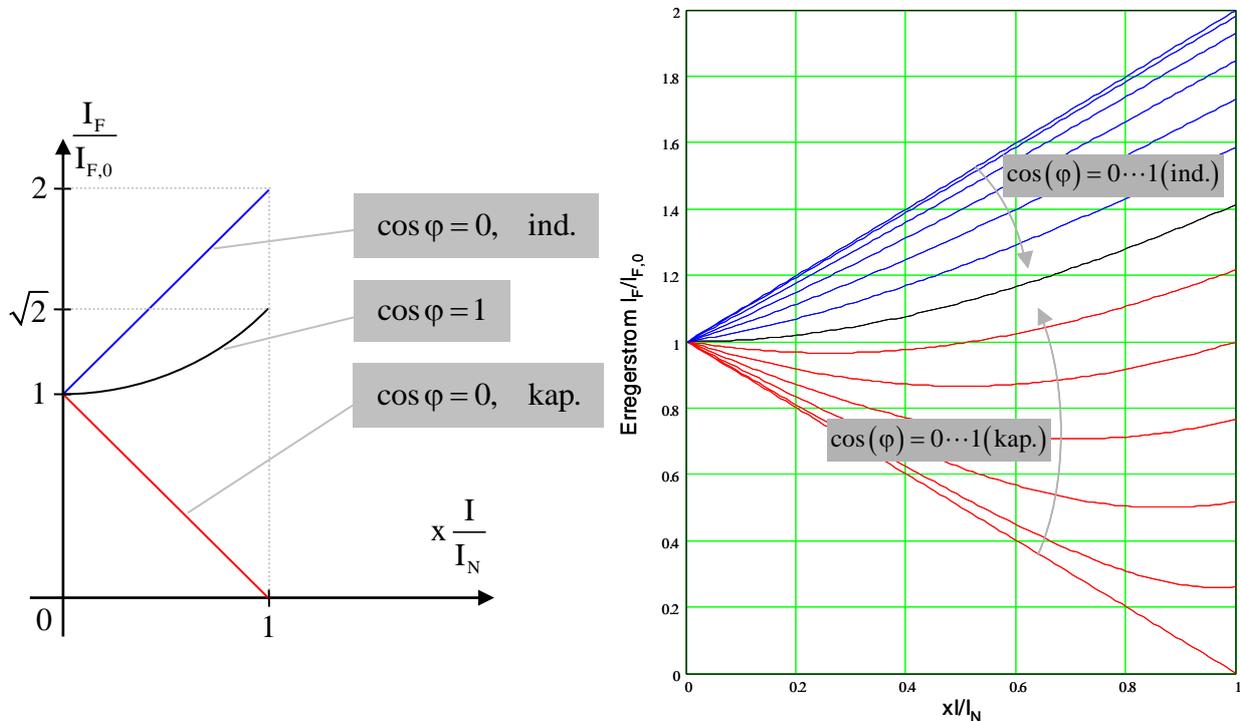
Man möchte nun auch in Inselnetzen dem Verbraucher eine konstante Spannung, unabhängig von der Belastung, zur Verfügung stellen. Deshalb muss der Erregerstrom in Abhängigkeit von der Last (Amplitude und Phasenlage des Laststromes) geregelt werden. Aus dem Zeigerdiagramm folgt mit der Forderung $U = U_{N,Strang}$:

$$U_{N,Strang}^2 + 2U_{N,Strang}XI \sin(\varphi) + (XI)^2 = U_P^2$$

Mit $\frac{U_P}{U_{N,Strang}} = \frac{I_F}{I_{F,0}}$ folgt weiter:

$$\begin{aligned} \frac{I_F}{I_{F,0}} &= \sqrt{1 + \frac{2XI \sin(\varphi)}{U_{N,Strang}} + \left(\frac{XI}{U_{N,Strang}}\right)^2} \\ &= \sqrt{1 + 2x \frac{I}{I_N} \sin(\varphi) + \left(x \frac{I}{I_N}\right)^2} \end{aligned}$$

Hiermit sind die so genannten Regelungskennlinien (Erregerstrom I_F des Generators in Abhängigkeit vom Laststrom I) der Synchronmaschine im Inselbetrieb bestimmt, um bei synchroner Drehzahl $n = n_0$ die Klemmenspannung auf dem Nennwert konstant zu halten. Das folgende Bild zeigt den Erregerstrom I_F als Funktion des Laststromes I für verschiedene Belastungsarten $\cos \varphi$.



Bei ohmsch-induktiver Belastung muss also die Erregung verstärkt werden, um die Klemmenspannung bei zunehmender Belastung konstant zu halten; bei rein kapazitiver Last muss die Erregung verringert werden (bei ohmsch-kapazitiver Last mit Phasenwinkeln kleiner als $30^\circ \hat{=} \frac{\pi}{6}$ kann, abhängig von der Größe des Belastungsstromes, auch ein Anheben der Erregung notwendig werden).

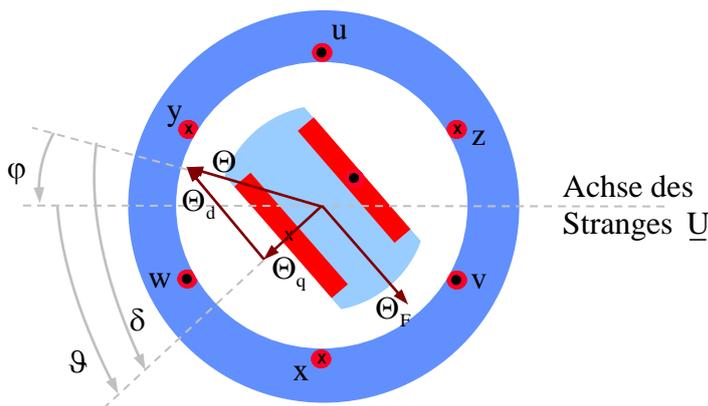
Diese Abhängigkeit des Erregerstromes von der Höhe und Art der Belastung gilt natürlich auch für den Betrieb der Synchronmaschine an konstanter Spannung, da auch dann $U = U_{N,Strang}$ gilt.

5.5 Schenkelpolsynchronmaschine

Aufgrund der ausgeprägten Einzelpole ist der Luftspalt am Umfang der Schenkelpolmaschine (im Gegensatz zur Asynchronmaschine oder Vollpol-Synchronmaschine) nicht konstant. Deshalb ist eine einfache Addition der Drehdurchflutungen von Stator und Rotor zur Ermittlung des resultierenden Luftspaltfeldes nicht mehr erlaubt. Man muss vielmehr die Statordrehdurchflutung in je eine Komponente parallel zur Polachse (d-Achse, direct axis) und senkrecht zur Polachse (q-Achse, quadrature axis) zerlegen:

$$\Theta_d = \Theta \sin(\delta)$$

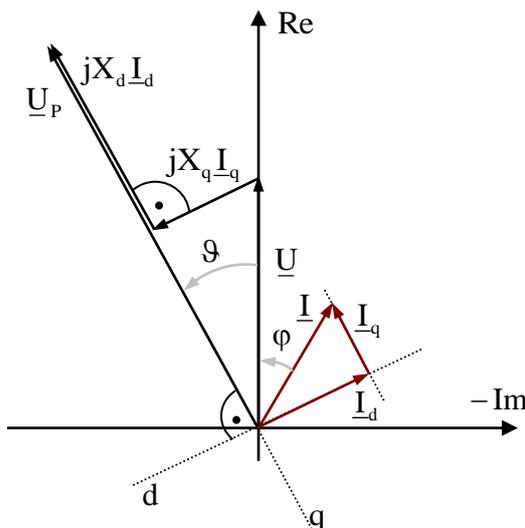
$$\Theta_q = \Theta \cos(\delta)$$



Ebenso muss auch die Hauptreaktanz nach d- und q-Achse getrennt werden (wegen der unterschiedlichen Luftspaltbreiten in d- und q-Achse):

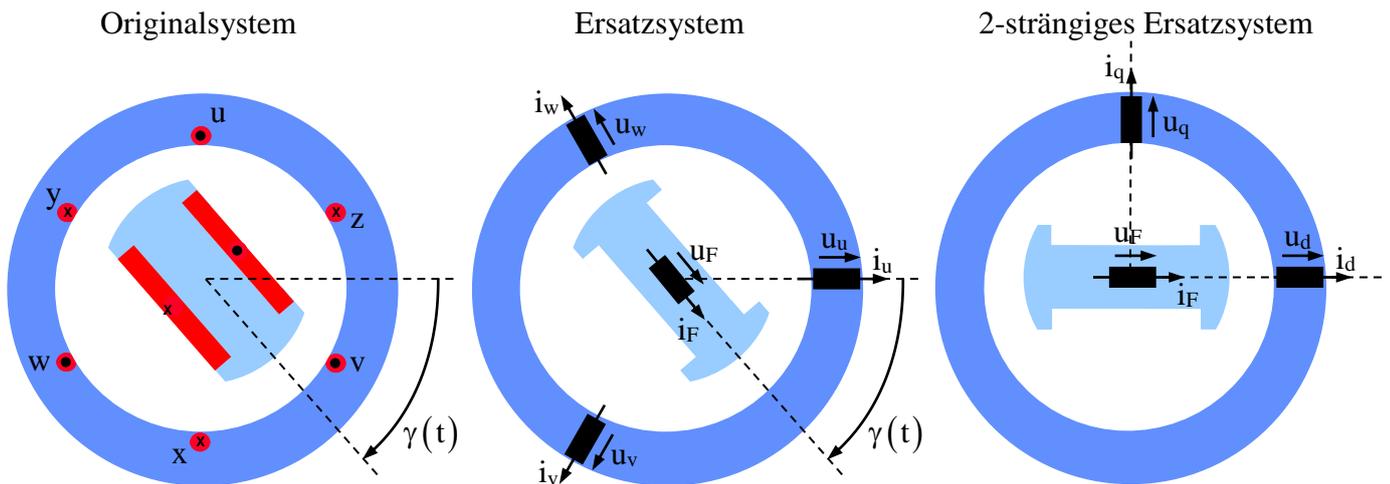
$$\begin{aligned} X_d &= X_{hd} + X_{l\sigma} \\ X_q &= X_{hq} + X_{l\sigma}, \quad X_{hq} < X_{hd} \end{aligned}$$

Nun kann das Zeigerdiagramm aufgezeichnet werden (der Statorwiderstand R_1 wird weiterhin vernachlässigt):



Durch die Zerlegung der Statordurchflutung in ihre Komponenten bestimmt man die Ankerwirkung getrennt für die d- und q-Richtung und überlagert das Ergebnis.

Aus dem Originalsystem mit drei Statorsträngen erzeugt man sich also ein zweisträngiges Ersatzsystem:



Man kann die Hauptreaktanzen (Synchroreaktanzen) X_d und X_q messtechnisch bestimmen: Dazu wird die Ständerwicklung an Spannung gelegt und der Läufer bei offener Erregerwicklung mit fast synchroner Drehzahl angetrieben. Durch den geringen Schlupf zwischen Ständerdrehfeld und Polrad stimmen abwechselnd die jeweiligen Achsen überein oder stehen senkrecht zueinander. Die aus dem Quotient der oszillographierten Strangwerte von Spannung und Strom errechnete Reaktanz pulsiert also zwischen den Extremwerten X_d und X_q .

Führt man diese Messung mit nur einem Strang und im Stillstand durch, so wird das Ergebnis durch die kurzgeschlossene Dämpferwicklung und die Wirbelströme in den massiven Eisenteilen verfälscht. Die gemessenen Werte sind zu klein.

Zerlegt man die Spannung \underline{U} in die Komponenten in d- und q-Richtung, so ergibt sich (siehe obiges Zeigerdiagramm):

$$\underline{U} \cos(\vartheta) e^{j\vartheta} = \underline{U}_p - jX_d \underline{I}_d$$

$$j\underline{U} \sin(\vartheta) e^{j\vartheta} = jX_q \underline{I}_q$$

Hieraus folgt nun für den Statorstrom:

$$\underline{I} = \underline{I}_d + \underline{I}_q = \frac{\underline{U} \cos(\vartheta) e^{j\vartheta} - \underline{U}_p}{-jX_d} + \frac{j\underline{U} \sin(\vartheta) e^{j\vartheta}}{jX_q}$$

Mit $e^{j\vartheta} = \cos(\vartheta) + j \cdot \sin(\vartheta)$ folgt weiter:

$$\begin{aligned} \underline{I} &= j \frac{\underline{U} \cos(\vartheta) (\cos(\vartheta) + j \cdot \sin(\vartheta)) - \underline{U}_p}{X_d} + \frac{\underline{U} \sin(\vartheta) (\cos(\vartheta) + j \cdot \sin(\vartheta))}{X_q} \\ &= \frac{1}{X_d} (j\underline{U} \cos^2(\vartheta) - \underline{U} \cos(\vartheta) \sin(\vartheta) - j\underline{U}_p) + \frac{1}{X_q} (\underline{U} \cos(\vartheta) \sin(\vartheta) + j\underline{U} \sin^2(\vartheta)) \end{aligned}$$

Mit $\cos(x) \sin(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$ gilt dann:

$$\begin{aligned} \underline{I} &= \frac{1}{X_d} \left(j\underline{U} \cos^2(\vartheta) - \frac{1}{2} \underline{U} \sin(2\vartheta) - j\underline{U}_p \right) + \frac{1}{X_q} \left(\frac{1}{2} \underline{U} \sin(2\vartheta) + j\underline{U} \sin^2(\vartheta) \right) \\ &= \frac{1}{2} \underline{U} \sin(2\vartheta) \left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right) + j \left(\underline{U} \cos^2(\vartheta) \frac{1}{X_d} + \underline{U} \sin^2(\vartheta) \frac{1}{X_q} - \underline{U}_p \frac{1}{X_d} \right) \end{aligned}$$

Eine weitere Umformung mit $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$ und $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$ ergibt:

$$\begin{aligned} \underline{I} &= \frac{1}{2} \underline{U} \sin(2\vartheta) \left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right) + j \left(\frac{1}{2} \underline{U} (1 + \cos(2\vartheta)) \frac{1}{X_d} + \frac{1}{2} \underline{U} (1 - \cos(2\vartheta)) \frac{1}{X_q} - \underline{U}_p \frac{1}{X_d} \right) \\ &= \frac{1}{2} \underline{U} \sin(2\vartheta) \left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right) + j \left(\frac{1}{2} \underline{U} \left(\frac{1}{X_d} + \frac{1}{X_q} \right) + \frac{1}{2} \underline{U} \cos(2\vartheta) \left(\frac{1}{X_d} - \frac{1}{X_q} \right) - \underline{U}_p \frac{1}{X_d} \right) \end{aligned}$$

Wählt man nun die Klemmenspannung reell ($\underline{U} = U$, siehe Zeigerbild), so gilt mit $\underline{U}_p = U_p \cos(\vartheta) + j \cdot U_p \sin(\vartheta)$ und $\underline{I} = I \cdot e^{-j\varphi} = I [\cos(\varphi) - j \cdot \sin(\varphi)]$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{\underline{I}\} &= I \cos(\varphi) = \frac{1}{2} U \sin(2\vartheta) \left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right) + U_p \sin(\vartheta) \frac{1}{X_d} \\ \operatorname{Im}\{\underline{I}\} &= -I \sin(\varphi) = \frac{1}{2} U \left(\frac{1}{X_q} + \frac{1}{X_d} \right) - \frac{1}{2} U \cos(2\vartheta) \left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right) - U_p \cos(\vartheta) \frac{1}{X_d} \end{aligned}$$

Bei Vernachlässigung der Verluste kann nun das Drehmoment aus der Drehfeldleistung ermittelt werden:

$$\begin{aligned} T &= \frac{P_D}{2\pi n_0} = \frac{P_1}{\omega_1/p} = \frac{3UI \cos(\varphi)}{\omega_1/p} \\ &= \frac{3p}{\omega_1} \left(\frac{UU_p}{X_d} \sin(\vartheta) + \frac{U^2}{2} \left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right) \sin(2\vartheta) \right) \end{aligned}$$

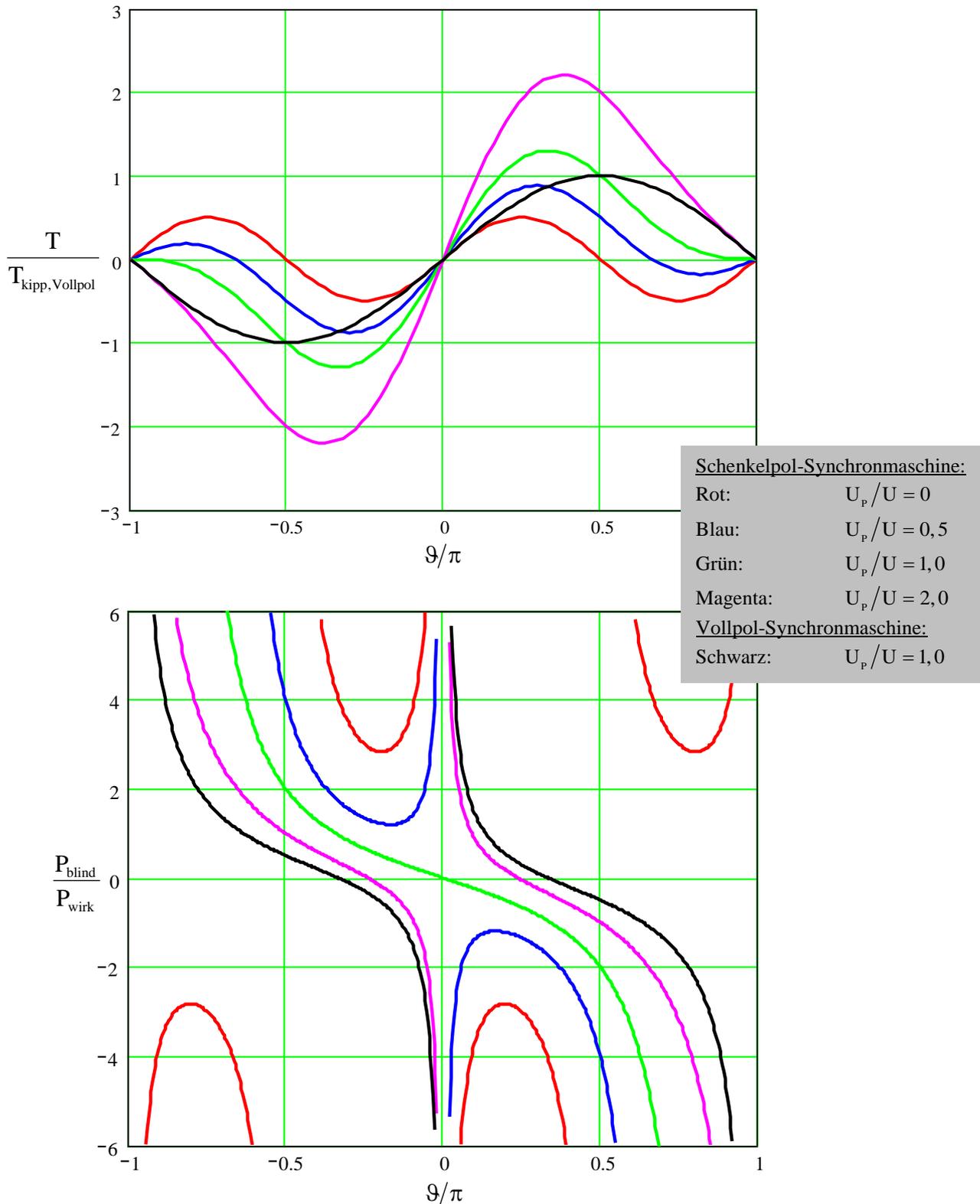
Der erste Summand entspricht dem Drehmoment der Vollpol-Synchronmaschine und ist erregungsabhängig, der zweite Summand ist das so genannte Reaktionsmoment und ist erregungsunabhängig (hervorgerufen durch den Unterschied der magnetischen Leitwerte in d- und q-Achse). Durch dieses Reaktionsmoment tritt das Kippmoment bereits bei kleineren Polradwinkeln als $\pi/2$ auf, siehe die folgende Grafik. Außerdem erkennt man dort auch, dass die Schenkelpolmaschine aufgrund des zusätzlichen Reaktionsmomentes bei gleicher Erregung ein höheres Kippmoment liefert als die Vollpolmaschine (angenommen war $X_{d,\text{Schenkelpol}} = X_{\text{Vollpol}}$). Ebenso wird deutlich, dass bei dem angenommenen Verhältnis $X_d = 2X_q$ das Kippmoment ohne Erregung (d.h. das Reaktions-Kippmoment) nur halb so groß ist wie das Kippmoment der Vollpol-Synchronmaschine.

Aus den Gleichungen für Real- und Imaginärteil des Statorstromes kann auch das Verhältnis von Blindleistung zu Wirkleistung (als Funktion des Polradwinkels und der Erregung) angegeben werden:

$$\frac{P_{\text{blind}}}{P_{\text{wirk}}} = \frac{UI \sin(\varphi)}{UI \cos(\varphi)} = \frac{-\left(\frac{1}{X_q} + \frac{1}{X_d} \right) + \cos(2\vartheta) \left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right) + 2 \frac{U_p}{U} \cos(\vartheta) \frac{1}{X_d}}{\sin(2\vartheta) \left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right) + 2 \frac{U_p}{U} \sin(\vartheta) \frac{1}{X_d}}$$

Dargestellt ist im Folgenden über dem Polradwinkel ϑ für verschiedene Erregungen U_p/U :

- das Drehmoment der Schenkelpolmaschine bezogen auf das Kippmoment der Vollpolmaschine bei Nennerregung ($U_p/U = 1,0$) und vergleichbaren Maschinendaten ($X_{d,Schenkelpol} = X_{Vollpol}$) und
- das Verhältnis von Blind- zu Wirkleistung.



6 Permanentmagneterregte Maschine

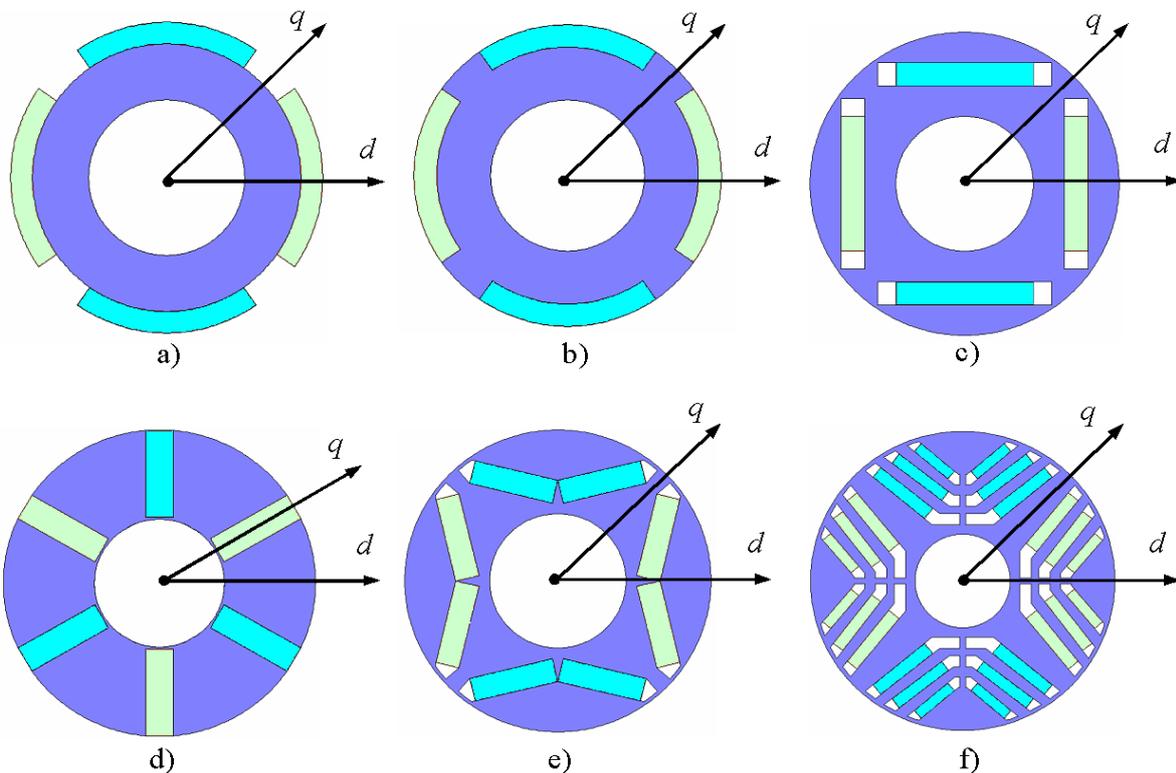
6.1 Permanentmagneterregte Synchronmaschine

1. Allgemeines

Ersetzt man bei der Synchronmaschine die Gleichstromerregung (die ja ein zeitlich konstantes magnetisches Feld erzeugt) durch eine Permanentmagneterregung, so spart man

- Erregerspannungsquelle,
- Erregerwicklung und
- Stromzuführung über Schleifringe und Bürsten.

Man verzichtet allerdings auf die Regelbarkeit des Erregerfeldes. Im folgenden Bild sind verschiedene Möglichkeiten zur Anordnung der Magnete dargestellt.



2. Linestart-Motor

Wird eine solche permanentmagneterregte Synchronmaschine zusätzlich mit einem Anlaufkäfig ausgestattet, so spricht man von einem „Linestart-Motor“: Der Motor wird direkt an die Netzspannung geschaltet; der Hochlauf geschieht als Asynchronmotor. In der Nähe der Synchrondrehzahl erfolgt das Eintrittfallen in den Synchronismus. Danach arbeitet der Motor als Synchronmaschine am Netz.

Die Vorteile Selbstanlauf, guter Leistungsfaktor und hoher Wirkungsgrad erkaufte man sich mit einer geringen Ausnutzung (wegen der Kombination aus zwei Maschinentypen). Anwendung findet der Linestart-Motor bei Antrieben mit hoher Betriebsdauer und geringer Leistung (Pumpen, Lüfter, etc.).

6.2 Elektronisch kommutierter Gleichstrommotor

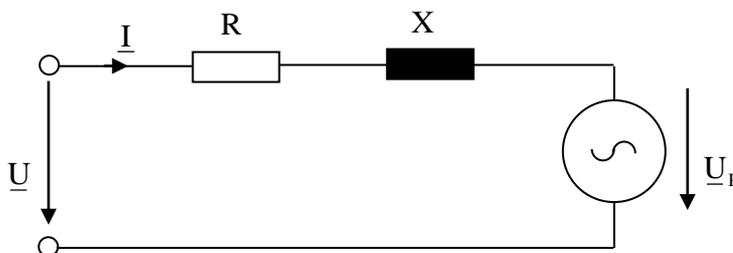
1. Grundlagen:

Wiederum wird die Synchronmaschine mit Permanentmagneten zur Erzeugung des Erregerfeldes ausgestattet, jetzt aber ohne Anlaufkäfig. Die Maschine wird von einem Wechselrichter gespeist, der ein Drehstromsystem zur Verfügung stellt (meistens in Form von block- oder sinusförmigen Strömen).

Zur Verdeutlichung des Betriebsverhaltens kann vom vereinfachten Ersatzschaltbild der Synchronmaschine (Kapitel 5.1) ausgegangen werden, allerdings mit zwei Änderungen:

- Es wird das Verbraucherzählpfeilsystem (VZS) verwendet, weil dieser Maschinentyp meistens als Motor Anwendung findet.
- Der Widerstand R der Statorwicklung wird berücksichtigt, da eine Vernachlässigung (z.B. bei Motoren kleiner Leistung oder Betrieb mit niedrigen Frequenzen) häufig nicht zulässig ist.

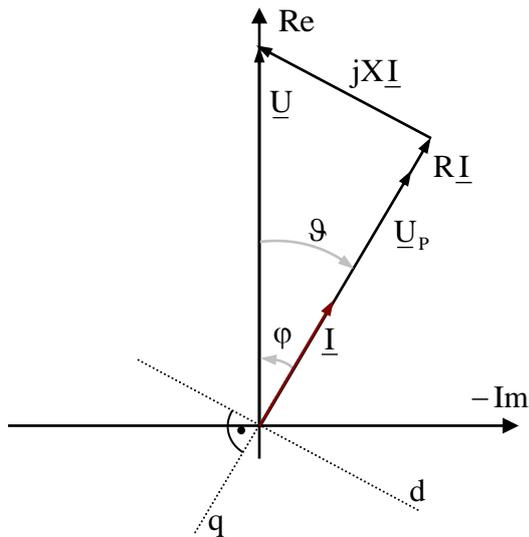
Das Ersatzschaltbild sieht dann wie folgt aus:



Die Grundfrequenz des speisenden Drehstromsystems bestimmt die Frequenz der Drehdurchflutung und damit die Rotordrehzahl. Die Drehdurchflutung bildet zusammen mit dem Feld des permanentmagneterregten Rotors ein zeitlich möglichst konstantes Drehmoment. Die Weiterschaltung des Statorfeldes erfolgt nun mit Hilfe des Wechselrichters rotorstellungsabhängig (polradlageabhängig) so, dass sich zwischen Statorfeld und Rotorfeld ein konstanter Winkel von $\pi/2$ elektrisch einstellt (d.h. $\vartheta = -\varphi$). Somit ist der bereits für die Synchronmaschine definierte „Lastwinkel“ $\delta = \vartheta + \varphi = 0$ (siehe Kapitel 5.1 und 5.5).

Die Polradlage kann hierbei entweder über Sensoren gemessen werden oder aus den Klemmenspannungen und/oder -strömen abgeleitet werden.

Die dargestellte Betriebsweise wird durch das folgende Zeigerdiagramm beschrieben:



Da dieser Maschinentyp meistens als Motor Verwendung findet, sind hier die Verhältnisse im Verbraucherzählpfeilsystem dargestellt.

Es ergibt sich eine Betriebsweise, die nicht mehr der Synchronmaschine, sondern genau der Gleichstrommaschine entspricht:

- Gleichstrommaschine: Ankerdurchflutung und Erregerfeld bilden einen Winkel von $\pi/2$ elektrisch; diese Einstellung geschieht mechanisch mit Hilfe des Kommutators.
- Synchronmaschine: Der Polradwinkel ϑ und der Phasenwinkel φ stellen sich betriebspunktabhängig ein; es wird nicht aktiv die Phasenlage von Rotordurchflutung zu Erregerfeld beeinflusst.
- Elektronisch kommutierte Gleichstrommaschine: Statordurchflutung und Rotorfeld bilden einen Winkel von $\pi/2$ elektrisch; diese Einstellung geschieht elektronisch mit Hilfe des speisenden Wechselrichters.

Die Maschine in der beschriebenen Betriebsweise kann nicht mehr kippen und verhält sich wie eine Gleichstrommaschine. Daher kommen auch die Namen:

- Elektronisch kommutierter Gleichstrommotor (electronically commutated DC-motor, EC-motor)
- Bürstenloser Gleichstrommotor (brushless DC-motor, BLDC-motor).

Bürstenlose Gleichstrommaschinen haben eine sehr gute Dynamik und können einfach geregelt werden. Die bürstenlose Technik ist verschleiß- und wartungsfrei. Diese Art Motoren wird häufig in Werkzeugmaschinen und als Roboterantrieb eingesetzt.

Aus dem Zeigerdiagramm erhält man:

$$\underline{U} = \underline{U}_p + \underline{R}\underline{I} + j\underline{X}\underline{I}$$

Die aufgenommene Wirkleistung ist:

$$P_1 = 3(U_p I + R I^2) = P_D + P_{v,1}$$

Das Drehmoment kann man nun aus der Drehfeldleistung berechnen:

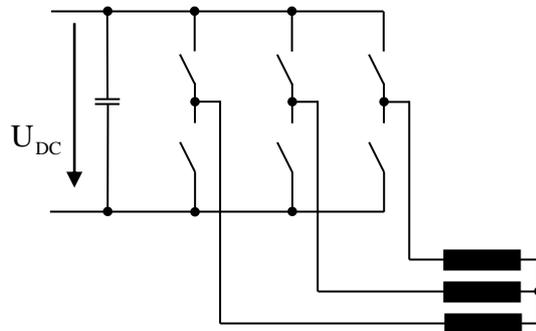
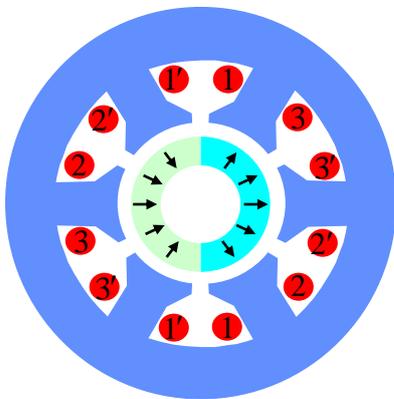
$$T = \frac{P_D}{\omega_1/p} = \frac{3p}{\omega_1} U_p I$$

Um ein gutes Motorbetriebsverhalten zu erzielen (i.a. möchte man ein möglichst konstantes Drehmoment erzeugen), müssen das Permanentmagneterregerfeld, die Statorwicklung und die Motorspeisung sorgfältig aufeinander abgestimmt werden.

Die beiden gebräuchlichsten Stromformen bei bürstenlosen Gleichstrommaschinen werden im Folgenden näher erläutert. Hierbei wird von dreisträngigen Maschinen mit idealisierten Bedingungen ausgegangen, d.h. Streuung, Nutungseinflüsse und Eisenverluste werden vernachlässigt.

2. Bürstenloser Gleichstrommotor mit blockförmigen Strömen:

Zunächst wird ein Motor mit ungesehnter Wicklung (Durchmesserwicklung) und einem zweipoligen ($p = 1$), radial magnetisierten Permanentmagnetring betrachtet:



Die Motorstränge (üblicherweise im Stern verschaltet) werden von einem dreisträngigen Wechselrichter gespeist (hier symbolisiert durch die 6 Schalter), der seine Leistung von einem Gleichspannungszwischenkreis U_{DC} bezieht.

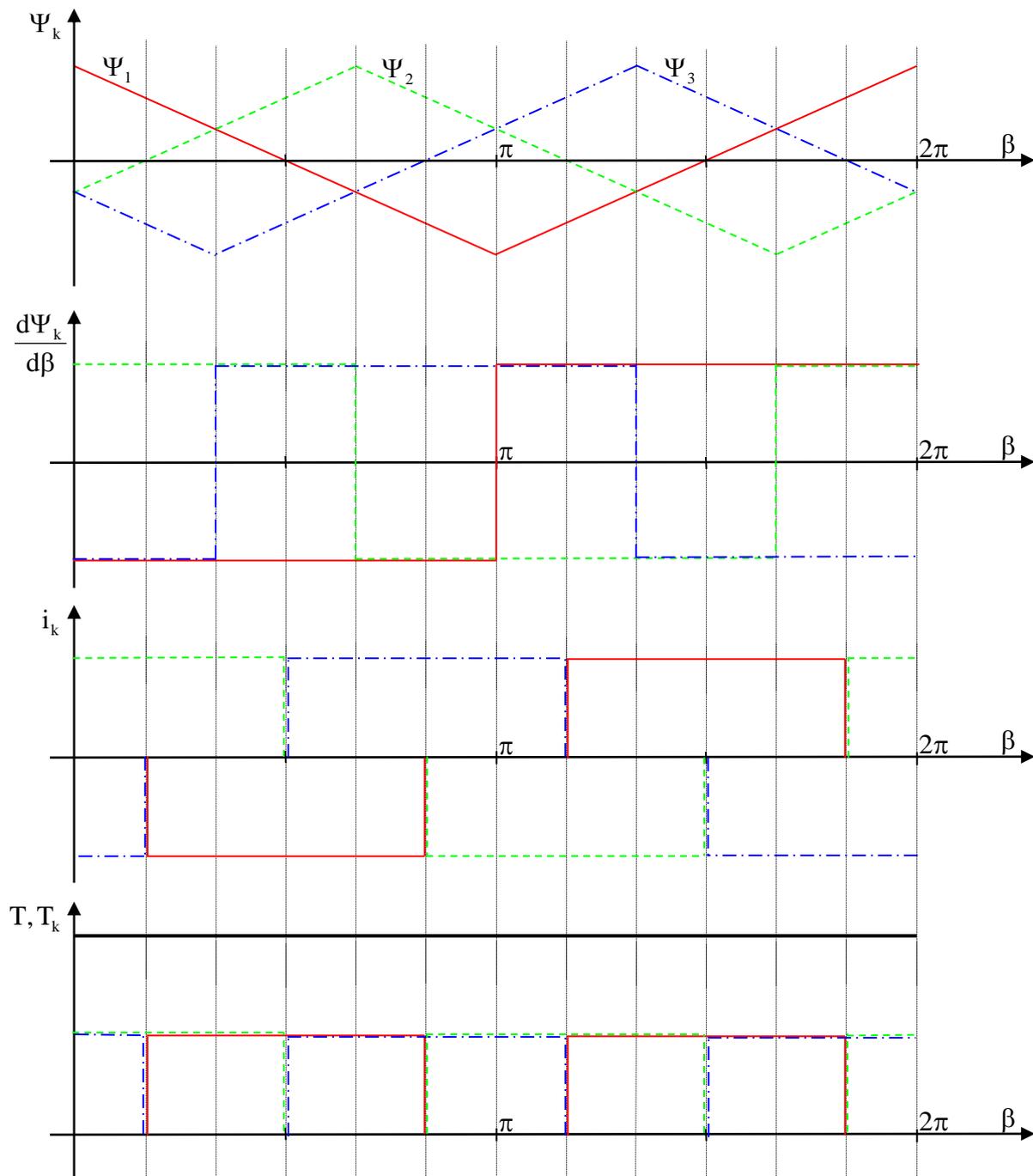
Das Drehmoment soll im Folgenden aus der drehwinkelabhängigen Änderung der Flussverkettung ermittelt werden (im linearen Fall gilt für einen Motorstrang: $T = \frac{\partial}{\partial \alpha} W_{mag}$)

$$\text{und } W_{mag} = \int_0^{\Psi} i d\tilde{\Psi} = \frac{1}{2} i \Psi :$$

$$T = \sum_{k=1}^m T_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \frac{d\Psi_k}{d\alpha} i_k$$

Hierbei ist $\alpha = \beta/p$ der mechanische Winkel (β ist der elektrische Winkel) und m die Anzahl der Motorstränge. In diesem speziellen Fall gilt (wegen $p = 1$) $\alpha = \beta$.

Flussverkettung, Änderung der Flussverkettung, Strom und Drehmoment stellen sich wie folgt dar:



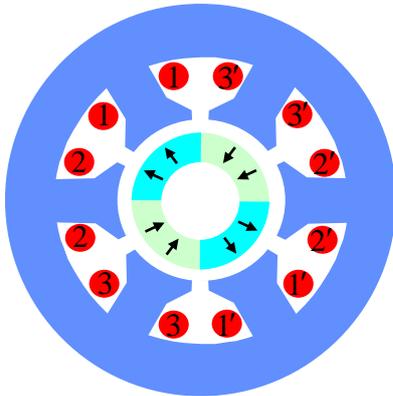
Man erkennt, dass bei blockförmigen Strömen immer nur zwei Stränge stromführend sind. Diese Stromform ist zur Erzielung eines möglichst konstanten Drehmomentes optimal an die radiale Magnetisierung des Permanentmagneten angepasst (bei Vernachlässigung der Nutungseinflüsse).

Für die Erzielung eines möglichst gleichförmigen Drehmomentes dürfen die Strangflussverläufe des bürstenlosen Gleichstrommotors allerdings außerhalb der Einschaltdauer des jeweils zugeordneten Stranges von der dargestellten Form abweichen. Hieraus ergeben sich Freiheitsgrade für die Magnet- bzw. Wicklungsgestaltung. Zum Beispiel bleiben die Drehmomentanteile der einzelnen Stränge und damit auch das gesamte Drehmoment des Motors unverändert, wenn sich der Wert der Ableitung des

verketteten Strangflusses infolge einer Polücke zwischen zwei Magneten oder der magnetischen Streuung zwischen den Magnetpolen an der Sprungstelle im Bereich von $\pm\pi/6$ ändert. Streuungsbedingt trapezförmige Kurven führen daher, solange der konstante Teil der Kurve den kritischen Einschaltwinkelbereich von $2\pi/3$ nicht unterschreitet, bei idealer Rechteckstromeinprägung zu einem konstanten Drehmoment.

Die praktische Realisierung steiler Stromflanken (rechteckförmige Ströme) erfordert jedoch insbesondere im mittleren und oberen Drehzahlbereich bei hohen induzierten Strangspannungen eine große Spannungsreserve des Wechselrichters. Dies führt infolge der erforderlichen Überdimensionierung des Wechselrichters zu einem höheren Kostenaufwand sowie darüber hinaus zu starken, für viele Applikationen unzulässigen „Kommutierungsgeräuschen“. In vielen Fällen wird daher eine Abweichung der Stromkurve von der idealen Rechteckform und damit eine Zunahme der Drehmomentwelligkeit zugunsten niedrigerer Kosten und Schaltgeräusche in Kauf genommen.

Eine andere, weit verbreitete Wicklungsform kann man aus der bisher dargestellten Durchmesserwicklung bei starker Sehnung erhalten: die Wicklung eines Stranges liegt konzentriert um einen Statorzahn, siehe das folgende Bild für einen 4-poligen Motor.



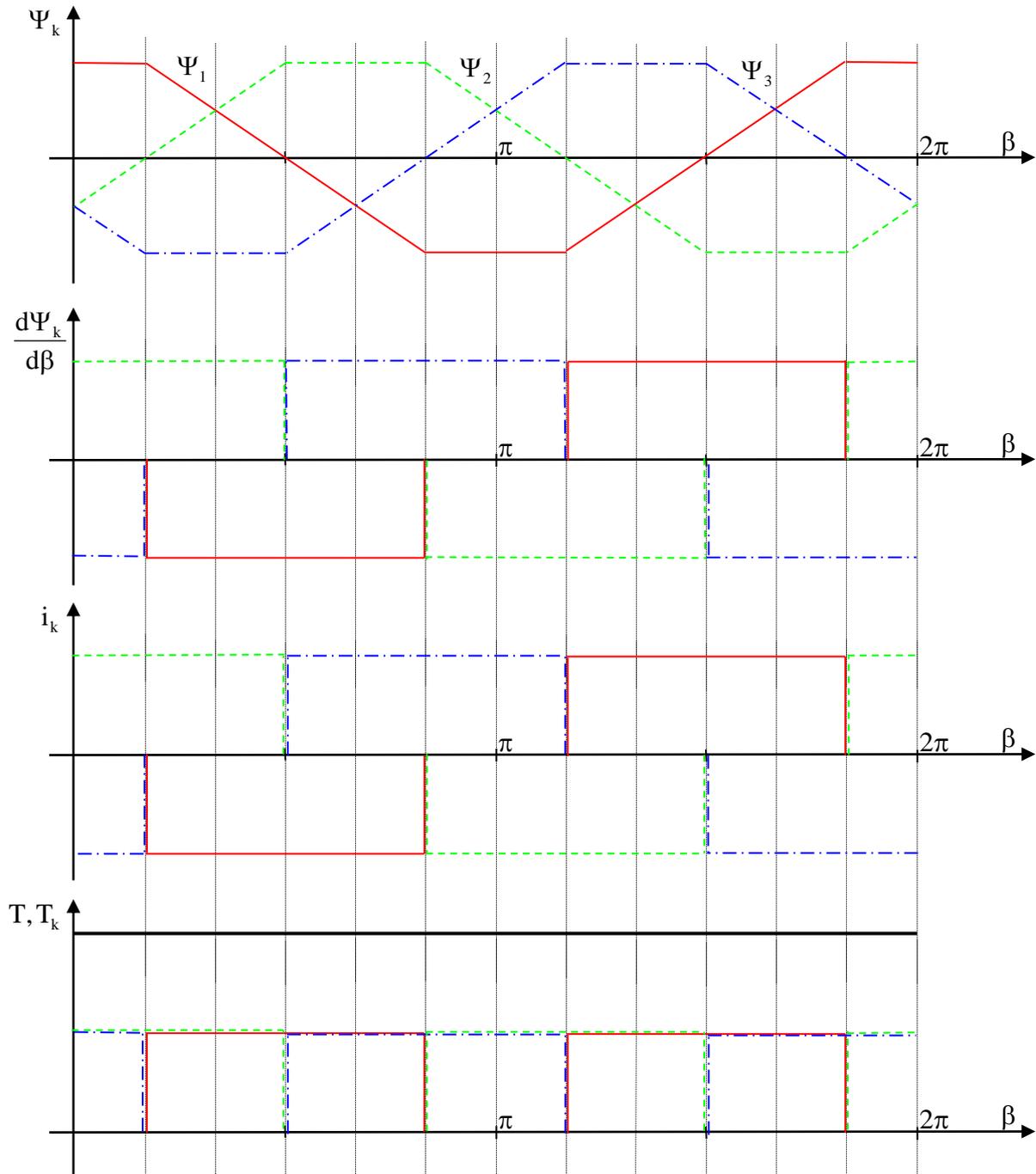
Diese Wicklungsform besitzt folgende wesentliche Vorteile:

- Die Drahtlänge im Wickelkopf ist extrem kurz; dies bedeutet sowohl einen geringen Statorwiderstand, als auch ein geringes Kupfergewicht. Kosten und Verluste sind also reduziert.
- Bei entsprechender Gestaltung des Blechpaketes (z.B. parallelfankige Statorzähne oder geteiltes Blechpaket) können die Spulen vorgewickelt und aufgesteckt werden. Dies reduziert die Herstellkosten.

Da bei dieser um einen Zahn konzentrierten Wicklung die Breite eines Rotorpoles größer als eine Statorzahnbreite ist, erhält die Flussverkettung eine Trapezform: (bei einem Teil der Drehung des Rotors, jeweils Abschnitte von $2\pi/2 - 2\pi/3 = \pi/3$ elektrischen Graden, ändert sich der Fluss in der Statorspule nicht; dies war bei der zweipoligen Maschine mit Durchmesserwicklung anders).

In der Praxis führt diese starke Sehnung aufgrund der Verkürzung der Abschnitte mit konstantem $d\Psi/d\alpha$ durch die magnetische Streuung an den Polkanten (Übergang zwischen Nord- und Südpol) zu Drehmomenteinbrüchen.

Flussverkettung, Änderung der Flussverkettung, Strom und Drehmoment stellen sich unter idealisierten Annahmen wie folgt dar:



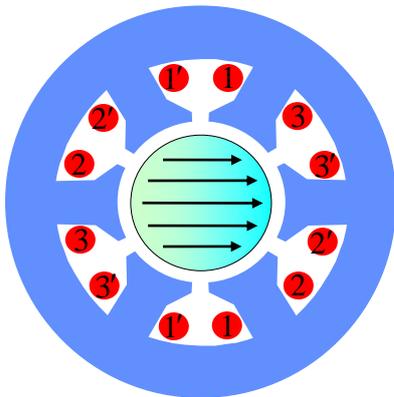
Um auch in der Praxis ein möglichst konstantes Drehmoment zu erhalten, können die folgenden Maßnahmen eingeführt werden:

- Schrägung der Statornuten oder Rotorpole (Nachteile: Kosten, Flussverlust)
- Verteilte Zweischichtwicklung: Sehnung, Zonung (Nachteil: Kosten)
- Wahl einer gebrochenen Zahl für das Verhältnis Statornuten zu Rotorpolen (Nachteil: bei unsymmetrischen Strangwicklungsanordnungen wirken radiale Kräfte auf den Rotor)
- Sinusförmige Flussverkettung kombiniert mit sinusförmigen Strömen (Nachteil: aufwendige Stromformung)

3. Bürstenloser Gleichstrommotor mit sinusförmigen Strömen:

Taktet man die Spannung des speisenden Wechselrichters geeignet mit hoher Frequenz (bei kleinen Leistungen liegt die Taktfrequenz i.a. über der menschlichen Hörschwelle von etwa 20kHz), so kann man in den Strängen des Motors aufgrund der Tiefpasswirkung der Strangimpedanzen nahezu sinusförmige Ströme erzielen. Hierdurch realisiert man ein künstliches Drehstromsystem veränderlicher Frequenz (im Gegensatz zum Betrieb mit blockförmigen Strömen sind hierbei alle drei Stränge gleichzeitig stromführend).⁷

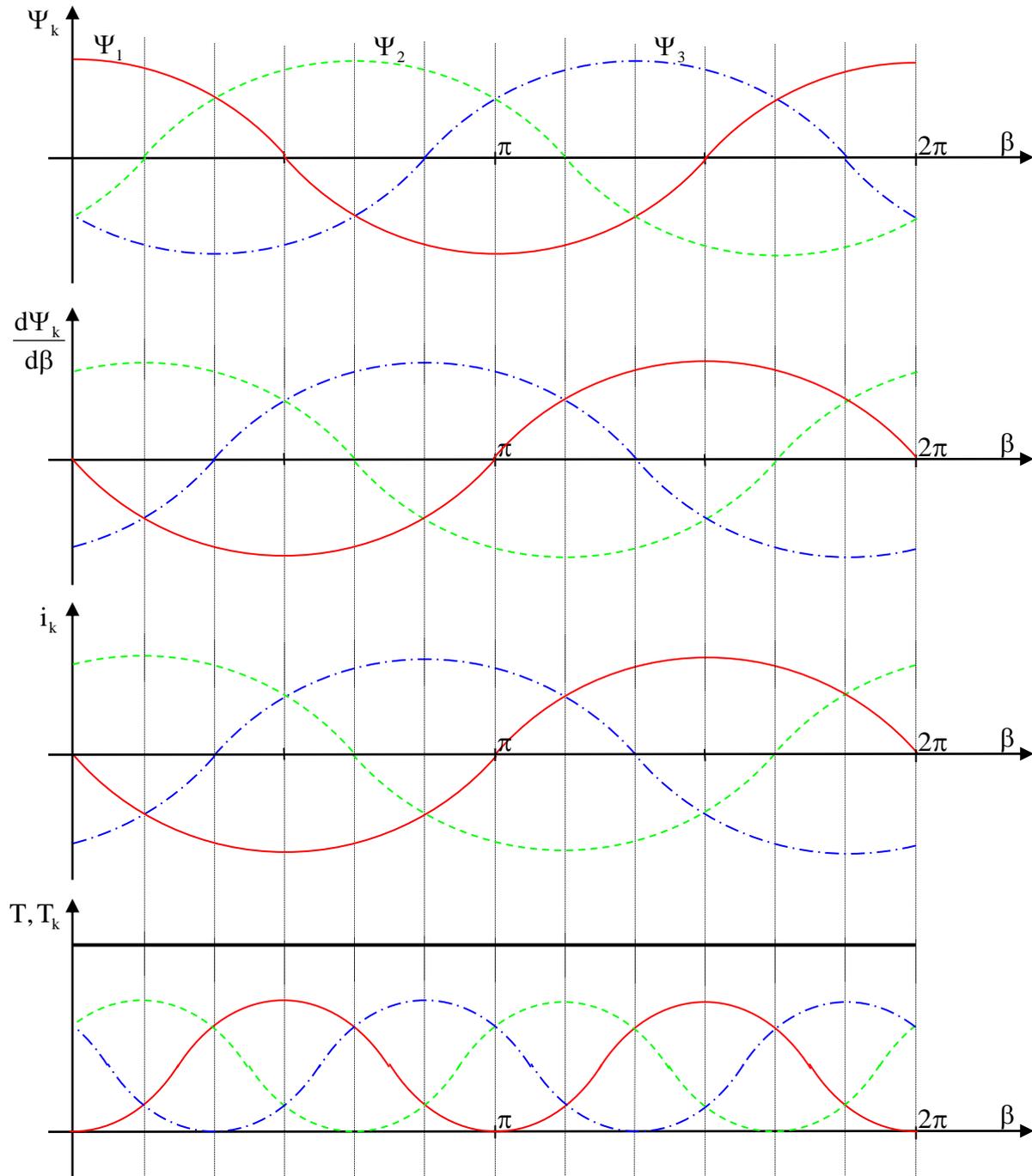
Ein Motoraufbau, der von der Wicklungs- und Magnetauslegung an diesen sinusförmigen Betrieb (zur Erzielung eines konstanten Drehmomentes) angepasst ist, ist im nächsten Bild dargestellt:



Der Rotor ist zweipolig diametral magnetisiert und erzeugt ein sinusförmiges Luftspaltfeld. Der Stator besitzt eine Durchmesserwicklung.

Die idealisierten Verläufe von Flussverkettung, Änderung der Flussverkettung, Strom und Drehmoment stellen sich wie folgt dar:

⁷ In der Literatur wird die hier als „Bürstenloser Gleichstrommotor mit sinusförmigen Strömen“ beschriebene Maschine häufig auch als „Permanentmagneterregte Synchronmaschine (mit veränderlicher Statorfrequenz)“ bezeichnet. Der Grund für eine solche Unterscheidung ist, dass der Gleichstrommotor mit Bürsten (abschnittsweise) konstanten Strom führt, während die konventionelle Synchronmaschine mit sinusförmigen Spannungen und Strömen gespeist wird.



Aus

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \frac{d\Psi_k}{d\alpha} i_k \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{\beta}{p}$$

folgt:

$$T = \frac{p}{2} \sum_{k=1}^m \frac{d\Psi_k}{d\beta} i_k$$

Berücksichtigt man allerdings die magnetische Streuung an den Polkanten (Übergang zwischen Nord- und Südpol), so steigt das Drehmoment nicht linear mit der Polpaarzahl. Mit zunehmender Polzahl wird der Streuteil (abhängig von der Geometrie) immer dominanter, so dass sich bei moderaten Polpaarzahlen ein Optimum ergibt.

7 Reluktanzmaschine

7.1 Synchrone Reluktanzmaschine

Bei der Schenkelpol-Synchronmaschine bestand das Drehmoment aus zwei Anteilen, einem Anteil hervorgerufen durch die Erregung und einem Anteil hervorgerufen durch die unterschiedliche Reluktanz in d- und q-Achse:

$$T = \frac{3p}{\omega_1} \left(\frac{UU_p}{X_d} \sin(\vartheta) + \frac{U^2}{2} \left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right) \sin(2\vartheta) \right)$$

Verzichtet man nun auf die Erregerwicklung, Schleifringe und Bürsten, so behält man das Drehmoment aufgrund der unterschiedlichen Reluktanz:

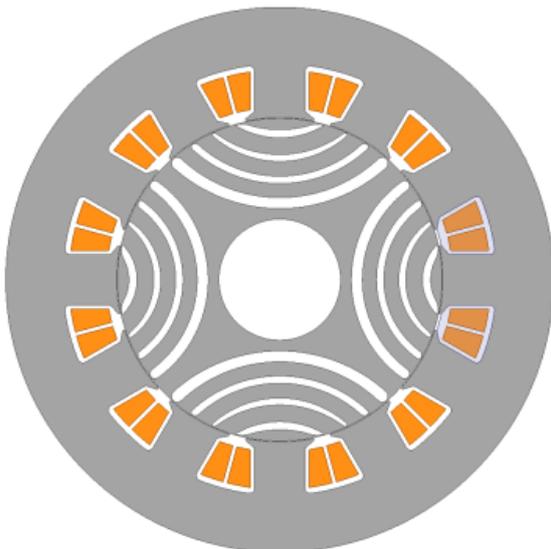
$$T = \frac{3p}{\omega_1} \frac{U^2}{2} \left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right) \sin(2\vartheta)$$

Die Vorteile einer solchen Maschine sind:

- Einfacher Aufbau (keine Erregerwicklung, Schleifringe und Bürsten)
- Keine (Erreger-) Verluste im Rotor

Ein großer Nachteil besteht allerdings darin, dass das erreichbare Drehmoment – zumindest für Schenkelpolgeometrien – relativ gering ist: Für $X_d = 2 \cdot X_q$, was realistischen Werten entspricht, war bei der Schenkelpol-Synchronmaschine berechnet worden, dass das Reluktanzmoment nur halb so groß ist wie das durch die Erregung erzeugte Moment.

Das Drehmoment kann demgegenüber deutlich gesteigert werden, wenn die Rotorgeometrie hinsichtlich eines möglichst großen Unterschiedes zwischen X_d und X_q optimiert wird. Eine entsprechende Rotorgeometrie zeigt das folgende Bild (Stator mit 4-poligem Rotor):

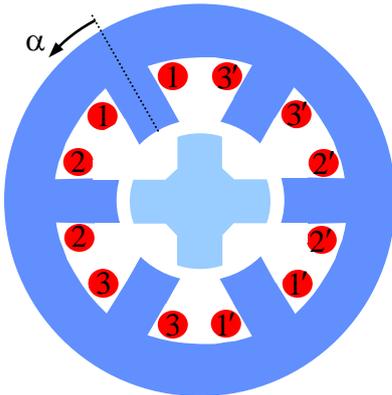


Eine so optimierte synchrone Reluktanzmaschine entwickelt eine ähnliche Drehmomentdichte wie eine Asynchronmaschine.

7.2 Geschaltete Reluktanzmaschine

1. Aufbau und Wirkungsweise:

Der Aufbau des geschalteten Reluktanzmotors (switched reluctance motor, SR-motor) ist einfach, robust und kostengünstig. Der Stator besitzt ausgeprägte Pole mit konzentrierten Spulen. Im Allgemeinen bilden die gegenüberliegenden Spulen einen Wicklungsstrang. Der Rotor besitzt ausgeprägte Zähne ohne Wicklungen; die Anzahl der Rotorzähne ist geringer als die der Statorzähne. Das Bild zeigt einen geschalteten Reluktanzmotor mit 6 Statorpolen (Statorzähnen) und 4 Rotorzähnen (6/4-Motor):



Der gezeigte SR-Motor ist 3-strängig aufgebaut. Um den Läufer in Rotation zu versetzen, müssen die Statorstränge in Abhängigkeit von der Rotorlage zyklisch ein- und ausgeschaltet werden.

Soll der Rotor im Uhrzeigersinn drehen (bzgl. des mechanischen Winkels α in negativer Richtung), muss beim dargestellten Motor als nächstes der Strang 3 eingeschaltet werden. Stehen die Rotorzähne dann ausgerichtet unter den Statorzähnen des Stranges 3 („aligned position“), kann mit Strang 3 kein weiteres Moment (in der gewünschten Richtung) aufgebaut werden. Strang 3 wird abgeschaltet und Strang 1 eingeschaltet. Hat sich der Rotor entsprechend weitergedreht, wird Strang 1 abgeschaltet und Strang 2 eingeschaltet. Der Rotor dreht sich dann weiter bis in die dargestellte Position; hier wird dann Strang 2 wieder abgeschaltet und Strang 3 eingeschaltet.

Zur Feststellung der Rotorlage muss diese gemessen werden: entweder direkt über Sensoren oder indirekt über die Klemmengrößen (Strom und Spannung).

Aus der beschriebenen Wirkungsweise wird deutlich, dass der Rotor sich entgegengesetzt zum Drehfeld dreht (Statorbestromung: 1-2-3... entgegen dem Uhrzeigersinn; Rotordrehung im Uhrzeigersinn).

Ist m die Statorstrangzahl und $2p$ die Anzahl der Statorpole pro Strang, so ist die Anzahl der Statorzähne:

$$N_s = 2pm$$

Das Ständerfeld dreht sich bei jedem Impuls um den Winkel:

$$\alpha_s = \frac{2\pi}{N_s} = \frac{2\pi}{2pm}$$

Die Anzahl der Rotorzähne ist:⁸

$$N_R = 2p(m-1) < N_S$$

Der Rotor dreht sich bei jedem Impuls um den Winkel:

$$\alpha_R = \frac{2\pi}{N_R m}$$

Der Rotor dreht sich also um den Faktor

$$a = \frac{\alpha_R}{\alpha_S} = \frac{2p}{N_R}$$

langsamer als das Statorfeld. Je nach Applikation kann demnach aufgrund der Motorauslegung auf ein Untersetzungsgetriebe verzichtet werden. Allerdings muss die Schaltfrequenz entsprechend größer sein, wenn die Drehzahl des SR-Motors ebenso groß sein soll, wie die eines Motors, der synchron mit dem Drehfeld rotiert.

2. Drehmoment:

Die Spannungsgleichung für einen Strang lautet:

$$\begin{aligned} u &= Ri + \frac{d\psi(i, \alpha)}{dt} \\ &= Ri + \frac{\partial\psi(i, \alpha)}{\partial i} \frac{di}{dt} + \frac{\partial\psi(i, \alpha)}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dt} \end{aligned}$$

Die Summe auf der rechten Seite setzt sich aus drei Termen zusammen:

- Spannungsabfall am Ohmschen Widerstand
- transformatorisch induzierte Spannung
- rotatorisch induzierte Spannung

Das Drehmoment wird nun aus der Leistungsbilanz berechnet (vgl. Kraftberechnung für den Hubmagneten in Kapitel 1). Multipliziert man die obige Gleichung mit dem Strangstrom, so erhält man:

$$\begin{aligned} ui &= Ri^2 + i \frac{\partial\psi(i, \alpha)}{\partial i} \frac{di}{dt} + i \frac{\partial\psi(i, \alpha)}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dt} \\ \Rightarrow \quad uidt &= Ri^2 dt + i \frac{\partial\psi(i, \alpha)}{\partial i} di + i \frac{\partial\psi(i, \alpha)}{\partial \alpha} d\alpha \end{aligned}$$

Die an den Klemmen elektrisch zugeführte Energie ist:

$$W_{el} = \int uidt$$

Die elektrischen Verluste sind:

$$W_v = \int i^2 R dt$$

Die magnetische Energie ist:

$$W_{mag} = \int id\psi$$

Die magnetische Coenergie ist:

$$W'_{mag} = \int \psi di$$

Die mechanische Energie ist:

$$W_{mech} = \int T d\alpha$$

⁸ Es gibt auch SR-Motor Varianten mit $N_R = 2p(m+1) > N_S$. Bei dieser Rotorzahnzahl dreht sich der Rotor in Richtung des Statorfeldes. Da eine solche Variante nicht üblich ist (der mechanische Aufbau ist filigraner; die Frequenz ist für eine bestimmte Drehzahl höher), wird im Folgenden hierauf nicht näher eingegangen.

Da die Änderung der elektrischen Energie an den Klemmen die Änderung der elektrischen Verluste, die Änderung der magnetischen Energie und die Änderung der mechanischen Energie decken muss, folgt:

$$dW_{el} = dW_v + dW_{mag} + dW_{mech}$$

$$\Rightarrow uidt = Ri^2dt + dW_{mag} + dW_{mech}$$

Durch Vergleich mit der obigen Gleichung erhält man:

$$dW_{mag} + dW_{mech} = i \frac{\partial \psi(i, \alpha)}{\partial i} di + i \frac{\partial \psi(i, \alpha)}{\partial \alpha} d\alpha$$

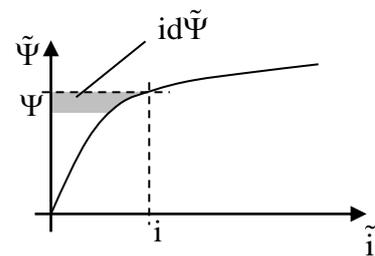
In einem Zwischenschritt wird nun die Änderung der magnetischen Energie berechnet:

Da die magnetische Energie sowohl vom Strangstrom, als auch von der Rotorposition abhängig ist, folgt:

$$dW_{mag} = \frac{\partial W_{mag}}{\partial i} di + \frac{\partial W_{mag}}{\partial \alpha} d\alpha$$

Für einen festen Rotorpositionswinkel α folgt nun:

$$W_{mag} = \int_0^{\psi} id\tilde{\psi} = i\psi - W'_{mag} = i\psi - \int_0^i \psi d\tilde{i}$$



(die Tilde dient zur Unterscheidung von Integrationsgrenze und Integrationsvariable).

Weiter ergibt sich hieraus:

$$\frac{\partial W_{mag}}{\partial i} = \psi + i \frac{\partial \psi}{\partial i} - \int_0^i \frac{\partial \psi}{\partial i} d\tilde{i} = i \frac{\partial \psi}{\partial i}$$

und:

$$\frac{\partial W_{mag}}{\partial \alpha} = \frac{\partial (i\psi)}{\partial \alpha} - \frac{\partial W'_{mag}}{\partial \alpha} = i \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} - \frac{\partial W'_{mag}}{\partial \alpha}$$

Insgesamt folgt also aus dieser Zwischenrechnung:

$$dW_{mag} = i \frac{\partial \psi}{\partial i} di + \left(i \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} - \frac{\partial W'_{mag}}{\partial \alpha} \right) d\alpha$$

Setzt man das Ergebnis dieser Zwischenrechnung nun in die obige Gleichung ein, so erhält man:

$$dW_{mag} + dW_{mech} = i \frac{\partial \psi(i, \alpha)}{\partial i} di + i \frac{\partial \psi(i, \alpha)}{\partial \alpha} d\alpha$$

$$\Rightarrow i \frac{\partial \psi}{\partial i} di + \left(i \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} - \frac{\partial W'_{mag}}{\partial \alpha} \right) d\alpha + dW_{mech} = i \frac{\partial \psi(i, \alpha)}{\partial i} di + i \frac{\partial \psi(i, \alpha)}{\partial \alpha} d\alpha$$

$$\Rightarrow dW_{mech} = \frac{\partial W'_{mag}}{\partial \alpha} d\alpha$$

$$\Rightarrow Td\alpha = \frac{\partial W'_{mag}}{\partial \alpha} d\alpha$$

$$\Rightarrow T = \frac{\partial W'_{mag}}{\partial \alpha}$$

Das Drehmoment eines Stranges erhält man also aus der partiellen Differentiation der magnetischen Coenergie dieses Stranges nach dem Rotorpositionswinkel.

Das Drehmoment der gesamten Maschine erhält man aus der Summation über alle Strangdrehmomente.

Man erkennt, dass die Coenergie eine ganz wesentliche Bedeutung hat:

$$\psi = \frac{\partial W'_{\text{mag}}}{\partial i}$$

$$T = \frac{\partial W'_{\text{mag}}}{\partial \alpha}$$

Damit folgt aber auch:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = \frac{\partial T}{\partial i}$$

Drehmoment und Flussverkettung der geschalteten Reluktanzmaschine sind also direkt über Rotorposition und Strangstrom miteinander verbunden.

Tritt während des Betriebes der Maschine keine Sättigung auf, so gilt $\psi(i, \alpha) = L(\alpha) \cdot i$. Dann folgt:

$$T = \frac{\partial W'_{\text{mag}}}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\int_0^i \psi(\tilde{i}, \alpha) d\tilde{i} \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\int_0^i L(\alpha) \tilde{i} d\tilde{i} \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(L(\alpha) \frac{1}{2} i^2 \right) = \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L(\alpha)}{\partial \alpha}$$

Da im linearen Fall (d.h. wenn keine Sättigung auftritt) $W_{\text{mag}} = W'_{\text{mag}}$ gilt und $W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} Li^2$ ist, erhält man die gleiche Lösung für das Drehmoment auch aus der Berechnung mit Hilfe der magnetischen Energie.

An Hand der Gleichung für den linearen Betrieb

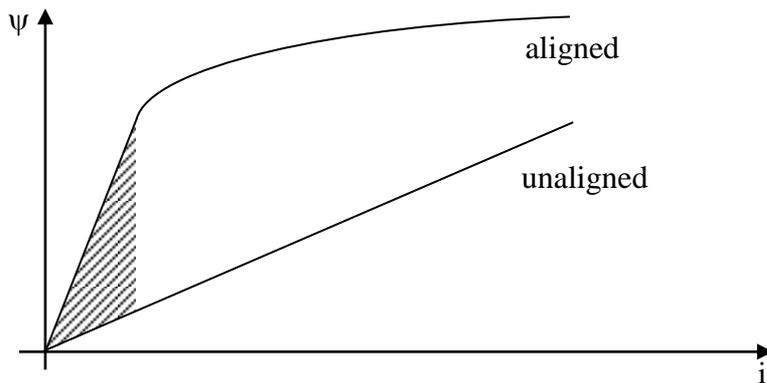
$$T = \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L(\alpha)}{\partial \alpha}$$

erkennt man:

- Das Drehmoment ist dem Quadrat des Stromes proportional. Dies bedeutet, dass die Stromrichtung (Vorzeichen „+“ oder „-“) keinen Einfluss auf die Richtung des Drehmomentes hat (dies ist auch in Übereinstimmung mit der Anschauung: ein Eisenteil wird von einem (Elektro-) Magneten angezogen, unabhängig von der Polarität des Magneten).
- Das Drehmoment steigt, je größer der rotorlageabhängige Induktivitätsunterschied zwischen „aligned position“ und „unaligned position“ ist.

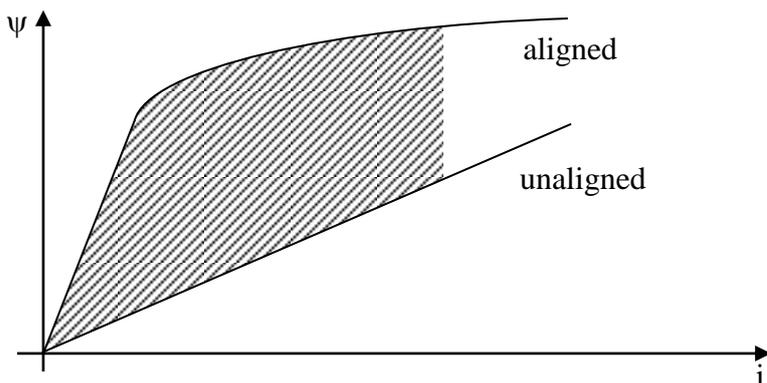
Der geschaltete Reluktanzmotor kann also, im Gegensatz zu Asynchron-, Synchron- oder BLDC-Motoren, mit unipolaren Strömen betrieben werden.

Das Drehmoment als Änderung der magnetischen Coenergie mit dem Drehwinkel kann aus dem $\psi - i$ -Diagramm entnommen werden. Aufgrund der unterschiedlichen Induktivitäten in der „aligned“ und der „unaligned“ Position ergeben sich die folgenden Kennlinien:



Betrieht man die Maschine im ungesättigten Bereich, so erzielt man ein Drehmoment pro Bestromungsintervall eines Statorzahnes, das der im obigen Bild schraffierten Coenergie-Fläche entspricht.

Treibt man dagegen die Maschine weit in die Sättigung (in der „aligned“ Position), so kann man wesentlich höhere Drehmomente erzielen (erkennbar an der wesentlich größeren Fläche für die Coenergie bei einem Zyklus):



Die Coenergie-Fläche wird (in dieser idealen Darstellung) rechts von einer vertikalen Linie begrenzt, da i.a. der Strom begrenzt ist (entweder thermisch oder durch den speisenden Wechselrichter).

Nur in dieser Betriebsart mit starker Sättigung ist der geschaltete Reluktanzmotor mit seiner Drehmomentendichte konkurrenzfähig zum Asynchronmotor. Zur genauen Berechnung des Drehmomentes benötigt man aufgrund der hohen Sättigung numerische Rechenverfahren (z.B. Finite Elemente Methode, FEM).

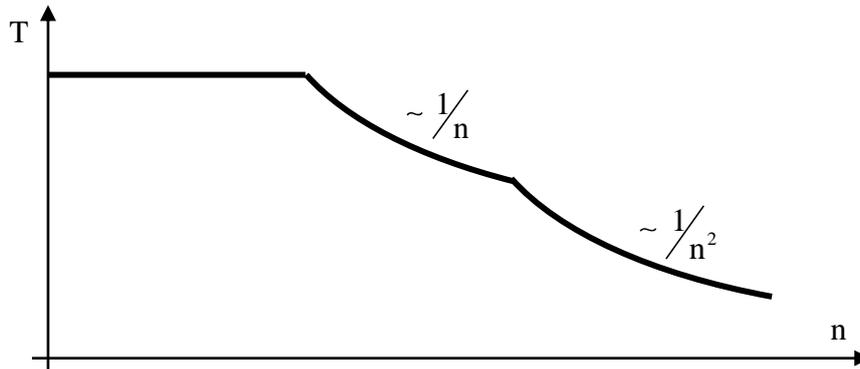
3. Betriebsarten

Die Drehmoment-Drehzahl-Ebene der geschalteten Reluktanzmaschine kann in zwei wesentliche Bereiche eingeteilt werden: gepulster Betrieb und Blockbetrieb.

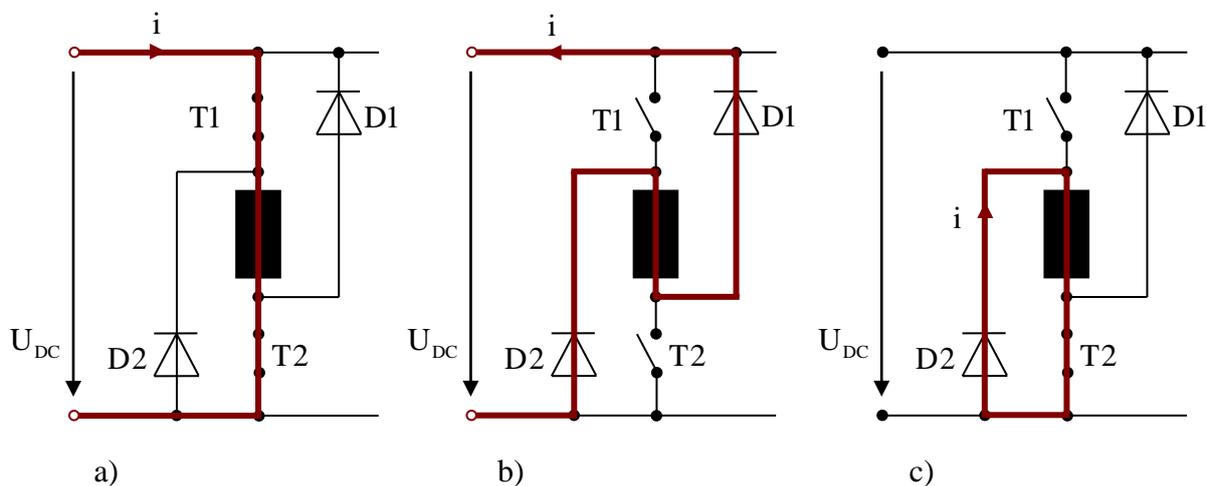
- Im gepulsten Betrieb kann ein drehzahlunabhängiges Maximalmoment eingestellt werden; dieser Bereich entspricht dem Grunddrehzahlbereich (Ankerstellbereich) der Asynchronmaschine. Hier muss der Wechselrichter schnell gepulst werden, damit der Strangstrom den zulässigen Wert nicht überschreitet. Durch dieses aktive Eingreifen wird ein möglichst rechteckförmiger Stromverlauf eingestellt.

- Im Blockbetrieb wird der Strang nur noch ein- und ausgeschaltet; der Strangstrom stellt sich frei ein. Hierdurch ist das maximal mögliche Drehmoment etwa proportional zu $1/n$. Wird die Drehzahl weiter gesteigert und muss bereits während des Stromanstiegs wieder abgeschaltet werden, dann sinkt das maximal erreichbare Drehmoment etwa mit $1/n^2$.

Das folgende Bild zeigt diese Zusammenhänge schematisch; insbesondere der Übergang von gepulstem Betrieb zu Blockbetrieb erfolgt nicht schlagartig, sondern fließend und ist von vielen Parametern (u.a. Drehmoment, Widerstand, Betriebsspannung) abhängig.



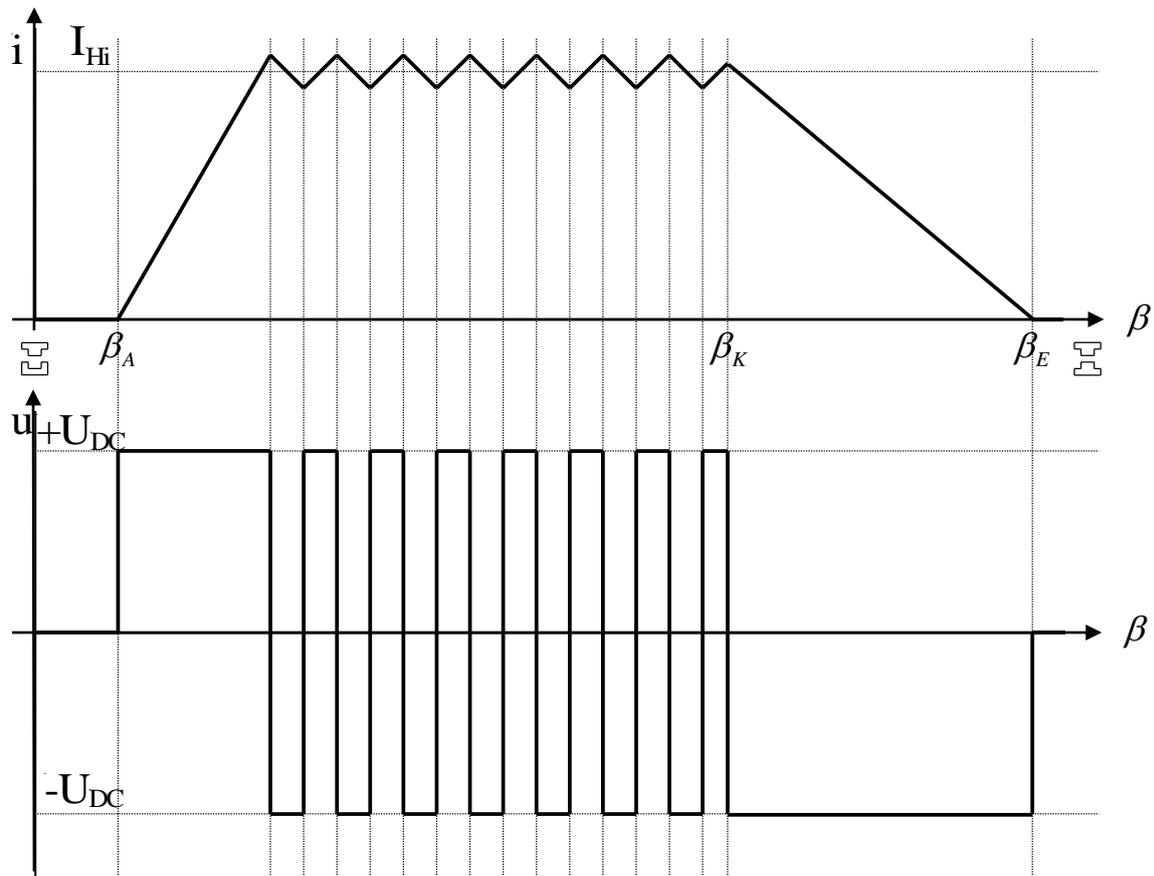
Der gepulste Betrieb wird im Folgenden an Hand eines Stranges erläutert. Jeder Strang der Maschine ist mit zwei Leistungstransistoren (im folgenden Bild als einfache Schalter dargestellt) und zwei Leistungsdioden zu einer Halbbrücke verschaltet. Die verschiedenen Schaltzustände sind im folgenden Bild gezeigt, wobei der Maschinenstrang als Induktivität symbolisiert ist:



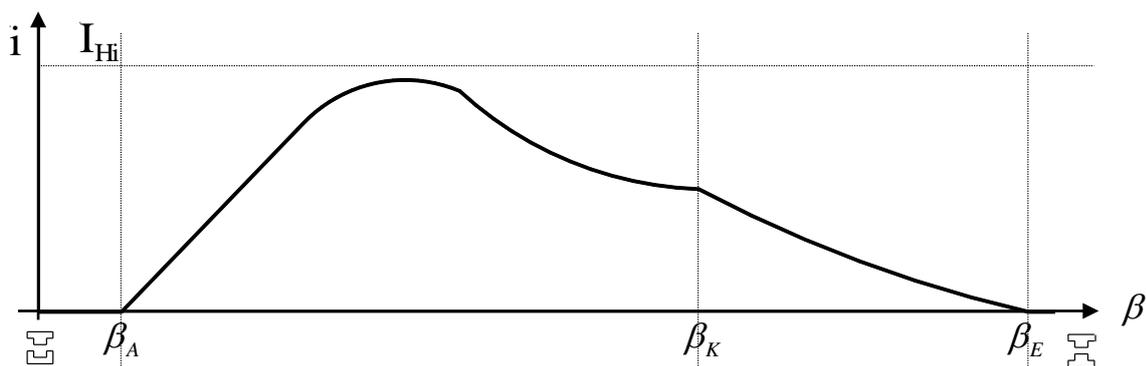
Vernachlässigt man die Spannungsabfälle an den Transistoren und Dioden, so liegt im Fall a) die Spannung U_{DC} an der Strangwicklung an; der Strom baut sich in der angegebenen Richtung auf.

Übersteigt der Strom den gewünschten Strom um einen gewissen Toleranzbereich, so werden die beiden Transistoren $T1$ und $T2$ geöffnet und es liegt die Spannung U_{DC} in umgekehrter Richtung zum Fall a) an der Strangwicklung an: In diesem Fall b) baut sich der Strom ab, bis der gewünschte Strom um einen Toleranzbereich unterschritten wird. Zu diesem Zeitpunkt wird wieder auf Fall a) umgeschaltet.

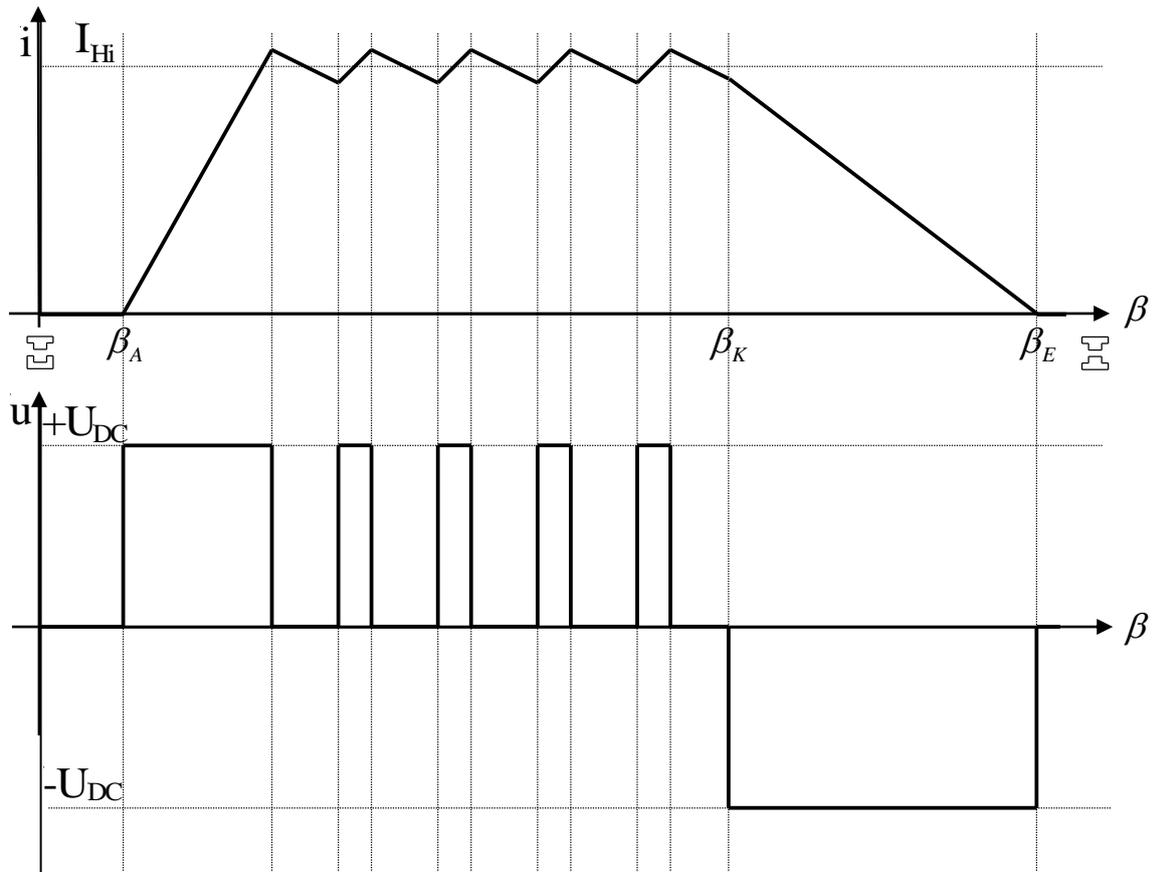
Die folgenden Strom- und Spannungsverläufe zeigen diese Vorgänge („hard chopping“ oder „gleichzeitiges Takten“ genannt) inkl. der Auf- und Abmagnetisierung des Stranges.



Erreicht der Strom nicht den gewünschten Wert, so wird die Spannung zum Positionswinkel β_A eingeschaltet (Fall a) und zum Positionswinkel β_K ausgeschaltet (Fall b). Dann liegt der so genannte Blockbetrieb vor. Den Strangstromverlauf zeigt das folgende Bild.



Während des gepulsten Betriebes treten aufgrund der hohen Schaltfrequenzen in den Transistoren hohe Schaltverluste auf. Um dies zu vermeiden, wird je Schaltzyklus nur einer der beiden Transistoren geschaltet, und dies für aufeinander folgende Schaltzyklen alternierend für die beiden Transistoren (im obigen Bild ist in Fall c beispielhaft das Schalten des Transistors T1 gezeigt). Die Strom- und Spannungsverläufe für dieses so genannte „soft chopping“ bzw. „alternierende Takten“ sehen dann wie folgt aus:



4. Wesentliche Eigenschaften

Die wesentlichen positiven Eigenschaften des Reluktanzmotors sind:

- Der Aufbau ist einfach, robust und kostengünstig.
- Stromwärmeverluste entstehen nur im Stator (mit guter Kühlmöglichkeit).
- Gegenüber kurzzeitiger Überlast ist der Motor unempfindlich.
- Der Rotor ist trägheitsarm und robust, sodass er für hohe Drehzahlen geeignet ist.
- Das Drehmoment ist unabhängig von der Stromrichtung, so dass einfache Schaltungen für den Umrichter verwendet werden können.

Die wesentlichen Problemfelder sind:

- Die gerade aktive Spule muss bei hohem Strom und maximaler gespeicherter Energie abgeschaltet werden: Die Umrichterausnutzung ist deshalb relativ gering.
- Zur Erzielung eines großen Induktivitätsunterschiedes zwischen „aligned“ und „unaligned“ Position muss der Luftspalt in der „aligned“ Position sehr klein sein. Dies verteuert den Motor und macht ihn empfindlich gegenüber Fertigungstoleranzen.
- Das Drehmoment pulsiert. Um es zu glätten, kann man z.B. die Anzahl der Stränge erhöhen oder die Zähne (sinnvollerweise die Rotorzähne, da diese keine Wicklung

tragen) schrägen. Diese Maßnahmen sind aber nicht kosten- oder ausnutzungsneutral.

- Durch den großen Induktionsunterschied zwischen den beiden ausgezeichneten Stellungen entwickeln sich starke pulsierende, radiale Kräfte. Diese Kräfte sind die Ursache für erhebliche Geräusche.
- Über die Stromform kann man Einfluss auf das Drehmoment und/oder die Geräuschentwicklung nehmen. Hierzu benötigt man aber i.a. eine Spannungsreserve und die Ausnutzung wird reduziert.
- Zum Feldaufbau ist wie bei Asynchronmaschinen ein Blindstrom erforderlich. Durch diesen Blindstrom steigt die notwendige Umrichterscheinleistung.

8 Kleinmaschinen für Einphasenbetrieb

8.1 Allgemeines

Die Erzeugung elektrischer Energie, ihre Verteilung und ihre industrielle Anwendung für Antriebe größerer Leistung erfolgt in Drehstromnetzen höherer Spannung. Dabei werden dreisträngige Maschinen verwendet, die ein zeitlich konstantes Moment entwickeln.

Auf Niederspannungsebene steht für die kleineren Anschlussleistungen der Haushalte meist nur Einphasenwechselstrom zur Verfügung. Hier müssen einsträngige Maschinen eingesetzt werden. Die Konstruktion solcher einsträngiger Maschinen unterscheidet sich oft erheblich von den Großmaschinen, weil:

- sie prinzipbedingt unsymmetrisch sind,
- oft in den Antrieb integriert werden müssen und
- mit Rücksicht auf ihre Herstellung in Großserientechnik Zugeständnisse an die Fertigung gemacht werden müssen.

Der Bedarf wächst ständig und ihre wirtschaftliche Bedeutung nimmt zu. Wichtig für den direkten Anschluss an das Einphasennetz sind Universalmaschinen und Einphasen-Asynchronmaschinen.

Zusätzlich werden aber auch mehr und mehr BLDC-Maschinen mit Umrichterspeisung im Einphasennetz verwendet, die aufgrund ihrer elektronischen Speisung dem Netz eine weitgehend konstante Leistung entnehmen und ebenso eine konstante mechanische Leistung (Drehmoment) liefern.

8.2 Universalmotor

Der Universalmotor ist im Prinzip wie eine Gleichstrommaschine aufgebaut, er hat jedoch einen geblechten Stator. Er kann mit Gleich- oder Wechselstrom betrieben werden; daher kommt auch der Name. Für den Betrieb mit Wechselstrom der Frequenz f gelten die Grundgleichungen der Gleichstrommaschine in der zeitabhängigen Form.

Induzierte Spannung: $U_i(t) = k\phi(t)n, \quad \phi(t) = \phi \sin(\omega t)$

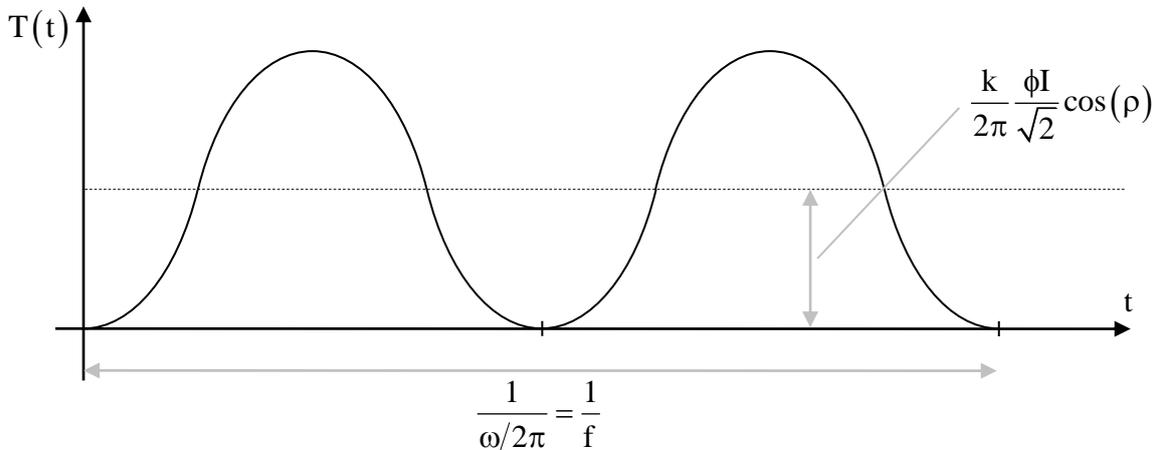
Drehmoment: $T(t) = \frac{k}{2\pi} I(t)\phi(t) \quad I(t) = \sqrt{2} \cdot I \sin(\omega t - \rho)$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{k}{2\pi} \sqrt{2} I \phi \sin(\omega t - \rho) \sin(\omega t) \\ &= \frac{k}{2\pi} \sqrt{2} I \phi \frac{1}{2} (\cos(-\rho) - \cos(2\omega t - \rho)) \\ &= \frac{k}{2\pi} \frac{I \phi}{\sqrt{2}} (\cos(\rho) - \cos(2\omega t - \rho)) \end{aligned}$$

Das Drehmoment besteht also aus

- einem Gleichanteil, der dem Cosinus des Winkels ρ (der Phasenverschiebung zwischen Fluss und Strom) proportional ist und
- einem Wechselanteil, der mit doppelter Netzfrequenz schwingt.

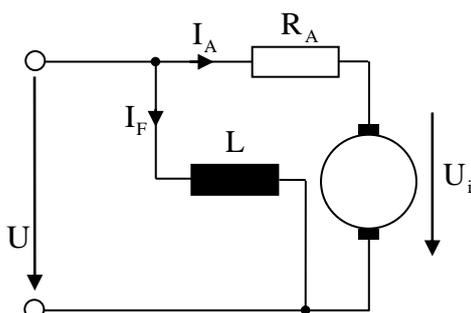


Damit der Gleichanteil möglichst groß wird, muss gelten:

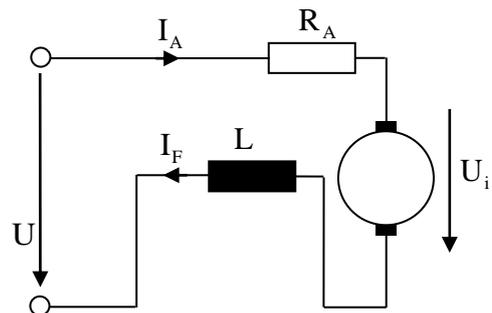
$$\cos(\rho) \rightarrow 1, \text{ d.h. } \rho \rightarrow 0$$

d.h. Fluss und Ankerstrom müssen in Phase sein.

Nebenschluss $\angle(\phi, I) \approx \pi/2$

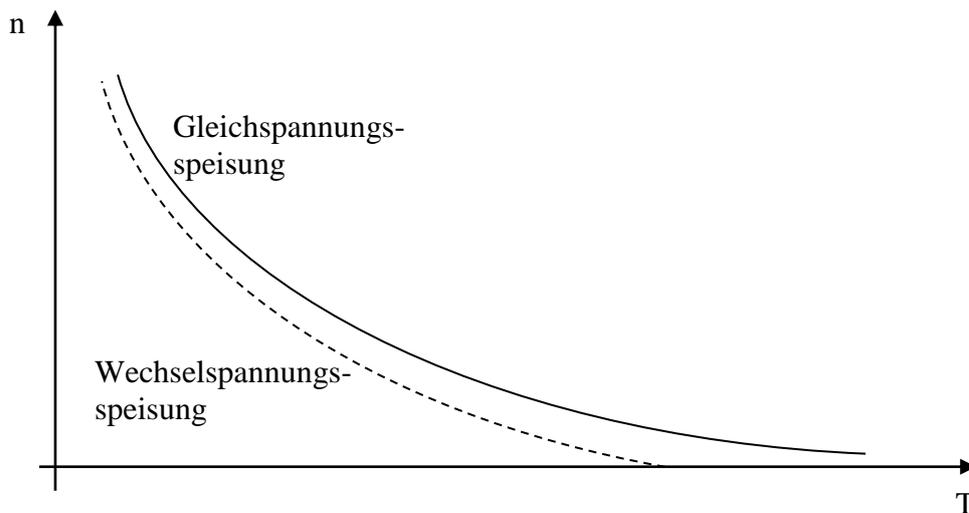


Reihenschluss $\angle(\phi, I) = 0$

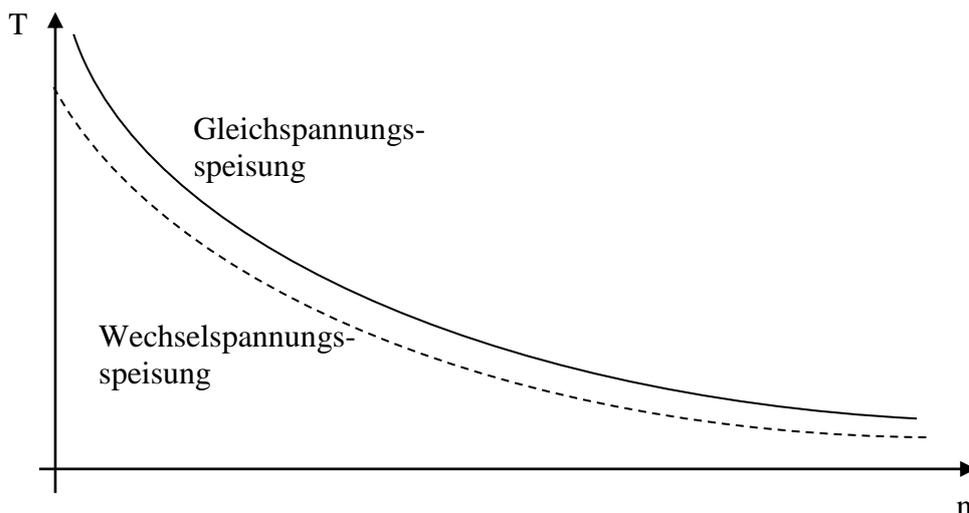


Die obige Bedingung ($\alpha(\phi, I) = 0$) ist nur beim Reihenschlussmotor erfüllt. Das Pendelmoment wird durch die träge Masse des Rotors und der Last abgedämpft, sodass im stationären Betrieb kaum Drehzahlschwankungen auftreten. Das Nutzmoment ist der Gleichanteil des Drehmomentes.

Im Verhältnis zum Gleichstrommotor entwickelt der Universalmotor bei Speisung mit Wechselspannung ein geringeres Drehmoment (falls die Gleichspannung gleich dem Effektivwert der Wechselspannung ist), weil ein zusätzlicher Spannungsabfall an der Reaktanz $X = \omega L$ stattfindet, siehe die folgende qualitative Drehzahl-Drehmoment-Charakteristik:



Der Vollständigkeit halber ist im folgenden Bild derselbe qualitative Sachverhalt in einer Drehmoment-Drehzahl-Charakteristik dargestellt:



8.3 Einphasenasynchronmaschine

1. Einphasiger Betrieb der Drehstromasynchronmaschine:

Wird bei einem Drehstromasynchronmotor bei Betrieb am symmetrischen Dreiphasennetz ein Strang unterbrochen, so liegt eine einphasige Speisung an zwei Strängen der Maschine vor. Die Statordurchflutung bildet ein Wechselfeld aus, das nach der Drehfeldtheorie in zwei gegenläufige Drehfelder halber Amplitude zerlegt werden kann.

Das in Motordrehrichtung rotierende mitlaufende Feld induziert in die Läuferwicklung Spannungen, die die Ströme $I_{2,m}$ der Frequenz $f_{2,m} = s_m f_1$ hervorrufen. Dabei ist $s_m = s$ der Schlupf wie bei der Drehstrommaschine.

Zum gegenlaufenden Drehfeld hat der Läufer den Schlupf:

$$s_g = \frac{-n_0 - n}{-n_0} = 1 + \frac{n}{n_0} = 1 + \frac{n_0}{n_0} - \left(\frac{n_0}{n_0} - \frac{n}{n_0} \right) = 2 - \frac{n_0 - n}{n_0} = 2 - s$$

Es entstehen also zusätzliche Läuferströme $I_{2,g}$ mit der Frequenz $f_{2,g} = s_g f_1$.

Jedes der beiden gegenläufigen Stator Drehfelder bildet mit den beiden Läuferströmen ein Drehmoment; es entstehen also vier Drehmomentanteile.

Die Momente des mitlaufenden Stator Drehfeldes mit der gegenlaufenden Rotordurchflutung und des gegenlaufenden Stator Drehfeldes mit der mitlaufenden Rotordurchflutung sind nur Pendelmomente mit dem zeitlichen Mittelwert Null. Sie liefern also keinen Beitrag zum Nutzmoment.

Es bleiben also die Momente des mit- und gegenlaufenden Stator Drehfeldes, die diese mit den jeweils „eigenen“ (d.h. selbst induzierten) Rotorströmen bilden. Diese Anteile liefern ein zeitlich konstantes Moment.

Im Stillstand hat der Läufer zum mit- und gegenlaufenden Drehfeld den Schlupf $s = 1$. Die von den beiden Drehfeldern entwickelten Momente sind entgegengesetzt gleich groß; der Motor läuft nicht an.

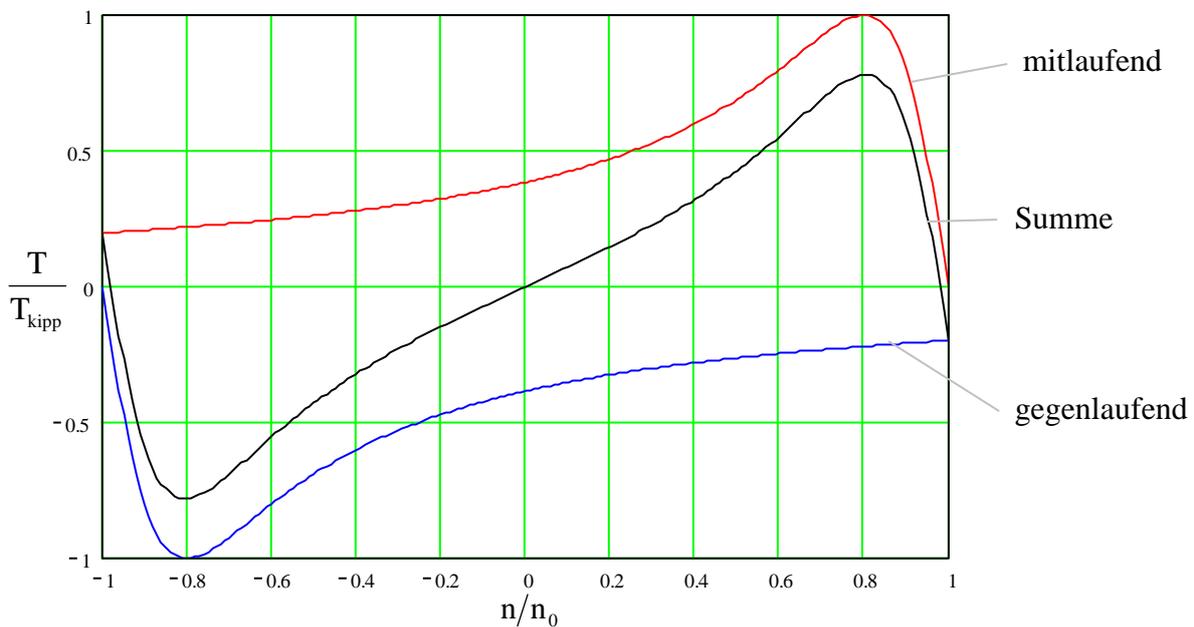
Bei Drehung des Rotors in einer Richtung ergeben sich durch die unterschiedlichen Schlupfwerte für s_m und s_g verschieden starke Rückwirkungen des Kurzschlussläufers auf die beiden gegensinnig rotierenden Stator durchflutungen. Das gegenläufige Feld wird bei $s_g \approx 2$ stark gedämpft, das mitlaufende Feld erfährt bei $s_m \approx 0$ nur eine geringe Rückwirkung. Dadurch entsteht ein elliptisches Drehfeld, wodurch ein Nutzmoment in Drehrichtung generiert wird.

In der Konsequenz bedeutet dies: Ein Drehstromasynchronmotor läuft bei Trennung von einer Phase weiter, wenn das Lastmoment nicht zu groß ist (der Schlupf wird allerdings größer, siehe Drehmoment-Drehzahl-Charakteristik unten, und dadurch der Wirkungsgrad schlechter). Durch Anwerfen kann ein Drehstromasynchronmotor in dieser Betriebsart auch hochlaufen.

Eine detaillierte Berechnung kann mit Hilfe der symmetrischen Komponenten erfolgen. Für die Drehmoment-Drehzahl-Charakteristik erhält man letztendlich eine Kennlinie, wie sie bei zwei in Reihe geschalteten Drehstrommotoren entsteht, deren Läufer mechanisch gekoppelt sind und deren Ständer mit entgegengesetzter Phasenfolge an der $\sqrt{3}$ -fachen Strangspannung

liegen.

Die qualitative Drehmoment-Drehzahl-Charakteristik ist im folgenden Bild dargestellt:



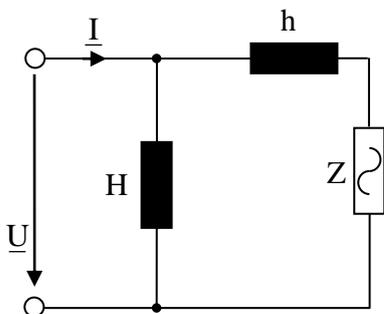
2. Einphasenasynchronmotor mit Hilfsphase:

Soll der einphasig betriebene Asynchronmotor bereits im Stillstand ein Nutzmoment (Anlaufmoment) entwickeln, so muss auch im Stillstand zumindest ein elliptisches Drehfeld vorhanden sein.

Dies kann mit Hilfe einer Hilfswicklung „h“ erreicht werden, die um einen räumlichen Winkel ε zur Hauptwicklung „H“ versetzt ist und mit einem um den elektrischen Winkel φ phasenverschobenen Strom gespeist wird.

Wenn $p\varepsilon = \varphi = 0$ ist, erhält man ein reines Wechselfeld. Ist dagegen $p\varepsilon = \varphi = \pi/2$, ist die Amplitude des gegenlaufenden Feldes minimal und die Amplitude des mitlaufenden Feldes maximal.

Die Phasenverschiebung zwischen dem Strom I_H der Hauptphase und dem Strom I_h der Hilfsphase wird durch eine zusätzliche Impedanz im Hilfsstrang erreicht:

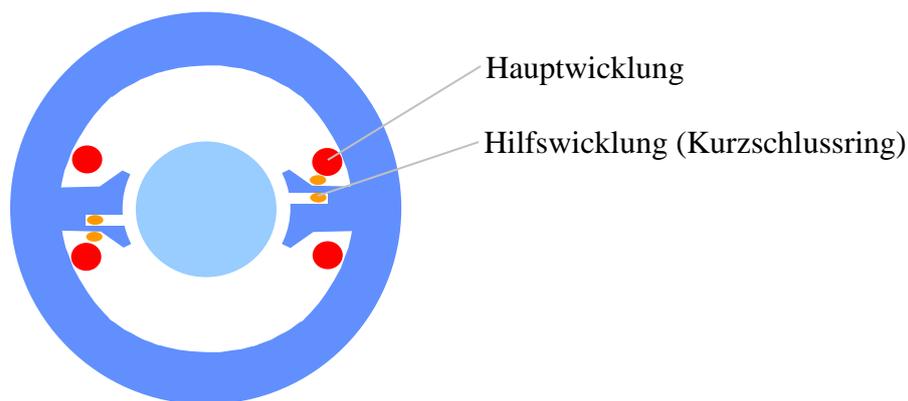


Für diese Impedanz im Hilfsstrang gibt es nun drei Möglichkeiten:

- Widerstand: Der Widerstand ist preiswert, er bringt aber nur ein geringes Anlaufmoment und muss wegen der Verluste nach dem Anlauf abgeschaltet werden.
- Induktivität: Eine Spule bringt nur ein geringes Anlaufmoment (eine reine Induktivität erzeugt keine zeitliche Phasenverschiebung des Stromes; erst zusammen mit den unvermeidlichen Strang- und Spulenwiderständen ergibt sich i.a. eine geringe zeitliche Phasenverschiebung). Außerdem ist eine Spule teuer und schwer.
- Kondensator: Anlaufkondensator (Abschaltung durch Fliehkraftschalter) oder Betriebskondensator (Verbesserung von Leistungsfaktor und Wirkungsgrad). Die Einschaltung eines Kondensators bringt ein hohes Anlaufmoment; dies ist aus technischer Sicht die optimale Lösung.

3. Spaltpolmotor:

Der Spaltpolmotor stellt eine besondere Form des Einphasenasynchronmotors mit Hilfswicklung dar: Die Hauptwicklung sitzt auf zwei ausgeprägten Polen und besteht aus konzentrierten Spulen. Sie liegt am Einphasennetz. Die Hilfswicklung ist als Kurzschlussring ausgebildet und umschließt nur einen Teil des Poles. Sie wird transformatorisch von der Hauptwicklung gespeist. Der Rotor ist wieder als Käfigläufer ausgebildet.



Nur durch den Widerstand R_h der Hilfswicklung wird die Phasenverschiebung der Ströme in Haupt- und Hilfswicklung hervorgerufen. Wegen der gleichzeitigen räumlichen Versetzung der Wicklungen zueinander entsteht ein elliptisches Drehfeld, das den Anlauf ermöglicht. Da das Hauptfeld dem Hilfsfeld voreilt (der Kurzschlussring verzögert eine Feldänderung), dreht sich der Rotor des Spaltpolmotors immer vom Hauptpol zum Hilfspol.

Häufig wird der Kurzschlussring nicht aus Kupfer, sondern aus Messingbronze hergestellt, um den Widerstand R_h zu erhöhen.

Spaltpolmaschinen haben wegen der Verluste im Kurzschlussring und wegen des gegenlaufenden Drehfeldes einen relativ schlechten Wirkungsgrad von 20 bis 40%. Das Anlaufmoment ist geringer und der Anlaufstrom höher als beim Kondensatormotor. Deshalb wird der Spaltpolmotor trotz des sehr einfachen Aufbaus und der sehr geringen Herstellungskosten nur für kleine Leistungen bis ca. 100W eingesetzt.

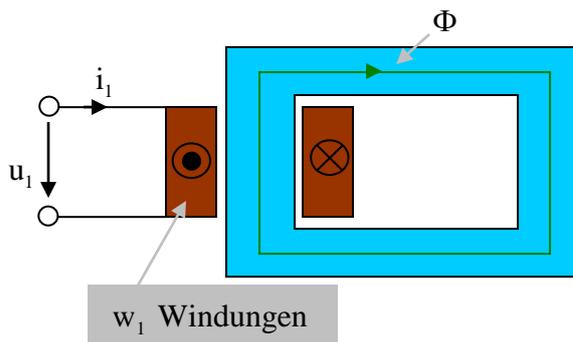
9 Transformator

9.1 Idealer Transformator (verlustfrei und streuungslos)

„Verlustfrei“ bedeutet: Es treten keine Stromwärmeverluste ($R = 0$) und keine Eisenverluste ($P_{Fe} = 0$) auf.

„Streuungslos“ bedeutet: Es existieren keine magnetischen Felder in der Luft, der Fluss verläuft nur im Eisen.

Zunächst wird eine Spule mit der eingprägten Wechselspannung $u_1 = \sqrt{2}U_1 \cos(\omega t)$ betrachtet, die auf einen Eisenkern gewickelt ist:



Aus dem Induktionsgesetz ($u_1 = \frac{d\Psi_1}{dt} = w_1 \frac{d\Phi}{dt}$) folgt für den Fluss:

$$\Phi = \frac{1}{w_1} \int u_1 dt = \frac{\sqrt{2}U_1}{w_1 \omega} \sin(\omega t) + C$$

Die Konstante C ist gleich Null, wenn $\Phi(t=0) = 0$ gilt. Dies ist der Fall, wenn die Spule zum Spannungsmaximum eingeschaltet wird. Im Folgenden gelte $C = 0$.

Zwischen dem Effektivwert der eingprägten Spannung U_1 und der Amplitude des dadurch hervorgerufenen Flusses besteht folgender Zusammenhang:

$$\hat{\Phi} = \frac{\sqrt{2}U_1}{w_1 \omega} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \frac{1}{w_1 f} U_1 \Rightarrow U_1 = 4,44 w_1 f \hat{\Phi}$$

Aus dem Durchflutungsgesetz $\oint \vec{H} d\vec{l} = \Theta$ folgt, wenn man die Integration durch eine Summation über Abschnitte mit konstanten Eigenschaften ersetzt:

$$\Theta = w_1 i_1 = \sum_n H_n l_n = \sum_n \frac{B_n}{\mu_0 \mu_{r,n}} l_n = \Phi \sum_n \frac{l_n}{A_n \mu_0 \mu_{r,n}} = \Phi \sum_n R_{m,n}$$

Hierbei ist $R_{m,n}$ der magnetische Widerstand des n -ten Abschnittes und $\mu_{r,n}$ die relative Permeabilität dieses Abschnittes.

Man definiert nun einen Magnetisierungsstrom $i_{1,m}$ derart, dass dieser der gesamten Durchflutung und der Windungszahl der Spule 1 proportional ist. Hier gilt:

$$w_1 i_1 = \Phi \sum_n R_{m,n} = w_1 i_{1,m}$$

Mit dem gesamten magnetischen Widerstand $R_m = \sum_n R_{m,n}$ und dem magnetischen Leitwert

$\Lambda = \frac{1}{R_m}$ folgt: $\Phi = \Theta \Lambda$. Für den verketteten Fluss gilt:

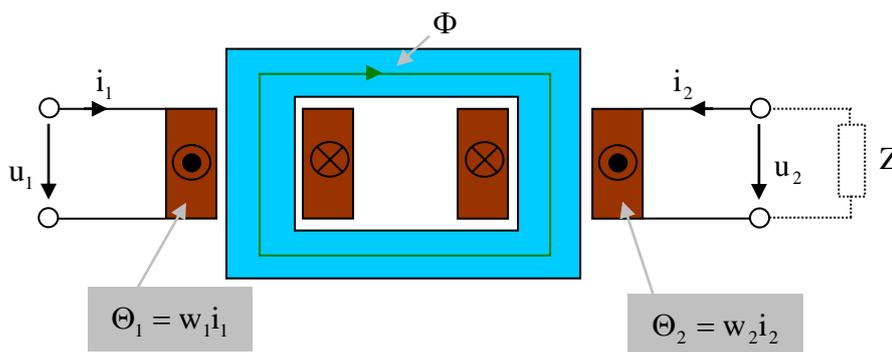
$$\Psi_1 = w_1 \Phi = w_1^2 \Lambda i_{1,m}$$

Für $\mu_{r,n} = \text{const.}$ gilt:

$$u_1 = w_1^2 \Lambda \frac{di_{1,m}}{dt} = L_{1h} \frac{di_{1,m}}{dt}$$

mit der Hauptinduktivität $L_{1h} = w_1^2 \Lambda = \frac{w_1^2}{\sum_n \frac{l_n}{A_n \mu_0 \mu_{r,n}}}$

Das Schema des einsträngigen Transformators sieht wie folgt aus:



Es werden nun zwei unterschiedliche Fälle betrachtet:

Fall a: Leerlauf ($Z = \infty, i_2 = 0$)

$$u_1 = \frac{d\Psi_1}{dt} = w_1 \frac{d\Phi}{dt} = w_1^2 \Lambda \frac{di_{1,m}}{dt} = L_{1h} \frac{di_{1,m}}{dt}$$

$$u_2 = \frac{d\Psi_2}{dt} = w_2 \frac{d\Phi}{dt} = w_1 w_2 \Lambda \frac{di_{1,m}}{dt} = L_{21} \frac{di_{1,m}}{dt}$$

$$\text{Spannungsübersetzung: } \frac{u_1}{u_2} = \frac{w_1}{w_2}$$

Fall b: Belastung ($Z < \infty, i_2 \neq 0$)

Wegen der eingprägten Spannung u_1 ist Φ vorgegeben. $\hat{\Phi}$ bleibt unverändert und unabhängig von i_2 . Dann bleibt aber auch die Gesamtdurchflutung unverändert:

$$\Theta = \Theta_1 + \Theta_2 = w_1 i_1 + w_2 i_2 = w_1 i_{1,m}$$

Daraus folgt: $i_1 = i_{1,m} - i_2 \frac{w_2}{w_1}$

Bei Vollast gilt meistens $i_{1,m} \ll i_1$. Ist dies erfüllt, folgt für die

Stromübersetzung: $\frac{i_1}{i_2} \approx -\frac{w_2}{w_1}$

Es gelten die Spannungsgleichungen:

$$u_1 = \frac{d\Psi_1}{dt}, \quad \Psi_1 = L_{1h}i_1 + L_{12}i_2$$

$$u_2 = \frac{d\Psi_2}{dt}, \quad \Psi_2 = L_{2h}i_2 + L_{21}i_1$$

Für die Induktivitäten gilt:

$$\begin{aligned} L_{1h} &= w_1^2 \Lambda, & L_{2h} &= w_2^2 \Lambda & \text{und} & & L_m^2 &= L_{1h} L_{2h} \\ L_{12} &= L_{21} = L_m = w_1 w_2 \Lambda \end{aligned}$$

9.2 Verlustfreier Transformator

Bei Vernachlässigung von Stromwärmeverlusten und Eisenverlusten, aber Berücksichtigung der Magnetfelder im Luftraum, die nicht gleichzeitig mit beiden Wicklungen voll verkettet sind (Streuung), lauten die Spannungsgleichungen (Annahme: $\mu_r = \text{const.}$):

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + L_m \frac{di_2}{dt} \quad L_1 > L_{1h}$$

$$u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + L_m \frac{di_1}{dt} \quad L_2 > L_{2h}$$

wobei $L_m < L_{1h}$ und $L_m < L_{2h}$ gilt.

Wird der Transformator von einer Seite gespeist, so lassen sich Leerlaufinduktivität L_0 und Kurzschlussinduktivität L_k bestimmen:

	Speisung von Seite 1	Speisung von Seite 2
Leerlauf	$i_2 = 0$ $u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt}; \quad L_0 = L_1$	$i_1 = 0$ $u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt}; \quad L_0 = L_2$
Kurzschluss	$u_2 = 0$ $\frac{di_2}{dt} = - \frac{L_m}{L_2} \frac{di_1}{dt}$ $u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - \frac{L_m^2}{L_2} \frac{di_1}{dt}$ $= L_1 \left(1 - \frac{L_m^2}{L_1 L_2} \right) \frac{di_1}{dt}$ $= \sigma L_1 \frac{di_1}{dt}; \quad L_k = \sigma L_1$	$u_1 = 0$ $\frac{di_1}{dt} = - \frac{L_m}{L_1} \frac{di_2}{dt}$ $u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} - \frac{L_m^2}{L_1} \frac{di_2}{dt}$ $= L_2 \left(1 - \frac{L_m^2}{L_1 L_2} \right) \frac{di_2}{dt}$ $= \sigma L_2 \frac{di_2}{dt}; \quad L_k = \sigma L_2$

Das Verhältnis von Kurzschluss- zu Leerlaufinduktivität ist gleich σ , unabhängig davon, welche Seite gespeist wird. σ heißt Gesamtstreuiziffer.

$$\sigma = 1 - \frac{L_m^2}{L_1 L_2} = \frac{L_k}{L_0} = \frac{I_0}{I_k} \Big|_{u=\text{const.}}$$

Die Ströme I_0 und I_k sind die Effektivwerte der bei Leerlauf bzw. Kurzschluss fließenden Ströme.

Aufgrund der Streuung ist nun $L_1 L_2 > L_{1h} L_{2h} = L_m^2$, daher gilt für den Koppelfaktor

$$k = \sqrt{\frac{L_m^2}{L_1 L_2}} < 1 \text{ und für die Gesamtstreuiziffer:}$$

$$\sigma = 1 - k^2 = 1 - \frac{L_m^2}{L_1 L_2} > 0$$

Die Gesamtstreuiziffer σ lässt sich also näherungsweise aus Leerlauf- und Kurzschlussmessung bestimmen.

9.3 Technischer Transformator

Berücksichtigt man nun die Ohm'schen Wicklungswiderstände R_1 und R_2 und die Streuung (d.h. die magnetischen Felder im Luftraum, die nicht gleichzeitig mit beiden Wicklungen voll verkettet sind), so lauten die Spannungsgleichungen (Annahme $\mu_r = \text{const.}$, Eisenverluste $P_{\text{Fe}} = 0$):

$$\begin{aligned} u_1 &= R_1 i_1 + \frac{d\Psi_1}{dt} & \Psi_1 &= L_1 i_1 + L_m i_2 \\ u_2 &= R_2 i_2 + \frac{d\Psi_2}{dt} & \Psi_2 &= L_2 i_2 + L_m i_1 \end{aligned} \quad \text{mit}$$

oder ausführlich:

$$\begin{aligned} u_1 &= R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + L_m \frac{di_2}{dt} \\ u_2 &= R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + L_m \frac{di_1}{dt} \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise wird dies zu:

$$\begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L_1 & L_m \\ L_m & L_2 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Betrachtet man nun zeitlich sinusförmige Spannungen und Ströme, so folgt mit $\underline{u} = \text{Re}\{\sqrt{2}\underline{U}e^{j\omega t}\}$ und $\underline{i} = \text{Re}\{\sqrt{2}\underline{I}e^{j\omega t}\}$:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= R_1 \underline{I}_1 + j\omega L_1 \underline{I}_1 + j\omega L_m \underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 &= R_2 \underline{I}_2 + j\omega L_2 \underline{I}_2 + j\omega L_m \underline{I}_1 \end{aligned}$$

Für den Leerlauf der Spule 2 ($\underline{I}_2 = 0$) folgt nun:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{1,0} = \frac{\underline{U}_1}{R_1 + j\omega L_1}$$

für den Kurzschluss der Spule 2 ($\underline{U}_2 = 0$) folgt:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{1,k} \approx \frac{\underline{U}_1}{R_1 + j\sigma\omega L_1}$$

Für den ideellen Leerlauf- bzw. Kurzschlussstrom (d.h. die Ströme für $R_1 = R_2 = 0$) gilt dann, falls $\underline{U}_1 = U_1$ gewählt wird:

$$\begin{aligned} \underline{I}_{1,0,i} &= \frac{\underline{U}_1}{j\omega L_1} = -j \frac{\underline{U}_1}{\omega L_1} = -j \frac{U_1}{\omega L_1} = -j \underline{I}_{1,0,i} \\ \underline{I}_{1,k,i} &= \frac{\underline{U}_1}{j\sigma\omega L_1} = -j \frac{\underline{U}_1}{\sigma\omega L_1} = -j \frac{U_1}{\sigma\omega L_1} = -j \frac{\underline{I}_{1,0,i}}{\sigma} \end{aligned}$$

Im Kurzschlussfall wird der Strom also durch die Streureaktanz $\sigma\omega L_1$ begrenzt.

9.4 Ersatzschaltbild

Zur Beurteilung des Betriebsverhaltens ist es vielfach zweckmäßig, die magnetische Kopplung durch eine galvanische Verbindung von Primär- und Sekundärseite zu ersetzen. Hierzu werden die Größen der Sekundärseite auf die Primärseite umgerechnet. Dies geschieht mit einer zunächst willkürlich gewählten reellen Größe „ \ddot{u} “:

$$u_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{d}{dt} i_1 + L_m \frac{d}{dt} i_2$$

$$u_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{d}{dt} i_2 + L_m \frac{d}{dt} i_1$$

Mit $u_2^\otimes = \ddot{u} u_2$ und $i_2^\otimes = \frac{1}{\ddot{u}} i_2$ folgt:

$$u_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{d}{dt} i_1 + L_m \frac{d}{dt} \ddot{u} i_2^\otimes$$

$$\frac{u_2^\otimes}{\ddot{u}} = R_2 \ddot{u} i_2^\otimes + L_2 \frac{d}{dt} \ddot{u} i_2^\otimes + L_m \frac{d}{dt} i_1$$

Mit $L_m^\otimes = \ddot{u} L_m$, $R_2^\otimes = \ddot{u}^2 R_2$ und $L_2^\otimes = \ddot{u}^2 L_2$ folgt weiter:

$$u_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{d}{dt} i_1 + L_m^\otimes \frac{d}{dt} i_2^\otimes$$

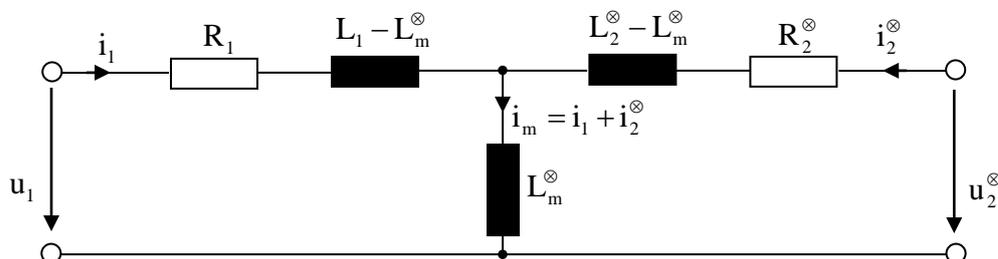
$$u_2^\otimes = R_2^\otimes i_2^\otimes + L_2^\otimes \frac{d}{dt} i_2^\otimes + L_m^\otimes \frac{d}{dt} i_1$$

Durch Umformung erhält man weiter:

$$u_1 = R_1 i_1 + (L_1 - L_m^\otimes) \frac{d}{dt} i_1 + L_m^\otimes \left(\frac{d}{dt} i_1 + \frac{d}{dt} i_2^\otimes \right)$$

$$u_2^\otimes = R_2^\otimes i_2^\otimes + (L_2^\otimes - L_m^\otimes) \frac{d}{dt} i_2^\otimes + L_m^\otimes \left(\frac{d}{dt} i_1 + \frac{d}{dt} i_2^\otimes \right)$$

Diese Gleichungen führen nun auf das folgende Ersatzschaltbild:



Hierbei ist $i_m = i_1 + i_2^\otimes$ der Magnetisierungsstrom. Die Aufteilung der Streuinduktivitäten $L_1 - L_m^\otimes$ und $L_2^\otimes - L_m^\otimes$ ist wegen der freien Wahl von „ \ddot{u} “ willkürlich.

Die hier durchgeführte Transformation ist leistungsinvariant, denn es gilt:

$$\mathbf{u}_2^{\otimes} \mathbf{i}_2^{\otimes} = \mathbf{u}_2 \mathbf{i}_2$$

$$\mathbf{R}_2^{\otimes} \mathbf{i}_2^{\otimes 2} = \mathbf{R}_2 \mathbf{i}_2^2$$

$$\frac{1}{2} \mathbf{L}_2^{\otimes} \mathbf{i}_2^{\otimes 2} = \frac{1}{2} \mathbf{L}_2 \mathbf{i}_2^2 \quad , \quad \frac{1}{2} \mathbf{L}_m^{\otimes} \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2^{\otimes} = \frac{1}{2} \mathbf{L}_m \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2$$

Da das Übersetzungsverhältnis „ü“ grundsätzlich beliebig ist, lassen sich unendlich viele Ersatzbilder angeben. Im Folgenden werden die zwei gebräuchlichsten angegeben.

9.5 Wahl des Übersetzungsverhältnisses „ü“

Fall a: $\ddot{u} = \frac{w_1}{w_2}$

Das Verhältnis w_1/w_2 kann weder aus Leistungsschildangaben, noch aus Messungen ermittelt werden. Die Wahl von $\ddot{u} = w_1/w_2$ ist aber für die Konstruktion und Berechnung von Transformatoren wichtig, denn sie erlaubt eine schematische Aufteilung in Hauptfluss und Streuflüsse. Dadurch wird es möglich, die Eisensättigung zu berücksichtigen. Für $\ddot{u} = w_1/w_2$ werden folgende „gestrichene“ Größen definiert; alle anderen Festlegungen von \ddot{u} werden hierauf bezogen:

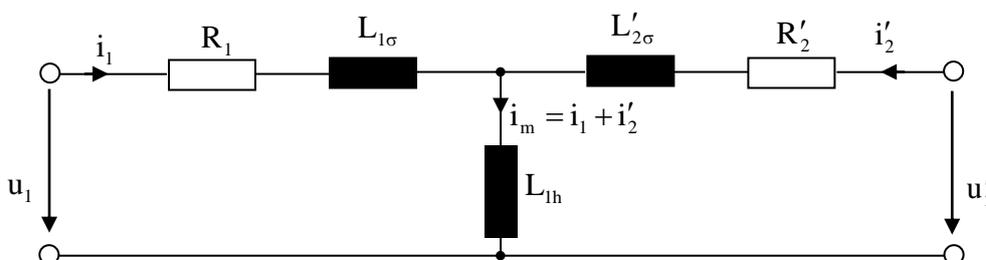
$\ddot{u} = \frac{w_1}{w_2} = \frac{w_1^2 \Lambda}{w_2 w_1 \Lambda} = \frac{L_{1h}}{L_m} \Rightarrow L_{1h} = \frac{w_1}{w_2} L_m$	Hauptinduktivität
$L_1 - \frac{w_1}{w_2} L_m = L_{1\sigma}$	Streuinduktivität der Seite 1
$\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^2 L_2 - \frac{w_1}{w_2} L_m = L'_{2\sigma}$	Streuinduktivität der Seite 2 (auf Seite 1 umgerechnet)
$\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^2 L_2 = L'_2$	auf Seite 1 umgerechnetes L_2
$\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^2 R_2 = R'_2$	auf Seite 1 umgerechnetes R_2
$\frac{w_1}{w_2} u_2 = u'_2$	auf Seite 1 umgerechnetes u_2
$\frac{w_2}{w_1} i_2 = i'_2$	auf Seite 1 umgerechnetes i_2

Die Spannungsgleichungen lauten somit:

$$u_1 = R_1 i_1 + L_{1\sigma} \frac{d}{dt} i_1 + L_{1h} \frac{d}{dt} i_m \quad \text{mit} \quad i_m = i_1 + i'_2$$

$$u'_2 = R'_2 i'_2 + L'_{2\sigma} \frac{d}{dt} i'_2 + L_{1h} \frac{d}{dt} i_m$$

Damit wird das Ersatzschaltbild zu:



Die Einzelstreuflüsse, die jeweils nur mit einer Wicklung verkettet sind, werden durch die Streuinduktivitäten $L_{1\sigma}$ und $L'_{2\sigma}$ repräsentiert:

$$\Psi_{1\sigma} = w_1 \Phi_{1\sigma} = L_{1\sigma} i_1$$

$$\Psi'_{2\sigma} = w_1 \Phi'_{2\sigma} = L'_{2\sigma} i'_2 = \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^2 L_{2\sigma} \frac{w_2}{w_1} i_2 = \frac{w_1}{w_2} L_{2\sigma} i_2 = \frac{w_1}{w_2} w_2 \Phi_{2\sigma} = w_1 \Phi_{2\sigma}$$

Der Streufluss wird also durch die Transformation nicht geändert. Für die Streuziffern gilt dann (der Hauptfluss durchsetzt beide Wicklungen vollständig, der Streufluss ist dagegen nur mit der betrachteten Wicklung verkettet):

$$\sigma_1 = \frac{\Phi_{1\sigma}}{\Phi_{1h}} = \frac{\frac{1}{w_1} L_{1\sigma} i_1}{\frac{1}{w_1} L_{1h} i_1} = \frac{L_{1\sigma}}{L_{1h}}$$

$$\sigma_2 = \frac{\Phi_{2\sigma}}{\Phi_{1h}} = \frac{\Phi'_{2\sigma}}{\Phi_{1h}} = \frac{\frac{1}{w_1} L'_{2\sigma} i'_2}{\frac{1}{w_1} L_{1h} i'_2} = \frac{L'_{2\sigma}}{L_{1h}}$$

Der Zusammenhang mit der Gesamtstreuiziffer σ ergibt sich nun wie folgt:

$$\sigma = 1 - \frac{L_m^2}{L_1 L_2} = 1 - \frac{\ddot{u}^2 L_m^2}{L_1 \ddot{u}^2 L_2} = 1 - \frac{L_{1h}^2}{L_1 L'_2} = 1 - \frac{1}{\frac{L_1}{L_{1h}} \frac{L'_2}{L_{1h}}} = 1 - \frac{1}{\frac{L_{1h} + L_{1\sigma}}{L_{1h}} \frac{L_{1h} + L'_{2\sigma}}{L_{1h}}}$$

$$= 1 - \frac{1}{(1 + \sigma_1)(1 + \sigma_2)}$$

Berechnung der Leerlauf-Spannungsübersetzung:

$$i'_2 = 0 \Rightarrow i_m = i_1 \Rightarrow \begin{aligned} u_{1,0} &= R_1 i_1 + (L_{1\sigma} + L_{1h}) \frac{d}{dt} i_1 \\ u'_{2,0} &= L_{1h} \frac{d}{dt} i_1 \end{aligned}$$

Mit $\frac{w_1}{w_2} u_2 = u'_2$ und vernachlässigbarem Spannungsabfall an R_1 folgt:

$$u_{1,0} = (L_{1\sigma} + L_{1h}) \frac{d}{dt} i_1 \Rightarrow \frac{u_{1,0}}{u_{2,0}} = \frac{w_1}{w_2} \frac{L_{1\sigma} + L_{1h}}{L_{1h}} = \frac{w_1}{w_2} (1 + \sigma_1) \neq \frac{w_1}{w_2}$$

$$\frac{w_1}{w_2} u_{2,0} = L_{1h} \frac{d}{dt} i_1$$

Das Spannungsverhältnis bei sekundärem Leerlauf ist messbar; eine Aufteilung nach w_1/w_2 und $(1 + \sigma_1)$ ist jedoch nur möglich, wenn das Verhältnis der Windungszahlen bekannt ist.

Fall b: $\ddot{u} = \frac{u_{1,0}}{u_{2,0}}$

Das Übersetzungsverhältnis wird gleich dem Spannungsverhältnis bei sekundärem Leerlauf und $R_1 = 0$ gewählt. Es gilt dann:

$$\ddot{u} = \frac{u_{1,0}}{u_{2,0}} = (1 + \sigma_1) \frac{w_1}{w_2} = \frac{L_{1\sigma} + L_{1h}}{L_{1h} \frac{w_2}{w_1}} = \frac{L_1}{L_m}$$

Hiermit ergibt sich dann (die „gestrichenen“ Größen beziehen sich auf die Wahl $\ddot{u} = w_1/w_2$):

$$L_m^\otimes = \ddot{u} L_m = L_1$$

$$L_{1\sigma} = L_1 - L_m^\otimes = L_1 - \ddot{u} L_m = L_1 - \frac{L_1}{L_m} L_m = 0$$

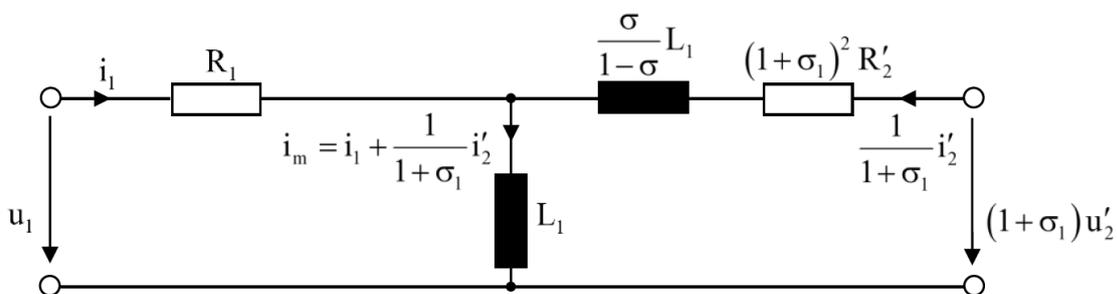
$$\begin{aligned} L_{2\sigma} &= L_2 - L_m^\otimes = L_2 - \ddot{u} L_m = L_2 - \frac{L_1}{L_m} L_m = L_2 - L_1 = L_2 \left(1 - \frac{L_1}{L_2} \right) = L_2 \left(1 - \frac{L_1 L_m^2}{L_1^2 L_2} \right) = \sigma L_2^\otimes \\ &= \sigma \left(\frac{L_1}{L_m} \right)^2 L_2 = \sigma \frac{L_1 L_2}{L_m^2} L_1 = \frac{\sigma}{1 - \sigma} L_1 \end{aligned}$$

$$R_2^\otimes = \ddot{u}^2 R_2 = (1 + \sigma_1)^2 \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^2 R_2 = (1 + \sigma_1)^2 R_2'$$

$$u_2^\otimes = \ddot{u} u_2 = (1 + \sigma_1) \frac{w_1}{w_2} u_2 = (1 + \sigma_1) u_2'$$

$$i_2^\otimes = \frac{1}{\ddot{u}} i_2 = \frac{1}{(1 + \sigma_1) \frac{w_1}{w_2}} i_2 = \frac{1}{1 + \sigma_1} i_2'$$

Das Ersatzschaltbild sieht nun wie folgt aus:



Das Ersatzschaltbild mit $\ddot{u} = u_{1,0}/u_{2,0}$ gibt das Betriebsverhalten des Transformators genau so exakt wieder, wie das Ersatzschaltbild mit $\ddot{u} = w_1/w_2$ (das Übersetzungsverhältnis \ddot{u} kann ja beliebig gewählt werden).

Für $\ddot{u} = w_1/w_2$ erhält man ein Ersatzschaltbild, das die Interpretation von primärseitiger und sekundärseitiger Streuung zulässt.

Für $\ddot{u} = u_{1,0}/u_{2,0}$ erhält man ein Ersatzschaltbild, bei dem die primärseitige Streuung zu Null wird. Dies erleichtert die Rechnung. Zudem lassen sich alle Elemente dieses Ersatzschaltbildes aus Messungen bestimmen.

9.6 Betriebsverhalten

Im Folgenden soll das Betriebsverhalten des Transformators für sinusförmige Ströme und Spannungen untersucht werden, d.h. es werden komplexe Zeiger verwendet.

1. Leerlauf:

Im Leerlauf verhält sich der Transformator wie eine Eisendrossel mit Wirkwiderstand. Es gibt folgende Verlustkomponenten:

- Im Eisen durch Ummagnetisierung: P_{Fe}
- In der Wicklung (im Kupfer) durch Stromwärme: P_{Cu}

Die Eisenverluste setzen sich aus zwei Anteilen zusammen:

a) Wirbelstromverluste durch den Wechselfluss

Nach der Lenzschen Regel hat jede Flussänderung im Eisen Wirbelströme im elektrisch leitfähigen Eisenmaterial zur Folge, die ihrer Entstehungsursache entgegenwirken. Es entstehen Wirbelstromverluste:

$$P_{Fe,W} \sim f^2 \hat{B}^2 V_{Fe} \quad (V_{Fe} \text{ ist das Eisenvolumen})$$

Diese Wirbelstromverluste können klein gehalten werden, indem gegeneinander isolierte Bleche (statt massivem Eisen) verwendet werden und indem durch Zugabe von Silizium der spezifische Leitwert der Legierung verringert wird.

b) Hystereseverluste durch Ummagnetisierung

Die Ummagnetisierungsverluste sind proportional der bei einem Zyklus eingeschlossenen Fläche der Hysteresschleife

$$w_H = \int H dB \Rightarrow P_{Fe,H} \sim f w_H V_{Fe} \sim f \hat{B}^2 V_{Fe}$$

Die Hystereseverluste können reduziert werden, indem weichmagnetisches Material mit möglichst schmaler Hystereseschleife (erzielbar durch Legierungszusätze) verwendet wird.

c) Praktische Berechnung

Die praktische Berechnung erfolgt durch die folgende zugeschnittene Größengleichung:

$$P_{Fe} = \left(a_w \left(\frac{f}{50\text{Hz}} \right)^2 + a_H \frac{f}{50\text{Hz}} \right) \left(\frac{\hat{B}}{1\text{T}} \right)^2 \rho_{Fe} V_{Fe}$$

mit ρ_{Fe} als spezifischem Eisengewicht.

Die materialspezifischen Daten a_w und a_H (beide in W/kg) werden von den Materialherstellern angegeben.

Die Kupferverluste berechnen sich wie folgt:

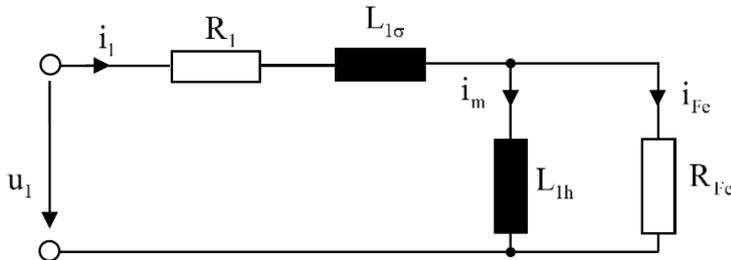
$$P_{Cu} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 = I_1^2 \frac{l_1}{\gamma A_{Cu,1}} + I_2^2 \frac{l_2}{\gamma A_{Cu,2}} = \frac{1}{\gamma} (J_1^2 l_1 A_{Cu,1} + J_2^2 l_2 A_{Cu,2}) = \frac{1}{\gamma} (J_1^2 V_{Cu,1} + J_2^2 V_{Cu,2})$$

Bei gleicher Stromdichte $J = J_1 = J_2$ (gleiche Ausnutzung) folgt:

$$P_{Cu} = \frac{1}{\gamma} J^2 (V_{Cu,1} + V_{Cu,2}) = \frac{1}{\gamma} J^2 V_{Cu}$$

Im hier betrachteten Leerlauf ist natürlich $I_2 = 0$ und damit $P_{Cu} = J^2 V_{Cu,1} / \gamma$

Die Eisenverluste können im Ersatzschaltbild durch einen Wirkwiderstand R_{Fe} parallel zur Hauptinduktivität L_{1h} berücksichtigt werden. Die Stromwärmeverluste sind durch die Widerstände R_1 und R'_2 repräsentiert (im Leerlauf allein durch R_1). Für den Leerlauf folgt dann folgendes Ersatzschaltbild:

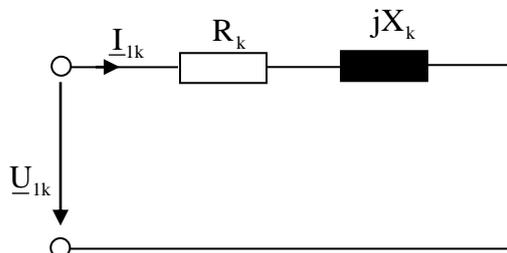


2. Kurzschluss:

Der Stoßkurzschluss ist ein transienter Vorgang; er führt aufgrund großer Kräfte zu hoher mechanischer Beanspruchung.

Der Dauerkurzschluss ist ein stationärer Betrieb; er wird zur Ermittlung von Daten genutzt. Im Folgenden wird der Dauerkurzschluss betrachtet.

Da $\omega L_{1h}, R_{Fe} \gg \omega L'_{2\sigma}, R'_2$ gilt, wird der hochohmige Zweig vernachlässigt. Damit vereinfacht sich das Ersatzschaltbild zu:



$$R_k = R_1 + R'_2$$

$$jX_k = j\omega(L_{1\sigma} + L'_{2\sigma})$$

$$\underline{Z}_k = R_k + jX_k$$

Auch im Kurzschlussfall verhält sich der Transformator wie eine Eisendrossel mit Wirkwiderstand, jedoch ist die an den Primärklemmen messbare Impedanz deutlich kleiner als im Leerlauf.

Die Primärspannung, bei der bei sekundärem Kurzschluss und Nennfrequenz der Nennprimärstrom $I_{1,N}$ fließt, heißt Nennkurzschlussspannung $U_{1,k,N} = I_{1,N} Z_k$. Die relative Kurzschlussspannung ist:

$$u_{1,k} = \frac{U_{1,k,N}}{U_{1,N}}$$

Die relative Kurzschlussspannung liegt für kleine Transformatoren bei ca. 3% und steigt mit der Größe der Transformatoren bis auf ca. 12%.

Der Strom, der im Kurzschluss bei Nennspannung $U_{1,k} = U_{1,N}$ fließt, heißt Nennkurzschlussstrom:

$$I_{1,k,N} = \frac{U_{1,N}}{Z_k} = \frac{U_{1,N}}{U_{1,k,N}} \frac{U_{1,k,N}}{Z_k} = I_{1,N} \frac{1}{u_{1,k}}$$

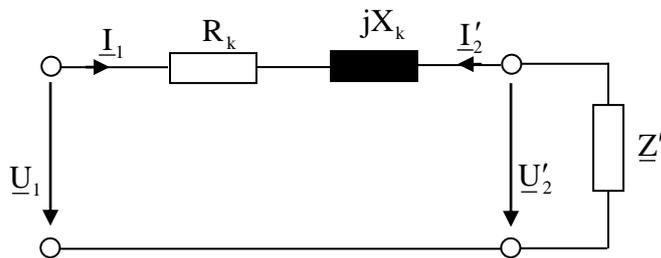
Mit den obigen Werten für die relative Kurzschlussspannung $u_{1,k}$ folgt für den Nennkurzschlussstrom, dass dieser etwa das 8-fache bis 30-fache des Nennstromes beträgt.

3. Nennbetrieb:

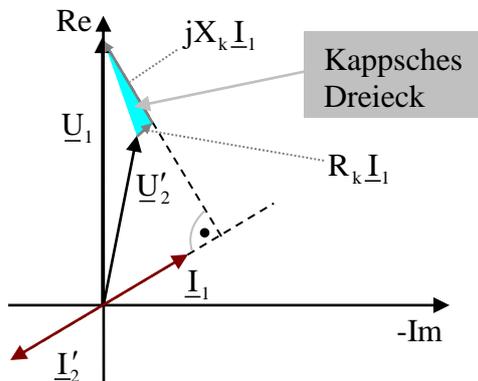
Wegen der bei technisch ausgeführten Transformatoren gültigen Relation

$$R : X_\sigma : X_{lh} : R_{Fe} \approx 1 : 2 : 1000 : 10000$$

rechnet man in der Praxis genügend genau mit dem vereinfachten Ersatzschaltbild:



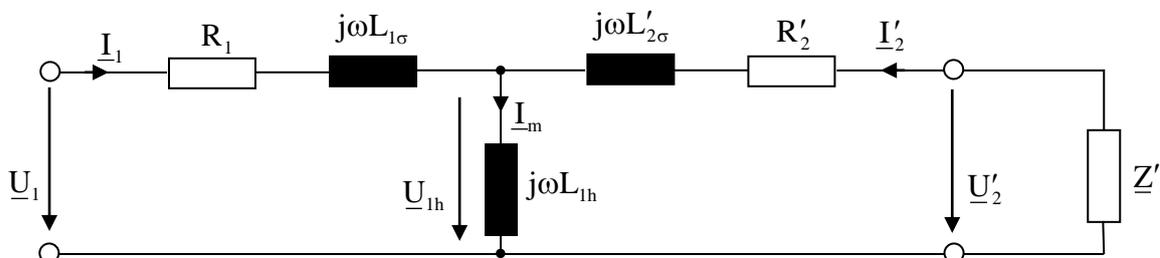
Hiermit ergibt sich bei Belastung ein einfaches Zeigerdiagramm:



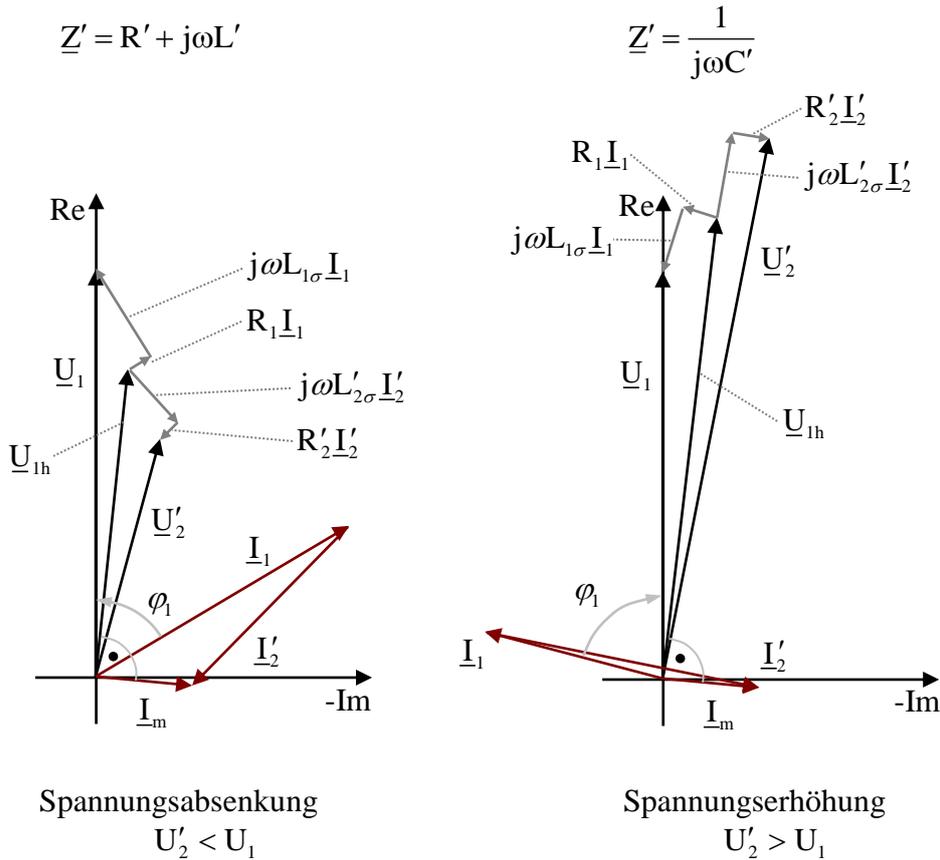
Die Eingangsspannung \underline{U}_1 und die auf die Eingangsseite bezogene Klemmenspannung \underline{U}'_2 unterscheiden sich durch das „Kappsche Dreieck“.

Für einen konstanten Stromwert ist dieses Dreieck eine konstante Größe und dreht sich bei vorgegebener Eingangsspannung um die Spitze von \underline{U}_1 , je nach Phasenlage des Stromes \underline{I}_1 .

Das (bis auf die Berücksichtigung der Eisenverluste) vollständige Ersatzschaltbild bei Belastung und Speisung mit sinusförmiger Spannung ist:



Für verschiedene Belastungen lässt sich aus diesem Ersatzschaltbild das jeweilige Zeigerdiagramm entwickeln:

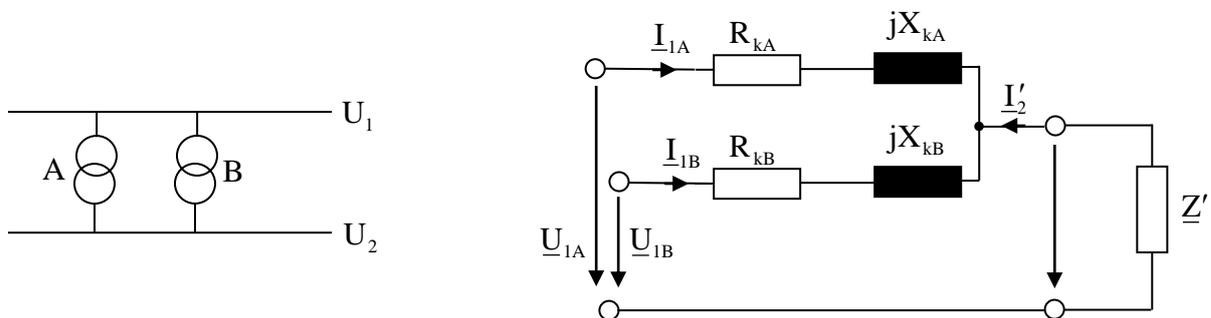


4. Parallelschaltung:

Für die Parallelschaltung zweier Transformatoren A und B werden folgende Forderungen aufgestellt:

- Es sollen keine Ausgleichströme fließen
- Die Lastaufteilung soll entsprechend der Nennleistungen erfolgen

Es kann das vereinfachte Ersatzschaltbild verwendet werden:



Für $\Delta U = \underline{U}_{1A} - \underline{U}_{1B} \neq 0$ fließt bereits im Leerlauf ein Ausgleichstrom der Größe

$$\underline{I}_{1A} = -\underline{I}_{1B} = \frac{\Delta U}{R_{kA} + jX_{kA} + R_{kB} + jX_{kB}} = \frac{\Delta U}{\underline{Z}_{kA} + \underline{Z}_{kB}}$$

Um dies zu vermeiden, müssen die Leerlaufspannungen nach Betrag und Phasenlage identisch sein.

Aus dem Ersatzschaltbild kann Folgendes abgelesen werden:

$$\underline{I}_{1A} Z_{kA} = \underline{I}_{1B} Z_{kB} \Rightarrow \frac{\underline{I}_{1A}}{\underline{I}_{1B}} = \frac{Z_{kB}}{Z_{kA}}$$

Die Lastströme haben also nur dann keine Phasenverschiebung gegeneinander, wenn $\frac{R_{kA}}{X_{kA}} = \frac{R_{kB}}{X_{kB}}$ gilt.

Für die Beträge gilt:

$$\begin{aligned} I_{1A} Z_{kA} = I_{1B} Z_{kB} &\Rightarrow \frac{I_{1A}}{I_{1A,N}} \frac{Z_{kA} I_{1A,N}}{U_{1,N}} = \frac{I_{1B}}{I_{1B,N}} \frac{Z_{kB} I_{1B,N}}{U_{1,N}} \\ &\Rightarrow \frac{I_{1A}}{I_{1A,N}} u_{kA} = \frac{I_{1B}}{I_{1B,N}} u_{kB} \end{aligned}$$

Die relative Strombelastung der beiden Transformatoren A und B erfolgt also umgekehrt zu deren relativer Kurzschlussspannung, d.h. der Transformator mit dem kleineren u_k wird prozentual stärker belastet.

Technisch sinnvoll ist, eine gleiche relative Strombelastung zu erreichen, d.h. $u_{kA} = u_{kB}$ wird angestrebt.

Es gelte nun $\frac{R_{kA}}{X_{kA}} = \frac{R_{kB}}{X_{kB}}$. Da dann die Lastströme keine Phasenverschiebung besitzen (s.o.),

folgt: $I_1 = I_{1A} + I_{1B}$ (I_1 ist der Gesamtstrom, $I_1 = -I_2'$).

Mit $I_{1B} = I_{1A} \frac{I_{1B,N}}{I_{1A,N}} \frac{u_{kA}}{u_{kB}}$ wird: $I_1 = I_{1A} \left(1 + \frac{I_{1B,N}}{I_{1A,N}} \frac{u_{kA}}{u_{kB}} \right)$ und daraus:

$$I_{1A} = I_1 \frac{1}{1 + \frac{I_{1B,N}}{I_{1A,N}} \frac{u_{kA}}{u_{kB}}} \quad \text{und} \quad I_{1B} = I_1 \frac{1}{1 + \frac{I_{1A,N}}{I_{1B,N}} \frac{u_{kB}}{u_{kA}}}$$

Schaltet man nun gleich große Trafos ($I_{1A,N} = I_{1B,N}$) parallel, so folgt für $u_{kA} = u_{kB}$:

$$I_{1A} = \frac{1}{2} I_1 \quad \text{und} \quad I_{1B} = \frac{1}{2} I_1$$

(es fließt also kein Ausgleichstrom).

Für $u_{kA} = \frac{1}{2} u_{kB}$ folgt:

$$I_{1A} = \frac{2}{3} I_1 = \frac{1}{2} I_1 + \frac{1}{6} I_1 \quad \text{und} \quad I_{1B} = \frac{1}{3} I_1 = \frac{1}{2} I_1 - \frac{1}{6} I_1$$

(es fließt also ein Ausgleichstrom der Größe $1/6 I_1$).

5. Wirkungsgrad:

Der Wirkungsgrad η berechnet sich zu:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1}$$

wobei P_2 die abgegebene Wirkleistung und P_1 die aufgenommene Wirkleistung ist.

Bei Betrieb des Transformators an konstanter Spannung sind die Eisenverluste konstant, da sie dem Quadrat der Flussdichte (und somit dem Quadrat der Spannung) proportional sind. Die Kupferverluste sind proportional zum Quadrat des Stromes.

Somit folgt (für den Betrieb an konstanter Spannung):

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_1 - P_{Fe,N} - P_{Cu,N} \left(\frac{I_1}{I_{1,N}} \right)^2}{P_1}$$

$$= 1 - \frac{P_{Fe,N} + P_{Cu,N} \left(\frac{I_1}{I_{1,N}} \right)^2}{U_1 I_1 \cos(\varphi_1)}$$

Bei welcher Belastung ist nun der Wirkungsgrad maximal ($\eta = \eta_{\max}$)?

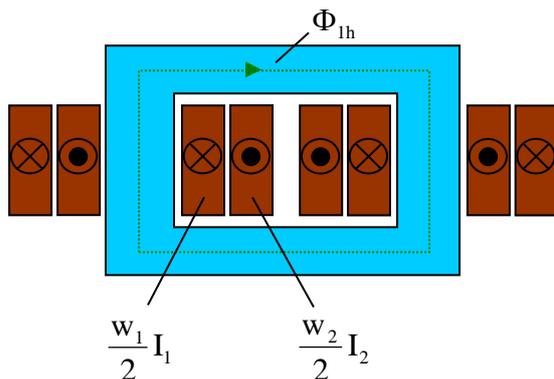
$$\frac{\partial \eta}{\partial I_1} = 0 \Rightarrow \frac{2P_{Cu,N} \frac{I_1}{I_{1,N}^2} U_1 I_1 \cos(\varphi_1) - \left(P_{Fe,N} + P_{Cu,N} \frac{I_1^2}{I_{1,N}^2} \right) U_1 \cos(\varphi_1)}{(U_1 I_1 \cos(\varphi_1))^2} = 0$$

$$\Rightarrow 2P_{Cu,N} \frac{I_1}{I_{1,N}^2} I_1 - \left(P_{Fe,N} + P_{Cu,N} \frac{I_1^2}{I_{1,N}^2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow P_{Cu} = P_{Cu,N} \frac{I_1^2}{I_{1,N}^2} = P_{Fe,N}$$

Der Wirkungsgrad als Funktion der Belastung ist also in dem Betriebspunkt maximal, in dem die Kupferverluste gleich den Eisenverlusten sind.

6. Berechnung der Hauptinduktivität:



Achtung: Es wird folgende Vereinbarung bei der Verwendung der komplexen Wechselstromrechnung getroffen:

- Magnetische Größen (z.B. B, H, Θ) sind Scheitelwerte
- Elektrische Größen (z.B. U, I) sind Effektivwerte

Grund: Der Eisenquerschnitt wird aufgrund der maximalen Flussdichte dimensioniert (Sättigung), der elektrische Kreis aufgrund der zulässigen Verluste.

Für den obigen Transformator gilt (mit $\dot{u} = w_1/w_2$):

$$\Theta = w_1 \sqrt{2} I_1 + w_2 \sqrt{2} I_2 = w_1 \sqrt{2} \left(I_1 + \frac{w_2}{w_1} I_2 \right) = w_1 \sqrt{2} I_m$$

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = H_{Fe} l_{Fe} = \frac{B_{Fe}}{\mu_0 \mu_r} l_{Fe}$$

Mit Hilfe des Durchflutungsgesetzes $\oint \vec{H} d\vec{l} = \Theta$ folgt nun:

$$\frac{B_{Fe}}{\mu_0 \mu_r} l_{Fe} = w_1 \sqrt{2} I_m \Rightarrow B_{Fe} = \frac{\mu_0 \mu_r}{l_{Fe}} w_1 \sqrt{2} I_m$$

Damit $I_m \rightarrow 0$ gilt, muss μ_r möglichst groß werden, d.h. es muss Eisen mit hoher Permeabilität verwendet werden.

Die Induktivität kann aus der magnetischen Energie berechnet werden:

$$W_{mag} = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{H} \vec{B} dV = \frac{1}{2} L i^2$$

$$W_{mag} = \frac{1}{2} \frac{B_{Fe}^2}{\mu_0 \mu_r} V = \frac{1}{2 \mu_0 \mu_r} \left(\frac{\mu_0 \mu_r}{l_{Fe}} w_1 \sqrt{2} I_m \right)^2 l_{Fe} A_{Fe}$$

$$= \frac{1}{2} L_{lh} (\sqrt{2} I_m)^2$$

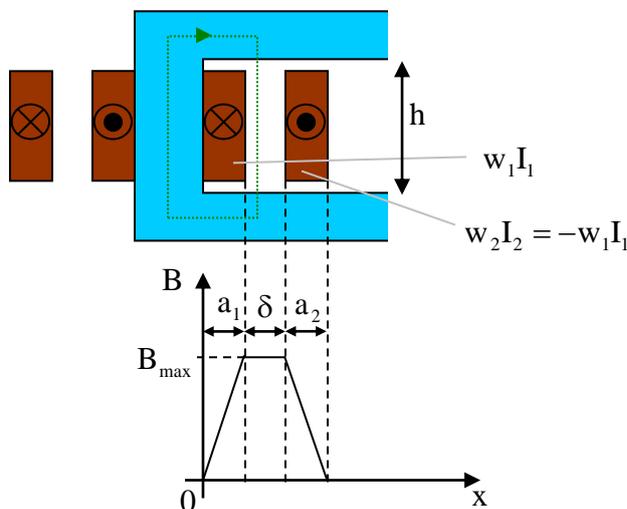
$$\Rightarrow L_{lh} = w_1^2 \frac{\mu_0 \mu_r A_{Fe}}{l_{Fe}}$$

Mit $\mu_r \rightarrow \infty$ geht also auch $L_{lh} \rightarrow \infty$.

7. Berechnung der Streuinduktivität:

Für den Dauerkurzschluss bzw. für eine Spannungsänderung ist in der Praxis die Streureaktanz $X_k = X_\sigma = \omega L_\sigma = \omega L_{1\sigma} + \omega L'_{2\sigma}$ maßgeblich. Für $X_{lh} \gg X_\sigma$ ($X_{lh} \rightarrow \infty$, $\mu_r \rightarrow \infty$) gilt:

$$I_m = 0 \Rightarrow I_1 = -I'_2 \Rightarrow I_1 = -\frac{w_2}{w_1} I_2$$



Aus dem Durchflutungsgesetz $\oint \vec{H} d\vec{l} = \Theta$ folgt:

$$\Theta(x) = H(x)h = \frac{B(x)}{\mu_0} h$$

$$\Rightarrow B(x) = \frac{\mu_0}{h} \Theta(x)$$

$$\Rightarrow B_{\max} = \frac{\mu_0}{h} w_1 \sqrt{2I_1} = -\frac{\mu_0}{h} w_2 \sqrt{2I_2}$$

Es folgt für die einzelnen Bereiche:

- $0 \leq x \leq a_1$: $B(x) = B_{\max} \frac{x}{a_1}$
- $a_1 \leq x \leq a_1 + \delta$: $B(x) = B_{\max}$
- $a_1 + \delta \leq x \leq a_1 + \delta + a_2$: $B(x) = B_{\max} \frac{a_1 + \delta + a_2 - x}{a_2}$

Die Streuinduktivität wird aus der magnetischen Energie berechnet:

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{H} \vec{B} dV \quad \text{mit} \quad dV = h l_m dx$$

wobei l_m die mittlere Windungslänge der Wicklung ist (Näherung!). Es folgt weiter:

$$\begin{aligned} W_{\text{mag}} &= \frac{h l_m}{2 \mu_0} \int_0^{a_1 + \delta + a_2} B^2(x) dx \\ &= \frac{h l_m}{2 \mu_0} B_{\max}^2 \left[\int_0^{a_1} \left(\frac{x}{a_1} \right)^2 dx + \int_{a_1}^{a_1 + \delta} dx + \int_{a_1 + \delta}^{a_1 + \delta + a_2} \left(\frac{a_1 + \delta + a_2 - x}{a_2} \right)^2 dx \right] \\ &= \frac{h l_m}{2 \mu_0} \left(\frac{\mu_0}{h} w_1 \sqrt{2I_1} \right)^2 \left[\left(\frac{1}{a_1^2} \frac{1}{3} a_1^3 \right) + (a_1 + \delta - a_1) - \frac{1}{a_2^2} \frac{1}{3} (-a_2^3) \right] \\ &= \frac{h l_m}{2 \mu_0} \left(\frac{\mu_0}{h} w_1 \sqrt{2I_1} \right)^2 \left(\frac{a_1}{3} + \delta + \frac{a_2}{3} \right) \end{aligned}$$

Mit $W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L_{\sigma} (\sqrt{2I_1})^2$ folgt:

$$\begin{aligned} L_{\sigma} &= L_{1\sigma} + L'_{2\sigma} = \frac{h l_m}{\mu_0} \left(\frac{\mu_0}{h} w_1 \right)^2 \left(\frac{a_1}{3} + \delta + \frac{a_2}{3} \right) \\ &= w_1^2 \frac{\mu_0 l_m}{h} \left(\frac{a_1}{3} + \delta + \frac{a_2}{3} \right) = \mu_0 \lambda_{\sigma} l_m w_1^2 \end{aligned}$$

Der Streuleitwert $\lambda_{\sigma} = \frac{1}{h} \left(\frac{a_1}{3} + \delta + \frac{a_2}{3} \right)$ ist nur von Geometrie Größen abhängig.

Die Aufteilung von L_{σ} in $L_{1\sigma}$ und $L'_{2\sigma}$ ist willkürlich. Damit die Streuinduktivität klein bleibt, muss der Abstand δ der beiden Wicklungen so klein wie möglich gewählt werden. Die Flächen $a_1 h$ und $a_2 h$ werden aufgrund der zulässigen Stromdichten (Verluste!) dimensioniert. Durch mehrfachen Schichten der Wicklungen kann der Streuleitwert (und damit die Streuinduktivität) verringert werden.

9.7 Wachstumsgesetze

Im Folgenden werden für den Transformator einfache Gesetzmäßigkeiten zwischen den elektrischen Kenngrößen und der Baugröße abgeleitet. Diese Gesetzmäßigkeiten gelten in ihrer Tendenz auch für rotierende Maschinen.

Für Nennspannung und Nennstrom gilt näherungsweise:

$$U_{1,N} = \omega w_1 \frac{1}{\sqrt{2}} \Phi_{1h} = \frac{\omega}{\sqrt{2}} w_1 B_{Fe} A_{Fe} \quad I_{1,N} = \frac{\Theta_{1,N}}{w_1} = \frac{1}{w_1} J_{1,N} A_{Cu,1}$$

Die Nennscheinleistung ist dann:

$$S_N = U_{1,N} I_{1,N} = \frac{\omega}{\sqrt{2}} J_{1,N} B_{Fe} A_{Cu,1} A_{Fe}$$

Bei gleicher Ausnutzung (d.h. $J = \text{const.}$ und $B = \text{const.}$) ist die Nennscheinleistung der vierten Potenz der linearen Abmessung proportional:

$$S_N \sim L^4$$

Die auf das Bauvolumen bezogene Nennscheinleistung wächst somit linear mit der Baugröße:

$$\frac{S_N}{L^3} \sim L$$

Da das Gewicht proportional zum Volumen ist, gelten diese Beziehungen auch für das Gewicht.

Bei Annahme eines etwa konstanten Nennleistungsfaktors $\cos(\varphi_N)$ folgen analoge Gleichungen auch für die Nennwirkleistung P_N .

Für die Stromwärmeverluste und die Eisenverluste gilt:

$$P_{Cu} = \gamma J_m^2 A_{Cu} \sim L^3$$

$$P_{Fe} \sim V_{Fe} B^2 \sim L^3$$

Die Verluste wachsen also mit der dritten Potenz der linearen Abmessung (d.h. langsamer als die Leistung). Für den Nennwirkungsgrad folgt dann:

$$\eta_N = 1 - \frac{P_{Fe} + P_{Cu}}{P_N}$$

Die Abhängigkeit des Wirkungsgrades von der linearen Abmessung kann wie folgt beschrieben werden:

$$\eta_N(L) = 1 - \frac{P_{Fe}(L) + P_{Cu}(L)}{P_N(L)} = 1 - \frac{P_{Fe,0} \frac{L^3}{L_0^3} + P_{Cu,0} \frac{L^3}{L_0^3}}{P_{N,0} \frac{L^4}{L_0^4}}$$

$$= 1 - \frac{P_{Fe,0} + P_{Cu,0}}{P_{N,0}} \frac{L_0}{L} = 1 - (1 - \eta_{N,0}) \frac{L_0}{L}$$

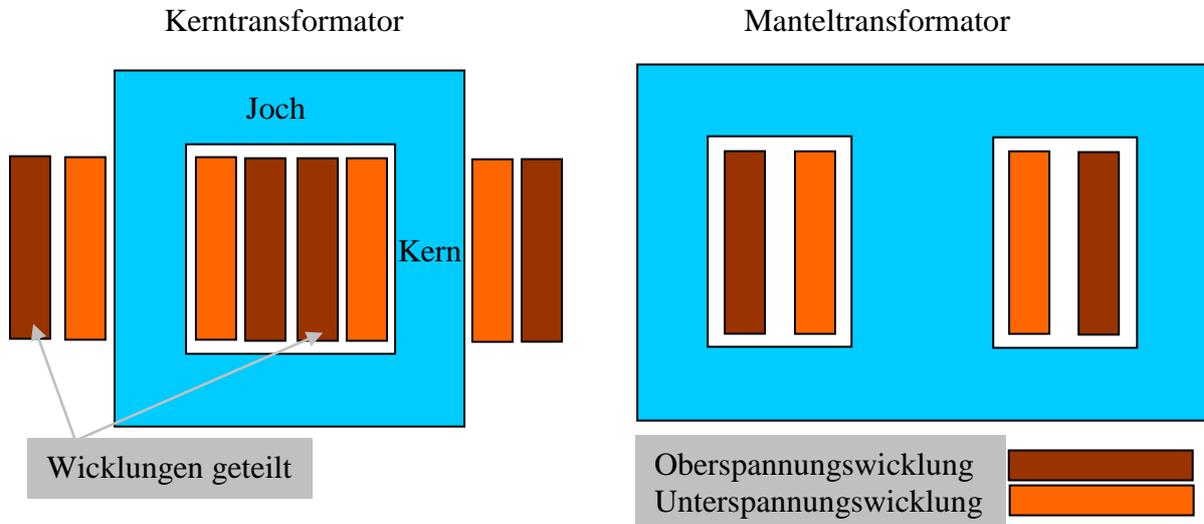
$$\Rightarrow 1 - \eta_N(L) \sim \frac{1}{L}$$

Die kühlende Oberfläche wächst aber nur mit dem Quadrat der linearen Abmessung. Zusammenfassend gilt also für größer werdende Einheiten:

- die Leistung pro Volumen wächst (weniger Platzbedarf pro Leistungseinheit)
- die Leistung pro Gewicht wächst (geringere Kosten pro Leistungseinheit)
- der Wirkungsgrad wird besser (weniger Verluste pro Leistungseinheit)
- die Kühlung wird schwieriger (weniger Kühlfläche pro Leistungseinheit)

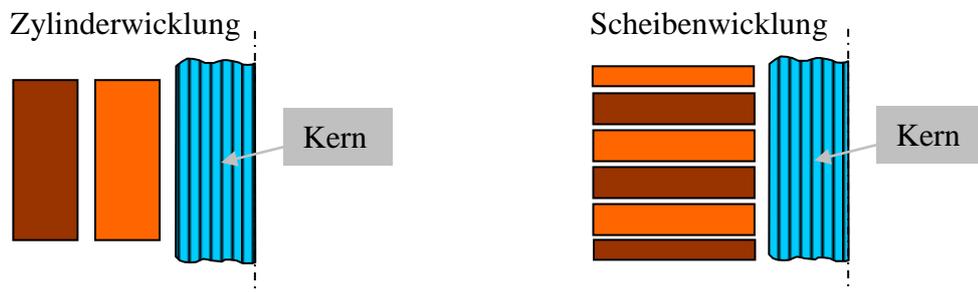
9.8 Konstruktionsformen

Einphasige Transformatoren:



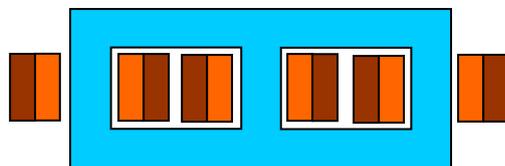
Die Aufteilung der Wicklung beim Kerntransformator wird zur Verringerung der Streuung durchgeführt.

Wicklungsformen:

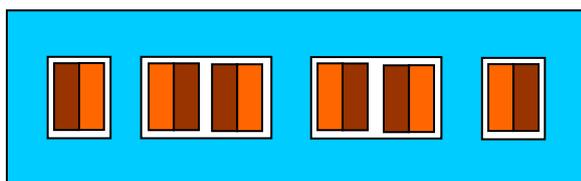


Drehstromtransformatoren:

Dreischenkeltransformator (Drehstrom-Kerntransformator)



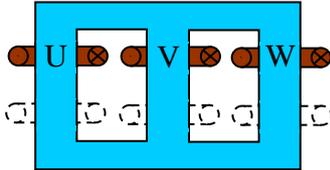
Fünfschenkeltransformator (Drehstrom-Manteltransformator)



9.9 Drehstromtransformator

1. Drehstromtransformator im Leerlauf; stationärer, symmetrischer Betrieb:

Durch die Zusammenschaltung von 3 einsträngigen Transformatoren (in Stern- oder Dreieckschaltung) erhält man einen Drehstromtransformator, mit dem zwei Drehstromnetze unterschiedlicher Spannung verbunden werden können. Das folgende Schema zeigt einen einfachen Drehstromtransformator mit den Strängen U, V und W im Leerlauf:



Die Spannungsgleichungen der Primärseite lauten:

$$\begin{pmatrix} u_U \\ u_V \\ u_W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_1 & 0 \\ 0 & 0 & R_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_U \\ i_V \\ i_W \end{pmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Psi_U \\ \Psi_V \\ \Psi_W \end{pmatrix}$$

Wird die Hauptinduktivität eines Stranges mit $L_{1h,s}$ bezeichnet und vernachlässigt man jede magnetische Unsymmetrie, dann folgt (da sich der Hauptfluss eines jeden Stranges je zur Hälfte über die beiden anderen Stränge schließt):

$$\begin{pmatrix} \Psi_U \\ \Psi_V \\ \Psi_W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{1\sigma} + L_{1h,s} & -\frac{1}{2}L_{1h,s} & -\frac{1}{2}L_{1h,s} \\ -\frac{1}{2}L_{1h,s} & L_{1\sigma} + L_{1h,s} & -\frac{1}{2}L_{1h,s} \\ -\frac{1}{2}L_{1h,s} & -\frac{1}{2}L_{1h,s} & L_{1\sigma} + L_{1h,s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_U \\ i_V \\ i_W \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe des Operators $\underline{a} = e^{j\frac{2\pi}{3}}$ (vgl. Kapitel „symmetrische Komponenten“) und der Voraussetzung harmonischer, symmetrischer Ströme folgt:

$$\begin{aligned} \Psi_U &= \operatorname{Re} \left\{ \sqrt{2} \underline{I}_1 e^{j\omega t} \left(L_{1\sigma} + L_{1h,s} \left(1 - \frac{1}{2} \underline{a}^2 - \frac{1}{2} \underline{a} \right) \right) \right\} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \sqrt{2} \underline{I}_1 e^{j\omega t} \left(L_{1\sigma} + \frac{3}{2} L_{1h,s} \right) \right\} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \sqrt{2} \underline{I}_1 e^{j\omega t} (L_{1\sigma} + L_{1h}) \right\} \end{aligned}$$

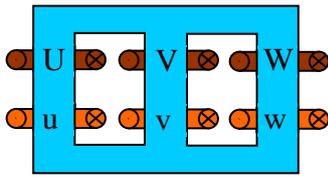
Hierbei ist L_{1h} die Drehstrom-Hauptinduktivität. Ebenso können die Flussverkettungen der anderen Stränge geschrieben werden. Für die Spannungsgleichungen folgt dann mit $L_1 = L_{1\sigma} + L_{1h}$:

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{a}^2 \underline{U}_1 \\ \underline{a} \underline{U}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_1 & 0 \\ 0 & 0 & R_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{a}^2 \underline{I}_1 \\ \underline{a} \underline{I}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j\omega L_1 & 0 & 0 \\ 0 & j\omega L_1 & 0 \\ 0 & 0 & j\omega L_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{a}^2 \underline{I}_1 \\ \underline{a} \underline{I}_1 \end{pmatrix}$$

Da die drei Spannungsgleichungen identisch sind, genügt es, eine einzige zu betrachten:

$$\underline{U}_1 = R_1 \underline{I}_1 + j\omega L_1 \underline{I}_1$$

2. Drehstromtransformator bei Belastung; stationärer, symmetrischer Betrieb:



Die Flussverkettenungen bei Belastung und Vernachlässigung der magnetischen Unsymmetrie lauten nun (Primärstränge U, V und W; Sekundärstränge u, v und w):

$$\begin{pmatrix} \Psi_U \\ \Psi_V \\ \Psi_W \\ \Psi_u \\ \Psi_v \\ \Psi_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{1\sigma} + L_{1h,S} & -\frac{1}{2}L_{1h,S} & -\frac{1}{2}L_{1h,S} & L_{m,S} & -\frac{1}{2}L_{m,S} & -\frac{1}{2}L_{m,S} \\ -\frac{1}{2}L_{1h,S} & L_{1\sigma} + L_{1h,S} & -\frac{1}{2}L_{1h,S} & -\frac{1}{2}L_{m,S} & L_{m,S} & -\frac{1}{2}L_{m,S} \\ -\frac{1}{2}L_{1h,S} & -\frac{1}{2}L_{1h,S} & L_{1\sigma} + L_{1h,S} & -\frac{1}{2}L_{m,S} & -\frac{1}{2}L_{m,S} & L_{m,S} \\ L_{m,S} & -\frac{1}{2}L_{m,S} & -\frac{1}{2}L_{m,S} & L_{2\sigma} + L_{2h,S} & -\frac{1}{2}L_{2h,S} & -\frac{1}{2}L_{2h,S} \\ -\frac{1}{2}L_{m,S} & L_{m,S} & -\frac{1}{2}L_{m,S} & -\frac{1}{2}L_{2h,S} & L_{2\sigma} + L_{2h,S} & -\frac{1}{2}L_{2h,S} \\ -\frac{1}{2}L_{m,S} & -\frac{1}{2}L_{m,S} & L_{m,S} & -\frac{1}{2}L_{2h,S} & -\frac{1}{2}L_{2h,S} & L_{2\sigma} + L_{2h,S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_U \\ i_V \\ i_W \\ i_u \\ i_v \\ i_w \end{pmatrix}$$

Hierbei ist $L_{m,S}$ die Gegeninduktivität zwischen Primär- und Sekundärstrang eines Schenkels und $L_{2h,S}$ die Hauptinduktivität eines Sekundärstranges.

Auch hier reicht es aus, für Primär- und Sekundärseite jeweils eine Spannungsgleichung anzugeben:

$$\underline{U}_1 = R_1 \underline{I}_1 + j\omega L_1 \underline{I}_1 + j\omega L_m \underline{I}_2$$

$$\underline{U}_2 = R_2 \underline{I}_2 + j\omega L_2 \underline{I}_2 + j\omega L_m \underline{I}_1$$

mit

$$L_2 = L_{2\sigma} + L_{2h} = L_{2\sigma} + \frac{3}{2}L_{2h,S}$$

$$L_m = \frac{3}{2}L_{m,S}$$

3. Schaltgruppen:

Die drei Wicklungsstränge der Oberspannungsseite (OS) bzw. der Unterspannungsseite (US) eines Drehstromtransformators können in Stern (Y,y) oder Dreieck (D,d) geschaltet werden. Auf der Unterspannungsseite ist außerdem die Zick-Zack-Schaltung (z) möglich.

Die Schaltgruppe eines Transformators ist durch *Schaltung und Kennzahl* (z.B. Dy5) festgelegt, wobei

- die Buchstaben die Schaltung der OS und der US angeben und
- die Kennzahl die *Phasenlage* der Spannung auf der US relativ zur Phasenlage der entsprechenden Spannung auf der OS in Vielfachen von 30° angibt.

Bevorzugte Schaltgruppen sind:

Bezeichnung		Zeigerbild		Schaltungsbild		Übersetzung
Kennzahl	Schaltgruppe	OS	US	OS	US	$U_{L,1} : U_{L,2}$
0	Yy0					$\frac{w_1}{w_2}$
5	Dy5					$\frac{w_1}{\sqrt{3} \cdot w_2}$
	Yd5					$\frac{\sqrt{3} \cdot w_1}{w_2}$
	Yz5					$\frac{2 \cdot w_1}{\sqrt{3} \cdot w_2}$

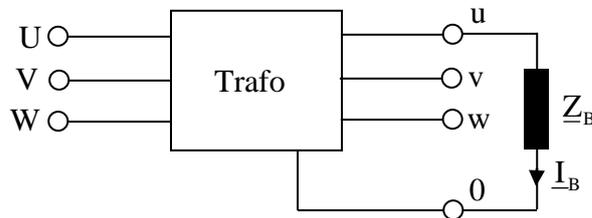
Der Parallelbetrieb von Drehstromtransformatoren erfordert u.a. gleiche Amplitude, gleiche Phasenlage und gleiche Phasenfolge der Spannungen. Deshalb müssen i.a. die Schaltgruppen übereinstimmen.

Die Beurteilung der Phasenlage ist möglich, wenn man berücksichtigt, dass die Wicklungen gleicher Stränge von OS und US auf dem gleichen Schenkel des Transformators liegen und gleichen Wicklungssinn besitzen. Außerdem besitzen alle Spulen auf einem Schenkel des Transformators Spannungen mit identischer Phasenlage, weil der gleiche magnetische Fluss hindurch tritt. Die Spannungen werden vom (realen oder gedachten) Sternpunkt zu den äußeren Klemmen hin gezählt (in der folgenden gemeinsamen Darstellung der Zeigerbilder sind die Spannungen von OS und US auf den jeweiligen Maximalwert normiert).

Schaltgruppe	Zeigerbild		Schaltungsbild		gemeinsame Darstellung der Zeigerbilder
	OS	US	OS	US	
Yy6					
Yd5					
Yz5					

4. Unsymmetrische Belastung:

Ein Drehstromtransformator beliebiger Schaltgruppe werde auf der Sekundärseite einsträngig über den angeschlossenen Nullleiter belastet:



Mit Hilfe der Methode der symmetrischen Komponenten können die Ströme nun in Mit-, Gegen- und Nullsystem zerlegt werden ($\underline{I}_u = \underline{I}_B$, $\underline{I}_v = \underline{I}_w = 0$):

$$\begin{pmatrix} \underline{I}_m \\ \underline{I}_g \\ \underline{I}_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{I}_u \\ \underline{I}_v \\ \underline{I}_w \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \underline{I}_B \\ \underline{I}_B \\ \underline{I}_B \end{pmatrix}$$

Berücksichtigt man, dass beim Transformator generell die Mit- (\underline{Z}_m) und Gegenimpedanz (\underline{Z}_g) näherungsweise gleich der Kurzschlussimpedanz ist (die Nullimpedanz \underline{Z}_0 hängt dagegen von der Schaltgruppe ab), so folgt mit den Leerlaufspannungen $\underline{U}_{L,m} = \underline{U}_L$ und $\underline{U}_{L,g} = \underline{U}_{L,0} = 0$:

$$\underline{U}_m = \underline{U}_{L,m} - \underline{Z}_m \underline{I}_m = \underline{U}_L - \underline{Z}_k \frac{\underline{I}_B}{3}$$

$$\underline{U}_g = \underline{U}_{L,g} - \underline{Z}_g \underline{I}_g = 0 - \underline{Z}_k \frac{\underline{I}_B}{3}$$

$$\underline{U}_0 = \underline{U}_{L,0} - \underline{Z}_0 \underline{I}_0 = 0 - \underline{Z}_0 \frac{\underline{I}_B}{3}$$

Die Rücktransformation ergibt:

$$\underline{U}_u = \underline{U}_m + \underline{U}_g + \underline{U}_0 = \underline{U}_L - \frac{\underline{I}_B}{3} (2\underline{Z}_k + \underline{Z}_0)$$

$$\underline{U}_v = \underline{a}^2 \underline{U}_m + \underline{a} \underline{U}_g + \underline{U}_0 = \underline{a}^2 \underline{U}_L - \frac{\underline{I}_B}{3} ((\underline{a}^2 + \underline{a}) \underline{Z}_k + \underline{Z}_0), \quad \underline{a}^2 + \underline{a} = -1$$

$$\underline{U}_w = \underline{a} \underline{U}_m + \underline{a}^2 \underline{U}_g + \underline{U}_0 = \underline{a} \underline{U}_L - \frac{\underline{I}_B}{3} ((\underline{a} + \underline{a}^2) \underline{Z}_k + \underline{Z}_0), \quad \underline{a} + \underline{a}^2 = -1$$

Vernachlässigt man den Spannungsabfall an \underline{Z}_k , so folgt:

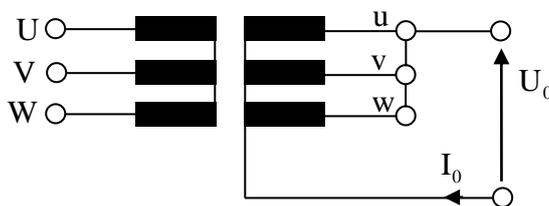
$$\underline{U}_u = \underline{U}_L - \frac{\underline{I}_B}{3} \underline{Z}_0$$

$$\underline{U}_v = \underline{a}^2 \underline{U}_L - \frac{\underline{I}_B}{3} \underline{Z}_0$$

$$\underline{U}_w = \underline{a} \underline{U}_L - \frac{\underline{I}_B}{3} \underline{Z}_0$$

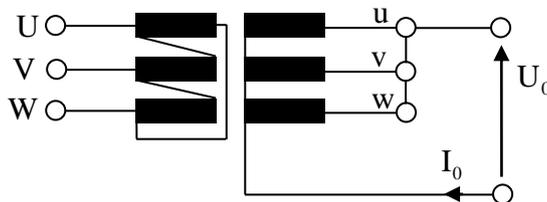
Da der Spannungsabfall an \underline{Z}_0 gleichphasig auftritt, bewirkt er eine Verschiebung des Sternpunktes. Bei rein induktiver Belastung (und rein induktiver Nullimpedanz \underline{Z}_0) kann es bei großer Sternpunktverschiebung dazu kommen, dass die Spannung U_u völlig einbricht. Die beiden anderen Strangspannungen wachsen dann um den Faktor $\sqrt{3}$. Für problemlose einsträngige Belastung wäre wünschenswert, dass $\underline{Z}_0 = \underline{Z}_k$ gilt (dann wird nur der Strang belastet, an dem die Belastungsimpedanz angeschlossen ist). Im Folgenden werden 3 verschiedene Schaltgruppen hinsichtlich \underline{Z}_0 betrachtet (die Nullimpedanz wird bei sekundärseitig kurzgeschlossenem und mit U_0 gespeistem Transformator ermittelt: $\underline{Z}_0 = 3 \underline{U}_0 / \underline{I}_0$):

Fall a: Schaltgruppe Yy (Kennzahl beliebig)



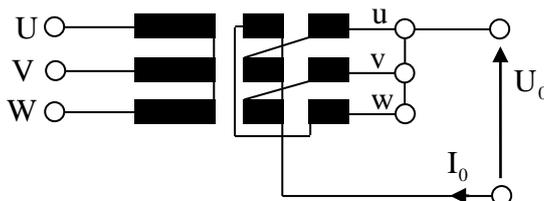
Der in allen 3 Strängen gleichphasige Nullstrom $I_0/3$ erzeugt in allen 3 Schenkeln des Transformators gleichphasige Flüsse. Der Rückschluss dieser Flüsse geschieht über Streuwege (Luft, Konstruktionsteile). Der Nullfluss wird nicht gedämpft und führt zu zusätzlicher Belastung des Transformators.

Fall b: Schaltgruppe Dy (Kennzahl beliebig):



In den im Dreieck geschalteten Strängen der Oberspannungsseite bildet sich durch den Nullfluss ein Kreisstrom aus, der den Nullfluss dämpft. Dieser Kreisstrom führt zu zusätzlichen Verlusten, eine Sternpunktverschiebung ist aber an den Klemmen U, V und W nicht mehr messbar (es gilt $\underline{Z}_0 \approx \underline{Z}_k$; der Transformator ist einsträngig belastbar).

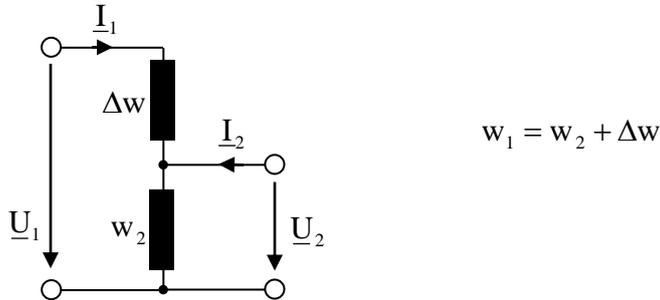
Fall c: Schaltgruppe Yz (Kennzahl beliebig):



Die Durchflutungen des Nullsystems heben sich auf der Sekundärseite selbst auf. Es entstehen keine Nullflüsse und Nullspannungen. Es gilt $\underline{Z}_0 \approx \underline{Z}_k$; der Transformator ist einsträngig voll belastbar.

9.10 Spartransformator

Wenn man auf den Kern eines Transformators nur eine Wicklung aufbringt, und diese an geeigneter Stelle anzapft, dann erhält man einen Spartransformator. Vernachlässigt man Widerstand und Streureaktanz, so erhält man folgendes Ersatzschaltbild:



Die Spannungsübersetzung beträgt:

$$\ddot{u} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{w_1}{w_2} = 1 + \frac{\Delta w}{w_2}$$

Mit Hilfe des Durchflutungsgesetzes folgt:

$$\Delta w I_1 + w_2 (I_1 + I_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{I_1}{I_2} = -\frac{w_2}{w_1}$$

Die Durchgangsleistung (Leistung an den Klemmen) ist:

$$P_D = U_1 I_1 = U_2 I_2$$

Die Leistung der Primärseite kann aufgespalten werden in:

$$P_D = U_1 I_1 = (\Delta U + U_2) I_1 = \Delta U I_1 + U_2 I_1 = P_{\text{transf.}} + P_{\text{galv.}}$$

Nur der Anteil $P_{\text{transf.}} = \Delta U I_1$ wird transformatorisch übertragen, der Anteil $P_{\text{galv.}} = U_2 I_1$ wird galvanisch übertragen. Der transformatorische Anteil, nach dem sich die Baugröße (Eisenquerschnitte) des Transformators bemisst, wird auch „Typenleistung“ P_T genannt. Es gilt nun:

$$P_T = \Delta U I_1 = (U_1 - U_2) I_1 = P_D - \frac{1}{\ddot{u}} U_1 I_1 = P_D \left(1 - \frac{1}{\ddot{u}} \right)$$

Im Grenzfall $\ddot{u} \rightarrow 1$ gilt: $P_T \rightarrow 0$. Dann ergeben sich große Einsparungen in der Baugröße (Eisen, Kupfer); hieraus erklärt sich der Name Spartransformator.

Beim Kurzschluss auf Seite 2 gilt:

$$Z_{l,k} = \left(\frac{\Delta w}{w_1} \right)^2 Z_1 = \left(1 - \frac{1}{\ddot{u}} \right)^2 Z_1$$

Im Grenzfall $\ddot{u} \rightarrow 1$ wird die Eingangsimpedanz bei Kurzschluss sehr klein und damit der Kurzschlussstrom sehr groß!

Vorteil:

- große Werkstoff- und damit Kostenersparnis

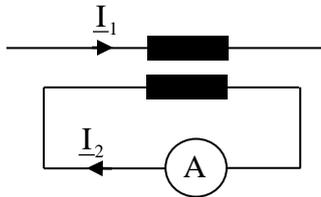
Nachteile:

- galvanische Kopplung zwischen OS und US
- großer Kurzschlussstrom

9.11 Stromtransformator, Stromwandler

Bisher wurden Spannungstransformatoren (zur Leistungsübertragung) betrachtet. Hierbei war die Spannung U_1 gegeben und damit der Fluss Φ (näherungsweise) konstant.

Zu Messzwecken existieren aber auch Stromtransformatoren; hierbei ist der Strom I_1 konstant und die Spannung stellt sich entsprechend ein.



Ist die Impedanz des Messgerätes klein genug, so kann für den Transformator in guter Näherung das Kurzschluss-Ersatzschaltbild angesetzt werden. Dann ist $\underline{I}_m \approx 0$ und

$$\underline{I}_1 = -\underline{I}'_2 \quad \Rightarrow \quad \underline{I}_2 = -\frac{w_1}{w_2} \underline{I}_1$$

Man erhält also eine genaue Stromübersetzung.

Werden die Klemmen am Messgerät geöffnet, befindet sich der Transformator im Leerlauf. Dann ist $\underline{I}_m = \underline{I}_1$ und damit $U_1 \gg U_{1,k}$. Dies hat eine starke Erhöhung des verketteten Flusses Ψ_{1h} zur Folge, für den der Stromtransformator nicht ausgelegt ist.

Die Folgen sind Sättigung, Eisenverluste und Erwärmung bis hin zur Zerstörung des Stromtransformators.

Das Verhältnis der Flussverkettungen im Kurzschluss und im Leerlauf ist etwa so groß wie die Streuziffer; für besonders streuungsarm ausgelegte Stromwandler ist die Zerstörungsgefahr also besonders groß.

Die Sekundärklemmen dürfen im Betrieb nicht geöffnet werden!

10 Literatur

Die folgende Literatur wurde zum Teil benutzt, zum Teil führt sie als Ergänzung über die beschriebenen Themenbereiche hinaus.

- [1] **Fischer, R.:** „Elektrische Maschinen“, Carl Hanser Verlag, München, 1995
- [2] **Taegen, F.:** „Einführung in die Theorie der elektrischen Maschinen II“, Vieweg Verlag, Braunschweig, 1971
- [3] **Jordan, H.; Weis, M.:** „Asynchronmaschinen“, Vieweg Verlag, Braunschweig, 1969
- [4] **Sattler, P. K.:** „Elektrische Maschinen I“, Vorlesungsmanuskript, RWTH Aachen, 1982
- [5] **Henneberger, G.:** „Elektrische Maschinen“, Vorlesungsmanuskript, RWTH Aachen, 1990
- [6] **Bausch, H.:** „Elektrische Maschinen“, Vorlesungsmanuskript, Universität der Bundeswehr München
- [7] **Bronstein, I. N.; Semendjajew, K. A.:** „Taschenbuch der Mathematik“, Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt (Main), 1981
- [8] **Dajaku, G.:** „Electromagnetic and Thermal Modeling of Highly Utilized PM Machines“, Dissertation, Lehrstuhl für Elektrische Antriebstechnik und Aktorik, Universität der Bundeswehr München, 2006
- [9] **Schramm, A.:** „Redundanzkonzepte für Geschaltete Reluktanzmaschinen“, Dissertation, Lehrstuhl für Elektrische Antriebstechnik und Aktorik, Universität der Bundeswehr München, 2006
- [10] **Vacuumschmelze GmbH & Co. KG:** „Selten-Erd-Dauermagnete VACODYM VACOMAX“, Produktinformation 2014