

Vorlesung

Antriebsregelung und Aktorik

Dynamischer Betrieb elektrischer Maschinen

Vorlesungsscript zum Modul:

1242: Antriebsregelung und Aktorik, EMV in der Energietechnik
(Anteil: Antriebsregelung und Aktorik)

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	2
1 Grundlagen	4
1.1 <i>Dynamisches Grundgesetz, Bewegungsgleichung</i>	4
1.2 <i>Massenträgheitsmomente</i>	6
1.3 <i>Einfache Getriebe</i>	7
1.4 <i>Leistung und Energie</i>	9
1.5 <i>Langsame Drehzahländerungen</i>	10
1.6 <i>Wärmemengen beim Anfahren und Bremsen</i>	12
2 Dynamisches Verhalten der Gleichstrommaschine	16
2.1 <i>Gleichungssystem für dynamischen Betrieb</i>	16
2.2 <i>Fremderregte Gleichstrommaschine</i>	19
2.3 <i>Gleichstromnebenschlussmaschine</i>	26
2.4 <i>Kaskadenregelung einer Gleichstrommaschine</i>	28
2.5 <i>Einstellregeln für PI-Regler</i>	30
3 Raumzeigertheorie für Drehfeldmaschinen	16
3.1 <i>Methoden zur Feldberechnung</i>	32
3.2 <i>Voraussetzungen für die Anwendung der Raumzeigertheorie</i>	33
3.3 <i>Definition des komplexen Raumzeigers</i>	34
3.4 <i>Spannungsgleichung in Raumzeigerdarstellung</i>	37
3.5 <i>Interpretation der Raumzeigerdarstellung</i>	38
3.6 <i>Gekoppelte Systeme</i>	39
3.7 <i>Leistung in Raumzeigerdarstellung</i>	41
3.8 <i>Ersatzschaltbildelemente</i>	44
3.9 <i>Drehmoment in Raumzeigerdarstellung</i>	47
3.10 <i>Besondere Koordinatensysteme</i>	48
3.11 <i>Zusammenhang zwischen Raumzeigertheorie und Zweiachsentheorie</i>	49
3.12 <i>Zusammenhang zwischen Raumzeigern und Zeitzeigern</i>	50
4 Dynamisches Verhalten der Asynchronmaschine	51
4.1 <i>Stationärer Betrieb der Asynchronmaschine in Raumzeigerdarstellung</i>	51
4.2 <i>Schneller Hochlauf und Laststoß</i>	54
4.3 <i>Feldorientiertes Koordinatensystem für die Asynchronmaschine</i>	60
4.4 <i>Feldorientierte Regelung der Asynchronmaschine mit eingprägten Statorströmen</i>	68

4.5 Feldorientierte Regelung der Asynchronmaschine mit eingepprägten Statorspannungen	78
4.6 Feldorientierte Regelung der Asynchronmaschine ohne mechanischen Sensor	80
4.7 Direct Torque Control	82
5 Dynamisches Verhalten der Synchronmaschine.....	88
5.1 Schwingungen der Synchronmaschine, Dämpferwicklung	88
5.2 Stationärer Betrieb der Vollpol-Synchronmaschine in Raumzeigerdarstellung	92
5.3 Stoßkurzschluss der Vollpol-Synchronmaschine.....	98
5.4 Stationärer Betrieb der Schenkelpol-Synchronmaschine in Raumzeigerdarstellung	113
5.5 Stoßkurzschluss der Schenkelpol-Synchronmaschine.....	120
5.6 Transienter Betrieb der Schenkelpol-Synchronmaschine	124
6 Dynamisches Verhalten der permanentmagneterregten Synchronmaschine mit Polradlagegeber	131
6.1 Prinzipielle Wirkungsweise	131
6.2 Gleichungssystem für den dynamischen Betrieb.....	133
6.3 Stationärer Betrieb und Drehmomentregelung	138
7 Elektromechanische Aktoren	147
7.1 Allgemeines.....	147
7.2 Aktor mit geradliniger Bewegung.....	148
7.3 Aktor mit rotierender Bewegung	149
8 Leistungselektronische Stellglieder	151
8.1 Leistungselektronische Stellglieder für Gleichstrommaschinen.....	151
8.2 Leistungselektronische Stellglieder für Asynchronmaschinen.....	154
8.3 Leistungselektronische Stellglieder für Synchronmaschinen.....	160
9 Anhang.....	161
9.1 Drehmomentberechnung aus Kreuzprodukt von Flussverkettung und Strom.....	161
9.2 Drehmomentberechnung aus Strombelag und Flussdichte	163
9.3 Inversion der Induktivitätsmatrix.....	164
10 Literatur	170

1 Grundlagen

1.1 Dynamisches Grundgesetz, Bewegungsgleichung

1. Geradlinige Bewegung:

Eine mit der Geschwindigkeit \vec{v} bewegte Masse m weist den Impuls $m\vec{v}$ (Bewegungsgröße) auf. Die Summe aller von außen angreifenden Kräfte bewirkt eine zeitliche Änderung der Bewegungsgröße.

$$\sum_v \vec{F}_v = \vec{F}_a = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m \frac{d}{dt}(\vec{v}) + \vec{v} \frac{d}{dt}(m)$$

Für $m = \text{const.}$ folgt:

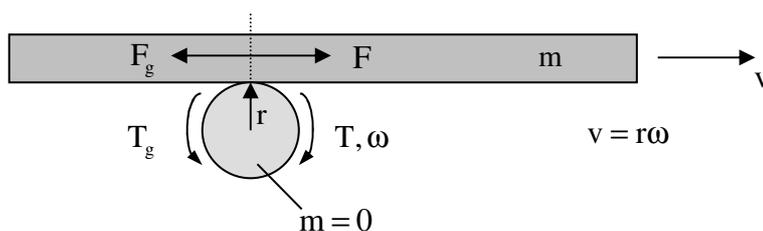
$$\vec{F}_a = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \quad (\text{Newton'sche Bewegungsgleichung})$$

Lassen sich die äußeren Kräfte durch eine Antriebskraft \vec{F} und eine Gegenkraft \vec{F}_g beschreiben, die beide in derselben (x-) Achse wirken, so gilt:

$$F - F_g = F_a = ma = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

2. Geradlinige / drehende Bewegung:

Im Folgenden soll die kombinierte geradlinige und drehende Bewegung zweier Körper betrachtet werden, wobei sich ein Körper ausschließlich geradlinig bewegt, der andere ausschließlich drehend. Die Körper sollen fest gekoppelt sein. Hierbei treten die folgenden Kräfte F und Drehmomente T auf (der Drehkörper habe die Masse $m=0$, ω ist die Winkelgeschwindigkeit dieses Drehkörpers):



$$F - F_g = m \frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow r(F - F_g) = rm \frac{d(r\omega)}{dt} \quad \Rightarrow \quad T - T_g = mr^2 \frac{d\omega}{dt} = \Theta^* \frac{d\omega}{dt}$$

Das Massenträgheitsmoment des Drehkörpers Θ ist gleich null, da seine Masse zu null angenommen wurde. $\Theta^* = mr^2$ ist die auf die Drehbewegung umgerechnete, geradlinig bewegte Masse.

3. Drehende Bewegung:

Eine mit der Winkelgeschwindigkeit ω bewegte Drehmasse Θ besitzt den Drehimpuls $\Theta\omega$ (Bewegungsgröße). Die Summe aller von außen angreifenden Drehmomente bewirkt eine zeitliche Änderung des Drehimpulses.

$$\sum_v T_v = T_a = \frac{d}{dt}(\Theta\omega) = \Theta \frac{d}{dt}(\omega) + \omega \frac{d}{dt}(\Theta)$$

Für $\Theta = \text{const.}$ und T_g als Summe aller Gegenmomente folgt:

$$T - T_g = T_a = \Theta \frac{d\omega}{dt} = \Theta \frac{d^2\gamma}{dt^2}$$

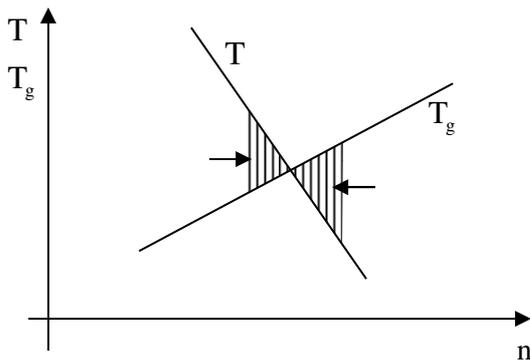
4. Stabilität:

Aus der Bewegungsgleichung

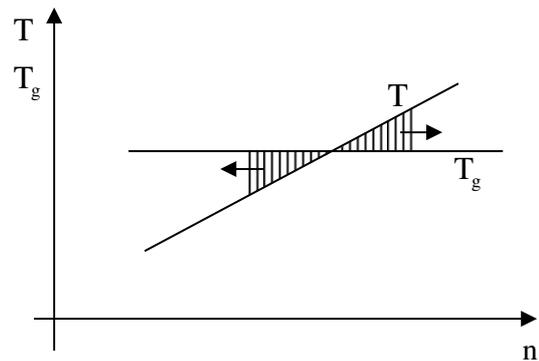
$$T - T_g = \Theta \frac{d\omega}{dt} = 2\pi\Theta \frac{dn}{dt}$$

folgt:

$\frac{dn}{dt} > 0$	falls	$T > T_g$	Beschleunigung, Anfahren
$\frac{dn}{dt} < 0$	falls	$T < T_g$	Verzögerung, Abbremsen
$\frac{dn}{dt} = 0$	falls	$T = T_g$	konstante Drehzahl, statisches Gleichgewicht (stabil oder labil)



statisch stabil: $\frac{\partial T_g}{\partial n} > \frac{\partial T}{\partial n}$



statisch labil: $\frac{\partial T_g}{\partial n} < \frac{\partial T}{\partial n}$

1.2 Massenträgheitsmomente

1. Massenträgheitsmoment eines beliebigen Körpers:

Ein beliebig geformter, aber starrer Körper bewege sich um eine beliebige Drehachse. Die Bewegungsgleichung für ein Masselement dm lautet:

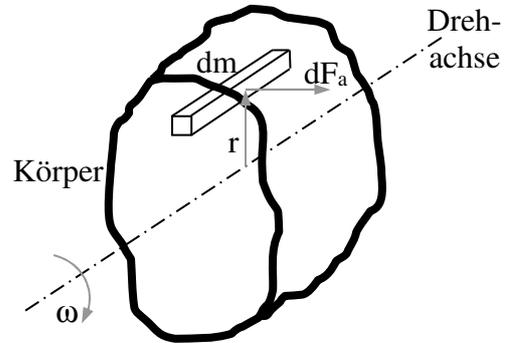
$$dT_a = r \cdot dF_a = r \cdot dm \cdot \frac{dv}{dt} = r^2 \cdot \frac{d\omega}{dt} \cdot dm$$

Das gesamte Beschleunigungsmoment ergibt sich zu:¹

$$T_a = \int_0^{T_a} d\tilde{T}_a = \frac{d\omega}{dt} \int_0^m r^2 d\tilde{m} = \Theta \frac{d\omega}{dt}$$

mit dem Trägheitsmoment:

$$\Theta = \int_0^m r^2 d\tilde{m}$$



2. Massenträgheitsmoment eines Hohlzylinders:

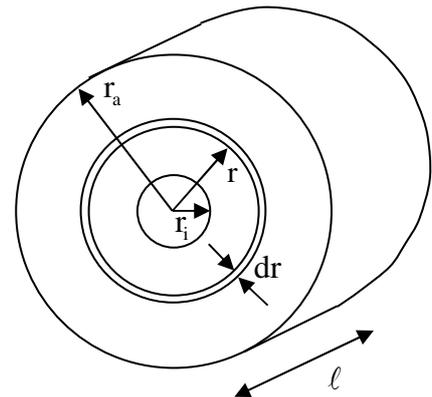
$$\begin{aligned} \Theta &= \int_0^m r^2 d\tilde{m} = \int_0^V r^2 \rho d\tilde{V} \\ &= \int_{r_i}^{r_a} r^2 \rho \ell 2\pi r dr = 2\pi \rho \ell \int_{r_i}^{r_a} r^3 dr \\ &= \frac{\pi}{2} \rho \ell (r_a^4 - r_i^4) \end{aligned}$$

Hierbei ist ρ das spezifische Gewicht und ℓ die axiale Länge.

Führt man die Masse $m = \rho \pi \ell (r_a^2 - r_i^2)$ ein, so erhält man:

$$\Theta = m \frac{r_a^2 + r_i^2}{2} = m r^{*2}$$

Der quadratische Mittelwert der Radien $r^* = \sqrt{\frac{r_a^2 + r_i^2}{2}}$ wird als Trägheitsradius bezeichnet.



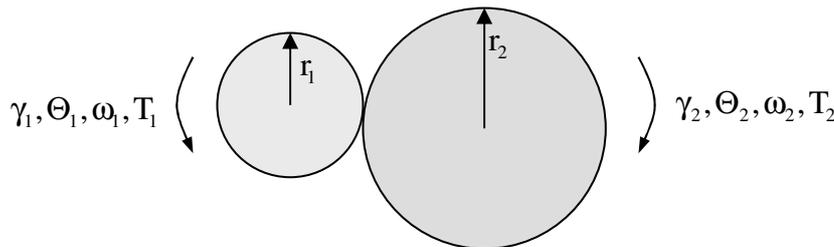
¹ Die Tilde dient zur Unterscheidung zwischen Integrationsgrenze und Integrationsvariable.

1.3 Einfache Getriebe

1. Annahmen:

Die Übertragungsstelle (Getriebe) sei verlustlos und formschlüssig: kein Schlupf, keine Lose, keine Hysterese, keine Elastizität.

2. Rotation / Rotation (z.B. Zahnradgetriebe):



Wird $\frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{\ddot{u}}$ definiert, so ergibt sich aus der Bedingung gleicher Wege am Eingriffspunkt:

$$\gamma_1 r_1 = \gamma_2 r_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \ddot{u}$$

Ebenso folgt aus gleichen Geschwindigkeiten ($v = \omega r$) am Eingriffspunkt:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \ddot{u}$$

Aus „actio = reactio“ am Eingriffspunkt folgt:

$$\frac{T_1}{r_1} = \frac{T_2}{r_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{\ddot{u}}$$

Für das Beschleunigungsmoment der Rotationskörper gilt (bei Betrachtung als Einzelkörper):

$$T_{a,n} = \Theta_n \frac{d}{dt} \omega_n, \quad n = 1, 2$$

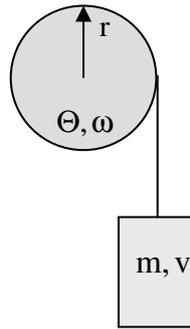
Durch die starre Kopplung der Körper muss bei der Beschleunigung von Körper 1 auch der Körper 2 mitbeschleunigt werden. Aufgrund des Gesetzes „actio=reactio“ folgt:

$$\begin{aligned} T_{a,1} &= \Theta_1 \frac{d}{dt} \omega_1 + \frac{r_1}{r_2} \Theta_2 \frac{d}{dt} \omega_2 \\ &= \Theta_1 \frac{d}{dt} \omega_1 + \frac{1}{\ddot{u}} \Theta_2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\omega_1}{\ddot{u}} \right) \\ &= \left(\Theta_1 + \frac{1}{\ddot{u}^2} \Theta_2 \right) \frac{d}{dt} \omega_1 \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für die Umrechnung des Trägheitsmomentes Θ_2 auf die Achse 1:

$$\Theta_{1,ges} = \Theta_1 + \frac{1}{\ddot{u}^2} \Theta_2$$

3. Rotation / Translation (z.B. Aufzug):



Für die Beschleunigung gilt:

$$\begin{aligned} T &= \Theta \frac{d}{dt} \omega + r \cdot m \frac{d}{dt} v = \Theta \frac{d}{dt} \omega + r \cdot m \frac{d}{dt} (r\omega) \\ &= \Theta \frac{d}{dt} \omega + r^2 m \frac{d}{dt} \omega \\ &= (\Theta + r^2 m) \frac{d}{dt} \omega \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für die Umrechnung der Masse m auf die Rotationsachse:

$$\Theta_{\text{ges}} = \Theta + r^2 m$$

1.4 Leistung und Energie

Aus der Bewegungsgleichung

$$T - T_g = \Theta \frac{d\omega}{dt}$$

erhält man nach Multiplikation mit ω die Leistungsbilanz:

$$T\omega = T_g\omega + \Theta\omega \frac{d\omega}{dt}$$

Die zugeführte Antriebsleistung ist gleich dem Leistungsbedarf der Arbeitsmaschine plus der Änderung der kinetischen Energie.

Energiebilanz: In der Zeit $\Delta t = t_2 - t_1$, in welcher der Antrieb die Änderung $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ erfährt, wird die Arbeit

$$\int_{t_1}^{t_2} T\omega dt = \int_{t_1}^{t_2} T_g\omega dt + \int_{t_1}^{t_2} \Theta\omega \frac{d\omega}{dt} dt$$

zugeführt. Der Zuwachs an kinetischer Energie der Drehmassen beträgt:

$$\int_{t_1}^{t_2} \Theta\omega \frac{d\omega}{dt} dt = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \Theta\omega d\omega = \frac{1}{2} \Theta (\omega_2^2 - \omega_1^2)$$

Nach einem Hochlauf von $\omega_1 = 0$ auf $\omega_2 = \omega_0$ ist im Antrieb die kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \Theta \omega_0^2$$

gespeichert.

Falls in Antrieben Drehmassen mit verschiedenen Drehzahlen rotieren, kann man sich deren Wirkung in einer einzigen Drehmasse vereint denken. Meistens wird die Drehmasse auf die Motorwelle (Motordrehzahl) bezogen. Bei der Umrechnung ändert sich die kinetische Energie nicht. Deshalb gilt (umgerechnete Größen werden mit „'“ bezeichnet):

$$\frac{1}{2} \Theta' \omega'^2 = \frac{1}{2} \Theta \omega^2$$

$$\Rightarrow \Theta' = \Theta \left(\frac{\omega}{\omega'} \right)^2 = \Theta \left(\frac{n}{n'} \right)^2$$

1.5 Langsame Drehzahländerungen

Aus der Bewegungsgleichung

$$T_a = T - T_g = \Theta \frac{d\omega}{dt}$$

lassen sich die mechanischen Übergangsvorgänge bei einem Antrieb ermitteln, wenn die Drehmomente als Funktion der Zeit oder der Winkelgeschwindigkeit bekannt sind.

Das Drehmoment der elektrischen Maschine ergibt sich aus den Spannungsgleichungen für die elektrischen Kreise. Die hierin auftretenden Ströme werden durch die Bewegungsgleichung mitbestimmt. Im allgemeinen liegt daher eine Kopplung der elektrischen und mechanischen Übergangsvorgänge (dynamische Vorgänge, transients Betrieb) vor.

Diese Kopplung kann vernachlässigt werden, wenn ein quasistationärer Betrieb vorliegt, bei dem die Drehzahländerungen langsam (im Vergleich zu den elektrischen Zeitkonstanten) erfolgen. Dann lassen sich die stationären Kennlinien $T(\omega)$ und $T_g(\omega)$ verwenden.

1. Beispiel:

Es liege ein konstantes Beschleunigungsmoment $T_a = \text{const.}$ vor (d.h. die elektrische Maschine generiert immer ein um einen konstanten Betrag höheres Drehmoment als das Lastmoment). Dann gilt:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{T_a}{\Theta}$$

Für den Hochlauf gilt:

$$\omega = \frac{T_a}{\Theta} t$$

d.h. also linearer Hochlauf der Drehzahl mit der Zeit. Eine Division durch die Endwinkelgeschwindigkeit ω_0 ergibt:

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{t}{\tau}, \quad \tau = \frac{\omega_0 \Theta}{T_a}$$

Ist das Beschleunigungsmoment gleich dem Nennmoment ($T_a = T_N$) und die Endwinkelgeschwindigkeit gleich der Nenn- Endwinkelgeschwindigkeit ($\omega_0 = \omega_{0,N}$), so gilt für die mechanische Zeitkonstante:

$$\tau_m = \frac{\omega_{0,N} \Theta}{T_N}$$

2. Beispiel:

Es liege ein mit zunehmender Drehzahl linear abnehmendes Beschleunigungsmoment $T_a = T_{a,0} \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0}$ vor (d.h. die Differenz zwischen dem Antriebsmoment der elektrischen Maschine und dem Lastmoment wird mit zunehmender Drehzahl immer geringer). Dann gilt:

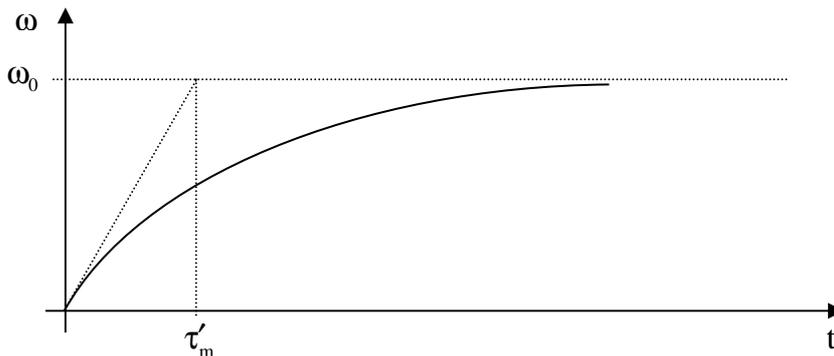
$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{T_{a,0}}{\omega_0 \Theta} (\omega_0 - \omega)$$

Hieraus folgt:

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{\tau'_m} \omega = \frac{T_{a,0}}{\Theta}, \quad \tau'_m = \frac{\omega_0 \Theta}{T_{a,0}}$$

Für den Hochlauf gilt dann:

$$\frac{\omega}{\omega_0} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau'_m}}$$



Oft ist das Beschleunigungsmoment T_a nicht als explizite Funktion, sondern als analytisch schwer darstellbare Kennlinie $T_a(\omega)$ gegeben. In diesen Fällen lässt sich die Integration nur numerisch durchführen. Die Differentialgleichung wird durch eine Differenzengleichung

$$T_a = \Theta \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

mit abschnittsweise als konstant angesehenen Werten für T_a angenähert. Hierbei wird für jeden Zeitabschnitt $\Delta t_v = t_{v+1} - t_v$ die Änderung der Winkelgeschwindigkeit

$$\Delta\omega_v = \frac{T_{a,v}}{\Theta} \Delta t_v$$

berechnet und zum jeweiligen Wert addiert:

$$\omega(t_{v+1}) = \omega(t_v) + \Delta\omega_v$$

1.6 Wärmemengen beim Anfahren und Bremsen

1. Betrieb ohne Gegenmoment:

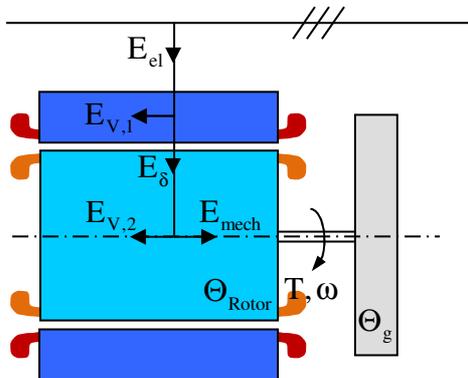
Die mechanische Energie beim Beschleunigen oder Bremsen von Antrieben folgt aus der dynamischen Grundgleichung:

$$E_{\text{mech}} = \int_{t_1}^{t_2} T \omega dt = \int_{t_1}^{t_2} T_g \omega dt + \Theta \int_{\omega_1}^{\omega_2} \omega d\omega$$

Beim Betrieb ohne Gegenmoment ($T_g = 0$) gilt dann:

$$E_{\text{mech}} = \int_{t_1}^{t_2} T \omega dt = \Theta \int_{\omega_1}^{\omega_2} \omega d\omega$$

Als Beispiel wird nun eine Drehstromasynchronmaschine betrachtet, wobei Θ das Massenträgheitsmoment des Rotors plus angekoppelter Drehmassen ist ($\Theta = \Theta_{\text{Rotor}} + \Theta_g$). Das Schema der Energieaufteilung ist wie folgt:



Für die Winkelgeschwindigkeit einer Asynchronmaschine gilt mit dem Schlupf s :

$$\omega = \omega_0 (1 - s)$$

$$\Rightarrow \frac{d\omega}{dt} = -\omega_0 \frac{ds}{dt}$$

$$\Rightarrow d\omega = -\omega_0 ds$$

Also folgt für die mechanische Energie durch Einsetzen von ω und $d\omega$:

$$\begin{aligned}
 E_{\text{mech}} &= \int_{t_1}^{t_2} T \omega dt = \Theta \int_{\omega_1}^{\omega_2} \omega d\omega \\
 \Rightarrow E_{\text{mech}} &= \int_{t_1}^{t_2} T \omega_0 (1-s) dt = \Theta \int_{s_1}^{s_2} \omega_0 (1-s) (-\omega_0) ds \\
 \Rightarrow E_{\text{mech}} &= \int_{t_1}^{t_2} P_{\delta} (1-s) dt = -\Theta \omega_0^2 \int_{s_1}^{s_2} (1-s) ds \\
 \Rightarrow E_{\text{mech}} &= -\Theta \omega_0^2 \left[s - \frac{1}{2} s^2 \right]_{s_1}^{s_2} \\
 \Rightarrow E_{\text{mech}} &= 2E_{\text{kin}} \left[(s_1 - s_2) - \frac{1}{2} (s_1^2 - s_2^2) \right], \quad E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \Theta \omega_0^2
 \end{aligned}$$

Hierbei ist P_{δ} die Luftspaltleistung und E_{kin} die bei synchroner Drehzahl im Antrieb gespeicherte Energie. Für den Hochlauf von null bis auf (nahezu) synchrone Drehzahl ($s_1 = 1$, $s_2 \approx 0$) folgt dann:

$$E_{\text{mech}} = E_{\text{kin}}$$

Die bei diesem Hochlauf entstehende Verlustwärme im Rotor ist (mit $P_{\delta} = T\omega_0$):

$$\begin{aligned}
 E_{V,2} &= \int_{t_1}^{t_2} s P_{\delta} dt = \int_{t_1}^{t_2} s \omega_0 T dt = - \int_{s_1}^{s_2} s \Theta \omega_0^2 ds \\
 &= -\Theta \omega_0^2 \frac{1}{2} \left[s^2 \right]_{s_1}^{s_2} = E_{\text{kin}} (s_1^2 - s_2^2)
 \end{aligned}$$

Mit $s_1 = 1$, $s_2 \approx 0$ (Hochlauf) folgt weiter:

$$E_{V,2} = E_{\text{kin}}$$

Die beim Hochlauf entstehende Verlustenergie im Rotor ist also genau so groß wie die nach dem Hochlauf in den rotierenden Massen gespeicherte kinetische Energie.

Für die Verlustwärme im Stator kann folgende grobe Näherung angesetzt werden:

Bei Vernachlässigung des Magnetisierungsstromes ist $I_1 \approx I_2'$. Die Wärmemengen verhalten sich dann wie die Widerstände:

$$\frac{E_{V,1}}{E_{V,2}} \approx \frac{R_1}{R_2'} \approx 1$$

Für den Hochlauf ergibt sich also:

$$E_{V,1} = E_{\text{kin}}$$

Aus dem Netz muss dann (bei Vernachlässigung der Eisen- und Reibungsverluste) die folgende Energie geliefert werden:

$$\begin{aligned}
 E_{\text{el}} &= E_{V,1} + E_{V,2} + E_{\text{mech}} \\
 &= 3E_{\text{kin}}
 \end{aligned}$$

Beim elektrischen Bremsen ($s_1 = 2$, $s_2 = 1$) gilt für die Energien:

$$\begin{aligned} E_{\text{mech}} &= -E_{\text{kin}} \\ E_{V,2} &= 3E_{\text{kin}} \\ E_{V,1} &= 3E_{\text{kin}} \\ E_{\text{el}} &= E_{V,1} + E_{V,2} + E_{\text{mech}} \\ &= 5E_{\text{kin}} \end{aligned}$$

Beim Anlauf mit Polumschaltung (von p' auf p'') ergibt sich folgende Rotorverlustenergie:

$$E_{V,2} = E'_{\text{kin}} (s_1'^2 - s_2'^2) + E''_{\text{kin}} (s_1''^2 - s_2''^2)$$

Wird nun $p' = 2$ und $p'' = 1$ gewählt, so gilt:

$$\begin{aligned} \omega'_0 &= \frac{1}{2} \omega''_0 = \frac{1}{2} \omega_0 \\ s'_1 &= 1, s'_2 = 0, s''_1 = 0,5, s''_2 = 0 \\ E'_{\text{kin}} &= \frac{1}{4} E''_{\text{kin}} = \frac{1}{4} E_{\text{kin}} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} E_{V,2} &= \frac{1}{4} E_{\text{kin}} (1^2 - 0^2) + E_{\text{kin}} (0,5^2 - 0^2) \\ &= \frac{1}{2} E_{\text{kin}} \end{aligned}$$

Bei gleicher kinetischer Energie wie beim Hochlauf ohne Polumschaltung (die Enddrehzahl hat sich ja nicht geändert) entsteht also im Rotor nur die Hälfte der Verlustenergie (Wärmemenge).

2. Betrieb mit Gegenmoment:

Es gilt:

$$T - T_g = \Theta \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \frac{T}{T - T_g} \Theta \frac{d\omega}{dt} = T$$

Also folgt:

$$\begin{aligned} E_{V,2} &= \int_{t_1}^{t_2} s P_{\delta} dt = \int_{t_1}^{t_2} s \omega_0 T dt = \int_{t_1}^{t_2} s \omega_0 \left(\frac{T}{T - T_g} \Theta \frac{d\omega}{dt} \right) dt \\ &= \int_{s_1}^{s_2} s \omega_0 \frac{T}{T - T_g} \Theta (-\omega_0) ds = -2 \frac{1}{2} \Theta \omega_0^2 \int_{s_1}^{s_2} \frac{T}{T - T_g} s ds \\ &= -2 E_{\text{kin}} \int_{s_1}^{s_2} \frac{T}{T - T_g} s ds \end{aligned}$$

Der i.a. von ω bzw. s abhängende Faktor $\frac{T}{T - T_g} > 1$ vergrößert die bei der Drehzahländerung entstehende Wärmemenge gegenüber dem Fall ohne Gegenmoment ($T_g = 0$).

Dies ist z.B. bei einem $Y-\Delta$ -Anlauf von Bedeutung, bei dem T in der Y -Schaltung auf $1/3$ reduziert ist, während das Gegenmoment unverändert bleibt ($T - T_g$ kann sehr klein werden). Das Netz wird zwar vor zu hohen Strömen geschützt, aber die Antriebsmaschine muss für $T_g > 0$ höhere Wärmemengen verkraften. Gleiches gilt für den Anlauf mit reduzierter Spannung.

Im Sonderfall $T_a = T - T_g = 0$ (kein Beschleunigungsmoment vorhanden, z.B. bei Blockieren des Läufers) wächst $E_{V,2}$ über alle Grenzen.

Nur im Fall $T_g = 0$ hängt $E_{V,2}$ nicht von der Art des Anlaufes ab.

Die oben ermittelten Wärmemengen treten dann auf, wenn die Maschinen am Netz konstanter Spannung und Frequenz arbeiten. Bei einem spannungs- und frequenzgesteuerten Anlauf treten sie nicht auf.

2 Dynamisches Verhalten der Gleichstrommaschine

2.1 Gleichungssystem für dynamischen Betrieb

Zusätzlich zum stationären Betrieb der Gleichstrommaschine müssen beim dynamischen Betrieb die Energiespeicher (Induktivitäten und Trägheitsmoment) L_A , L_F und Θ in den Gleichungen berücksichtigt werden.

Bei genauerer Analyse ist es auch notwendig, den Bürstenspannungsabfall ΔU_B , das Reibmoment ΔT_R und die Nichtlinearität des magnetischen Kreises durch die Sättigung des Eisens zu berücksichtigen. Damit ergibt sich für den dynamischen Betrieb folgendes Gleichungssystem und Ersatzschaltbild:

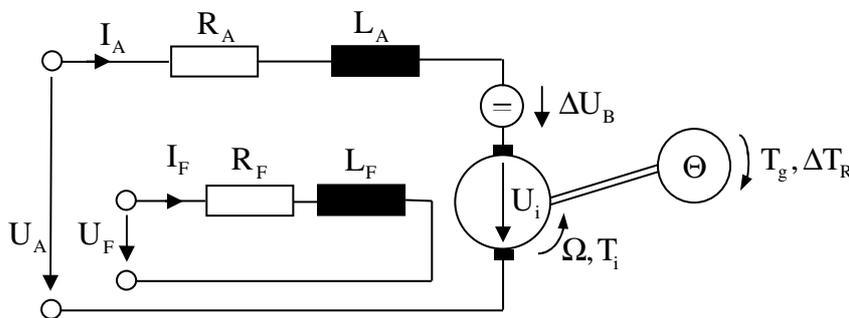
$$U_A = I_A R_A + L_A \frac{dI_A}{dt} + U_i + \Delta U_B$$

$$U_i = c\Omega\phi, \quad c = \frac{k}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} 4p w_A, \quad \Omega = 2\pi n$$

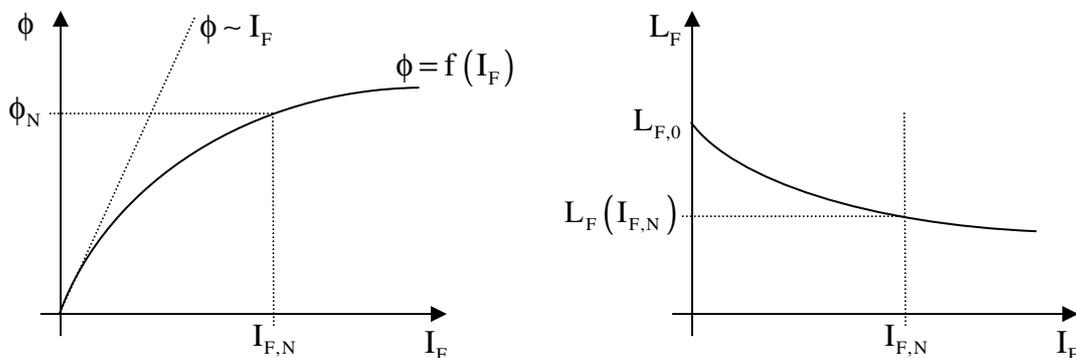
$$U_F = I_F R_F + w_F \frac{d\phi}{dt}$$

$$T_i - T_g - \Delta T_R = \Theta \frac{d\Omega}{dt}$$

$$T_i = c\phi I_A$$



Für den nichtlinearen Zusammenhang zwischen Fluss und Erregerstrom gilt (der Index „N“ bezeichnet im Folgenden die Nenn-Größen):



Die Erregerfeldinduktivität ist stromabhängig: $L_F(I_F) = \frac{w_F \phi}{I_F}$. Im Nennpunkt ist der Erregerkreis i.a. gesättigt: $L_{F,N} = \frac{w_F \phi_N}{I_{F,N}}$.

Aus den obigen Beziehungen folgt nun ein allgemeines System aus drei gekoppelten Differentialgleichungen, mit dem alle Betriebszustände der Gleichstrommaschine beschrieben werden können:

$$\text{Ankerkreis:} \quad U_A - \Delta U_B = U'_A = I_A R_A + L_A \frac{dI_A}{dt} + c\Omega\phi$$

$$\text{Feldkreis:} \quad U_F = I_F R_F + w_F \frac{d\phi}{dt}, \quad \phi = f(I_F)$$

$$\text{Drehmoment:} \quad c\phi I_A = \Theta \frac{d\Omega}{dt} + (T_g + \Delta T_R) = \Theta \frac{d\Omega}{dt} + T'_g$$

Man erkennt, dass diese Differentialgleichungen für den Ankerkreis und das Drehmoment über $\Omega = 2\pi n$ und den Ankerstrom I_A gekoppelt sind.

Die Erregerfeldinduktivität ist stromabhängig angenommen, die Ankerinduktivität dagegen konstant. Diese Annahme einer konstanten Ankerinduktivität ist zulässig, weil im senkrecht zur Polachse verlaufenden Ankerkreis entweder der große Luftspalt dominiert, oder bei Anwesenheit von Wende- und Kompensationswicklung nur noch eine kleine Streuinduktivität übrig bleibt.

Um eine allgemeingültige Lösung zu erhalten, bietet sich die Normierung auf die Nenngrößen an:

$$\begin{aligned} U_A^\otimes &= \frac{U'_A}{U_N} & I_A^\otimes &= \frac{I_A}{I_{A,N}} & R_A^\otimes &= \frac{R_A I_{A,N}}{U_N} \\ U_F^\otimes &= \frac{U_F}{U_N} & I_F^\otimes &= \frac{I_F}{I_{F,N}} & R_F^\otimes &= \frac{R_F I_{F,N}}{U_N} \\ \phi^\otimes &= \frac{\phi}{\phi_N} & n^\otimes &= \frac{\Omega}{\Omega_0} & T_g^\otimes &= \frac{T_g}{T_N} \\ L_{F,N} &= \frac{w_F \phi_N}{I_{F,N}} & U_N &= c\phi_N \Omega_0 & T_N &= c\phi_N I_{A,N} \end{aligned}$$

Außerdem werden noch die folgenden Zeitkonstanten eingeführt:

$$\begin{aligned} \tau_A &= \frac{L_A}{R_A} && \text{die Ankerzeitkonstante} \\ \tau_F &= \frac{L_{F,N}}{R_F} && \text{die Felderregerzeitkonstante} \\ \tau_\Theta &= \frac{\Theta \Omega_0}{T_N} && \text{die Nennanlauf-Zeitkonstante} \end{aligned}$$

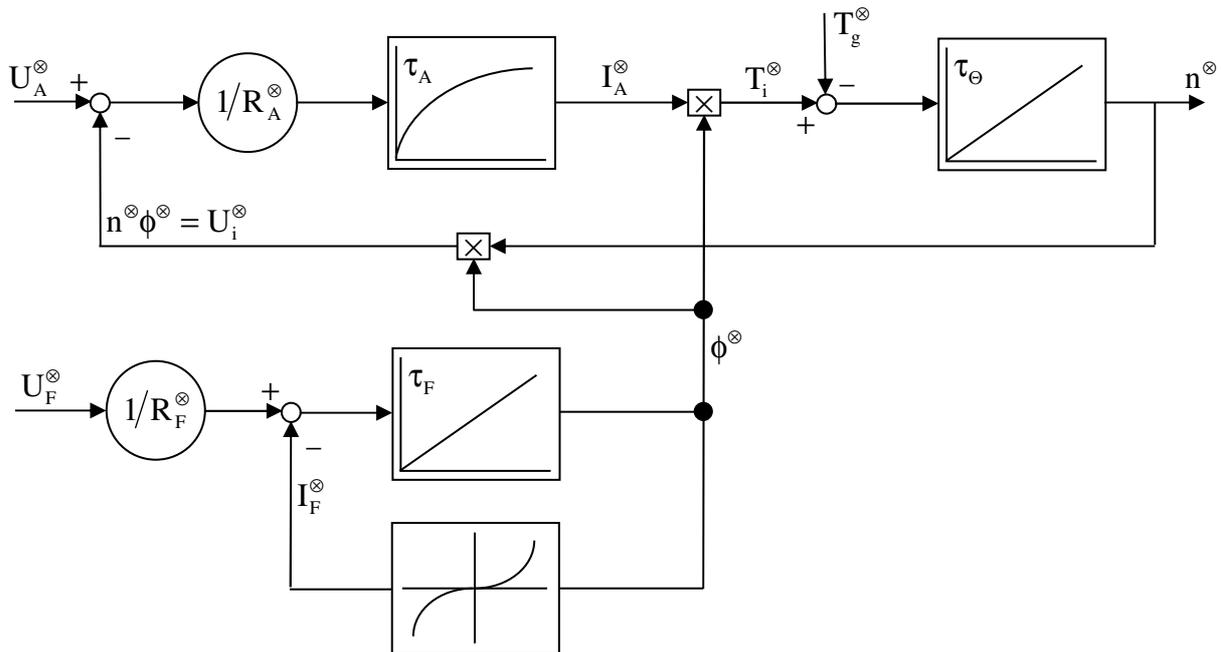
Durch Umformungen und Einsetzen erhält man dann das folgende Gleichungssystem:

$$\tau_A \frac{dI_A^\otimes}{dt} = \frac{1}{R_A^\otimes} (U_A^\otimes - n^\otimes \phi^\otimes) - I_A^\otimes$$

$$\tau_F \frac{d\phi^\otimes}{dt} = \frac{U_F^\otimes}{R_F^\otimes} - I_F^\otimes$$

$$\tau_\Theta \frac{dn^\otimes}{dt} = \phi^\otimes I_A^\otimes - T_g^\otimes$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen kann nun das in der Regelungstechnik übliche Strukturbild angegeben werden:



Eingangsgrößen sind U_A^\otimes , U_F^\otimes und T_g^\otimes . Das aus drei Differentialgleichungen bestehende System ist nichtlinear durch die Multiplikationen $n^\otimes \cdot \phi^\otimes$ und $I_A^\otimes \cdot \phi^\otimes$ und durch die Magnetisierungskennlinie $\phi^\otimes = f(I_F^\otimes)$. Die Kopplung dieser Differentialgleichungen ist gegeben über n^\otimes und I_A^\otimes .

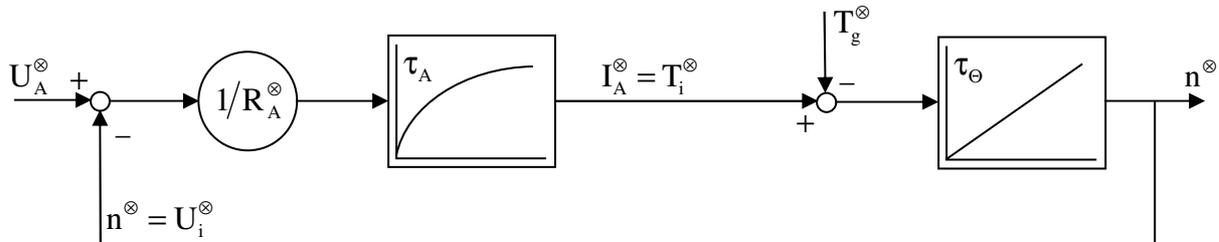
Dieses gekoppelte, nichtlineare Differentialgleichungssystem kann vollständig nur mit Hilfe numerischer Verfahren gelöst werden.

Im Folgenden werden einige typische Anwendungsfälle behandelt, bei denen aufgrund von Vereinfachungen auch analytische Lösungen angegeben werden können.

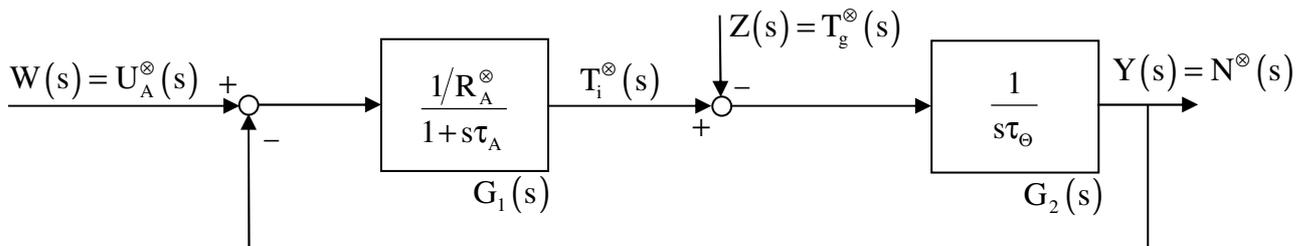
2.2 Fremderregte Gleichstrommaschine

1. Allgemeine Struktur:

Häufig werden drehzahlvariable Gleichstromantriebe mit konstanter Erregung betrieben (Permanentmagnete), wobei Drehmoment und Drehzahl über die Ankerspannung beeinflusst werden. In diesem Fall ist $\phi = \phi_N = \text{const.}$ und das Strukturbild wird mit $\phi^\otimes = 1$ sehr einfach:



Mit Hilfe der Laplace-Transformation ergibt sich die in der Regelungstechnik übliche Darstellung in Blockform:



Ausgangsgröße ist die Drehzahl der Gleichstrommaschine, die durch die Führungsgröße (Ankerspannung) gestellt wird. Die Störgröße ist das Widerstandsmoment der Last (Gegenmoment).

Es gilt folgender Zusammenhang:

$$Y = G_2(T_i^\otimes - Z)$$

$$T_i^\otimes = G_1(W - Y)$$

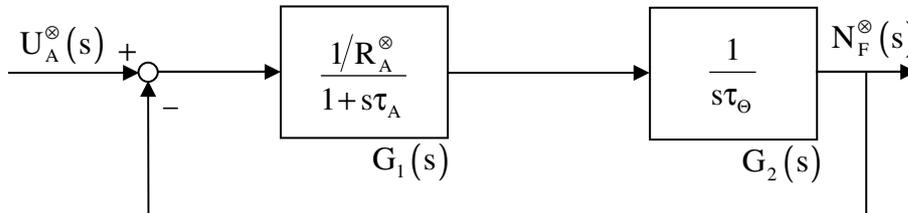
Durch Einsetzen und Auflösen nach Y erhält man dann:

$$Y = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2} W - \frac{G_2}{1 + G_1 G_2} Z$$

2. Führungsverhalten:

Als Führungsverhalten bezeichnet man das Änderungsverhalten der Ausgangsgröße auf eine Variation der Stellgröße, wobei die Störgröße null ist.

Das Führungsverhalten der Gleichstrommaschine ist also die Drehzahländerung bei einer Änderung der Ankerspannung für $Z(s) = T_g^\otimes(s) = 0$. Es gilt dann (der zusätzliche Index „F“ bei Drehzahl und Ankerstrom kennzeichnet im Folgenden die charakteristischen Funktionen für das Führungsverhalten):



$$N_F^\otimes = G_1 G_2 (U_A^\otimes - N_F^\otimes)$$

$$\Rightarrow N_F^\otimes = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2} U_A^\otimes$$

Weiter folgt dann:

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{N_F^\otimes(s)}{U_A^\otimes(s)} = \frac{G_1(s) G_2(s)}{1 + G_1(s) G_2(s)} = \frac{\frac{1/R_A^\otimes}{1 + s\tau_A} \frac{1}{s\tau_\Theta}}{1 + \frac{1/R_A^\otimes}{1 + s\tau_A} \frac{1}{s\tau_\Theta}} = \frac{1}{s\tau_\Theta R_A^\otimes (1 + s\tau_A) + 1}$$

Wird nun noch die mechanische Zeitkonstante

$$\tau_{\text{mech}} = \tau_\Theta R_A^\otimes = \frac{\Theta \Omega_0}{T_N} \frac{R_A I_{A,N}}{U_N} = \frac{\Theta \Omega_0}{T_N} \frac{U_N}{R_A} \frac{1}{I_{A,N}} = \frac{\Theta \Omega_0}{T_N} \frac{I_K}{I_{A,N}} = \frac{\Theta \Omega_0}{T_K}$$

eingeführt, so folgt:

$$\frac{N_F^\otimes(s)}{U_A^\otimes(s)} = \frac{1}{1 + (1 + s\tau_A) s\tau_{\text{mech}}} = \frac{1}{\tau_{\text{mech}} \tau_A \left(s^2 + \frac{s}{\tau_A} + \frac{1}{\tau_{\text{mech}} \tau_A} \right)}$$

Nun soll zum Zeitpunkt $t = 0$ ein Sprung der Führungsgröße erfolgen, z.B. Aufschalten der Nennspannung auf die stillstehende Maschine. Dann gilt:

$$U_A^\otimes(s) = \frac{1}{s}$$

und damit:

$$N_F^\otimes(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{\tau_{\text{mech}} \tau_A \left(s^2 + \frac{s}{\tau_A} + \frac{1}{\tau_{\text{mech}} \tau_A} \right)}$$

Man erhält nun den zeitabhängigen Drehzahlverlauf durch Rücktransformation:

$$n_F^\otimes(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2sD\omega_0 + \omega_0^2} \right\}$$

Mit

$$\omega_0^2 = \frac{1}{\tau_{\text{mech}} \tau_A}, \quad 2D\omega_0 = \frac{1}{\tau_A}$$

$$\Rightarrow D = \sqrt{\frac{\tau_{\text{mech}}}{4\tau_A}}$$

Als Lösung der Rücktransformation erhält man (aus Tabellenwerken):

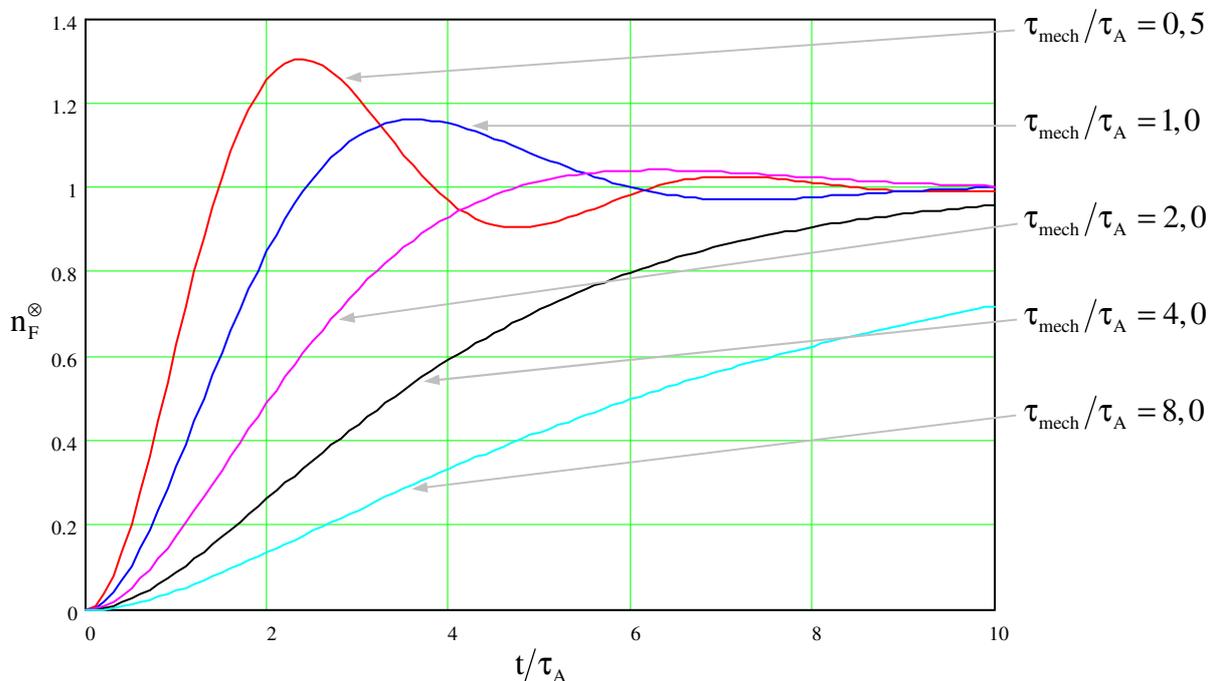
$$n_F^\otimes(t) = 1 - \frac{e^{-D\omega_0 t}}{\sqrt{1-D^2}} \sin\left(\omega_0 \sqrt{1-D^2} t + \arcsin\left(\sqrt{1-D^2}\right)\right)$$

Für $D=1$ erhält man die zeitabhängige Drehzahl durch die Betrachtung für kleine x : $\sin(x) \approx x$, $\arcsin(x) \approx x$. Es folgt:

$$n_F^\otimes(t, D=1) = 1 - \frac{e^{-D\omega_0 t}}{\sqrt{1-D^2}} \left(\omega_0 \sqrt{1-D^2} t + \sqrt{1-D^2}\right)$$

$$= 1 - e^{-D\omega_0 t} (\omega_0 t + 1)$$

Die folgende Grafik zeigt die Auswertung dieser Gleichungen für verschiedene Werte von $\tau_{\text{mech}}/\tau_A$:



Aus der Beziehung

$$N_F^\otimes(s) = G_2(s) I_{A,F}^\otimes(s)$$

folgt für den Strom:

$$I_{A,F}^\otimes(s) = s\tau_\Theta N_F^\otimes(s)$$

Dies bedeutet bei der Rücktransformation eine Differentiation:

$$I_{A,F}^\otimes(t) = L^{-1}\{s\tau_\Theta N_F^\otimes(s)\} = \tau_\Theta \frac{dn_F^\otimes}{dt} = \frac{1}{R_A^\otimes} \tau_{\text{mech}} \frac{dn_F^\otimes}{dt}$$

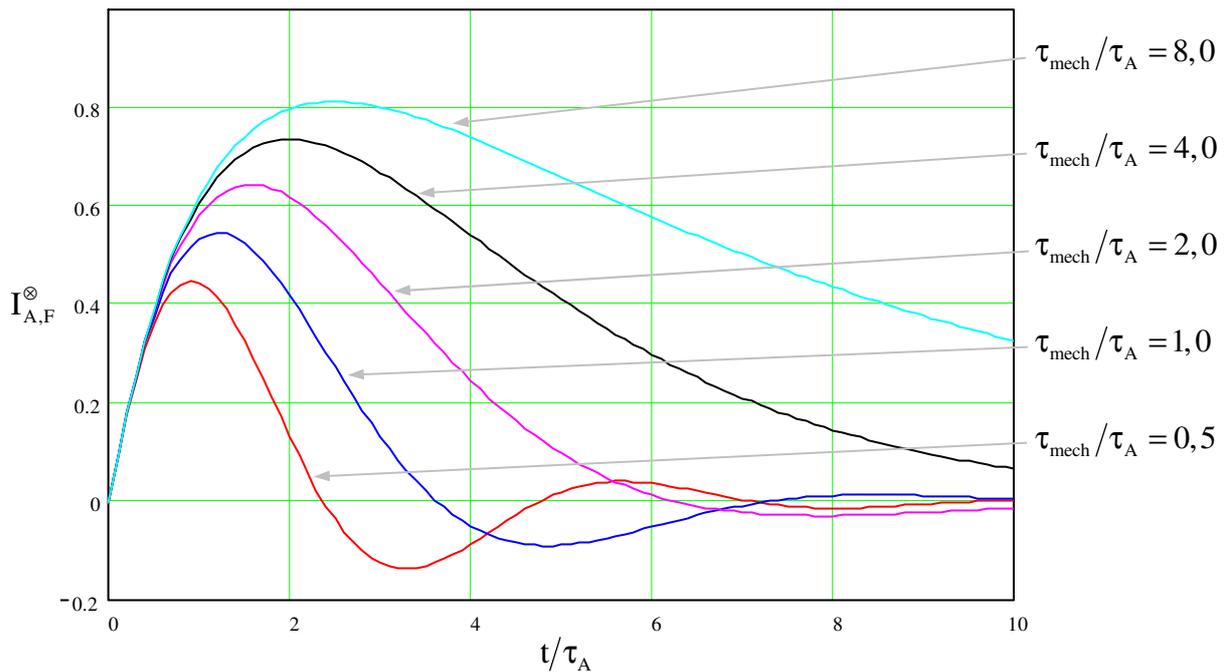
Insgesamt folgt dann:

$$\begin{aligned} I_{A,F}^\otimes(t) &= \frac{\tau_{\text{mech}}}{R_A^\otimes} \left[\frac{D\omega_0}{\sqrt{1-D^2}} e^{-D\omega_0 t} \sin\left(\omega_0 \sqrt{1-D^2} t + \arcsin\left(\sqrt{1-D^2}\right)\right) \right. \\ &\quad \left. - \omega_0 e^{-D\omega_0 t} \cos\left(\omega_0 \sqrt{1-D^2} t + \arcsin\left(\sqrt{1-D^2}\right)\right) \right] \\ &= \frac{\tau_{\text{mech}}}{R_A^\otimes} \omega_0 e^{-D\omega_0 t} \left[\frac{D}{\sqrt{1-D^2}} \sin\left(\omega_0 \sqrt{1-D^2} t + \arcsin\left(\sqrt{1-D^2}\right)\right) \right. \\ &\quad \left. - \cos\left(\omega_0 \sqrt{1-D^2} t + \arcsin\left(\sqrt{1-D^2}\right)\right) \right] \end{aligned}$$

Auch hier erhält man das Ergebnis für $D=1$ durch eine Betrachtung für kleine Argumente:

$$\begin{aligned} I_{A,F}^\otimes(t) &= \frac{\tau_{\text{mech}}}{R_A^\otimes} \omega_0 e^{-D\omega_0 t} \left[\frac{D}{\sqrt{1-D^2}} \sin\left(\omega_0 \sqrt{1-D^2} t + \arcsin\left(\sqrt{1-D^2}\right)\right) \right. \\ &\quad \left. - \cos\left(\omega_0 \sqrt{1-D^2} t + \arcsin\left(\sqrt{1-D^2}\right)\right) \right] \\ &= \frac{\tau_{\text{mech}}}{R_A^\otimes} \omega_0 e^{-D\omega_0 t} \left[\frac{D}{\sqrt{1-D^2}} \left(\omega_0 \sqrt{1-D^2} t + \sqrt{1-D^2}\right) \right. \\ &\quad \left. - \cos\left(\omega_0 \sqrt{1-D^2} t + \arcsin\left(\sqrt{1-D^2}\right)\right) \right] \\ &= \frac{\tau_{\text{mech}}}{R_A^\otimes} \omega_0 e^{-D\omega_0 t} [D(\omega_0 t + 1) - \cos(0)] \\ &= \frac{\tau_{\text{mech}}}{R_A^\otimes} \omega_0 e^{-D\omega_0 t} [D(\omega_0 t + 1) - 1] \end{aligned}$$

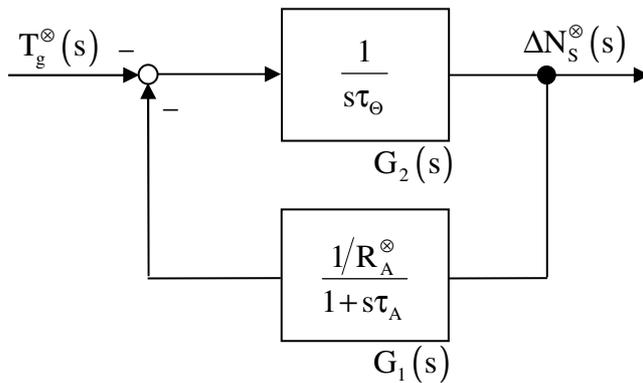
Eine Auswertung dieser Funktionen ist in der folgenden Grafik angegeben:



3. Störverhalten:

Als Störverhalten bezeichnet man die Änderung der Ausgangsgröße auf eine Variation der Störgröße, wobei die Stellgröße null ist.

Das Störverhalten der Gleichstrommaschine ist also die Drehzahländerung bei einer Änderung der Belastung für $W(s) = U_A^{\otimes}(s) = 0$. Es gilt dann:



Damit ergibt sich:

$$\Delta N_s^{\otimes}(s) = G_2(s) (-T_g^{\otimes}(s) - G_1(s) \Delta N_s^{\otimes}(s))$$

$$\Rightarrow \Delta N_s^{\otimes}(s) = \frac{-G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} T_g^{\otimes}(s)$$

Weiter folgt dann:

$$\frac{\Delta N_S^\otimes(s)}{T_g^\otimes(s)} = \frac{-\frac{1}{s\tau_\Theta}}{1 + \frac{1/R_A^\otimes}{1 + s\tau_A} \frac{1}{s\tau_\Theta}} = \frac{-R_A^\otimes(1 + s\tau_A)}{1 + R_A^\otimes s\tau_\Theta(1 + s\tau_A)} = \frac{-R_A^\otimes(1 + s\tau_A)}{1 + s\tau_{\text{mech}} + s^2\tau_{\text{mech}}\tau_A}$$

Schaltet man nun das Nennmoment $T_g^\otimes(s) = 1/s$ auf, so ergibt sich für die Drehzahländerung:

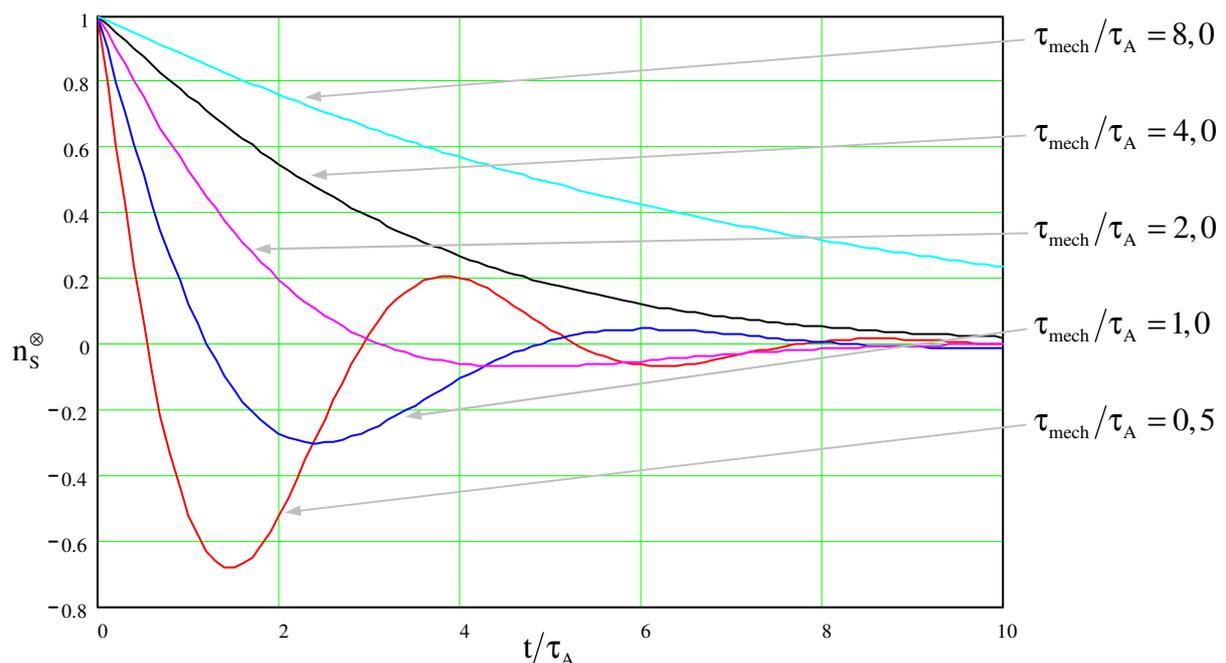
$$\begin{aligned} \Delta n_S^\otimes(t) &= L^{-1} \left\{ \frac{-R_A^\otimes(1 + s\tau_A)}{s(1 + s\tau_{\text{mech}} + s^2\tau_{\text{mech}}\tau_A)} \right\} = -R_A^\otimes L^{-1} \{ N_F^\otimes(s) + s\tau_A N_F^\otimes(s) \} \\ &= -R_A^\otimes \left(n_F^\otimes(t) + \tau_A \frac{dn_F^\otimes(t)}{dt} \right) \\ &= -R_A^\otimes \left(n_F^\otimes(t) + \tau_A \frac{R_A^\otimes}{\tau_{\text{mech}}} I_{A,F}^\otimes(t) \right) = -R_A^\otimes n_F^\otimes(t) - (R_A^\otimes)^2 \frac{\tau_A}{\tau_{\text{mech}}} I_{A,F}^\otimes(t) \end{aligned}$$

Nun soll der Drehzahl-Zeit-Verlauf ermittelt werden, wenn sich die Maschine vor der Belastungsänderung im Leerlauf ($n^\otimes = 1$, $I_A^\otimes = 0$) bei Nennerregung ($\phi^\otimes = 1$, siehe Kapitel 2.1) befand. Es folgt:

$$n_S^\otimes(t) = 1 + \Delta n_S^\otimes(t)$$

Für verschiedene Werte des Parameters $\frac{\tau_{\text{mech}}}{\tau_A}$ ist diese Drehzahländerung in der folgenden

Grafik dargestellt:



Die fremderregte Gleichstrommaschine mit den Energiespeichern L_A und Θ ist also für

$D = \sqrt{\frac{\tau_{\text{mech}}}{4\tau_A}} < 1$ ein schwingungsfähiges System.

Für $D = \sqrt{\frac{\tau_{\text{mech}}}{4\tau_A}} > 1$ ergeben sich aperiodische Verläufe bei Änderungen der Ankerspannung oder der Belastung. Für $D = 1$ spricht man vom aperiodischen Grenzfall.

2.3 Gleichstromnebenschlussmaschine

Ist der Erregerfluss ϕ einer Gleichstrommaschine veränderlich, so muss bei der Untersuchung dynamischer Vorgänge eine numerische Berechnung der Gleichungen durchgeführt werden, weil das Differentialgleichungssystem nichtlinear wird und analytisch nicht mehr gelöst werden kann. Ein solcher Fall ist z.B. beim Anlauf einer Gleichstromnebenschlussmaschine gegeben.

Zum Zeitpunkt $t=0$ soll die stillstehende Maschine an das Netz geschaltet werden. Die Maschine ist während des gesamten Hochlaufes unbelastet ($T_g = 0$). Der zeitliche Verlauf von Ankerstrom, Drehzahl, Drehmoment und Felderregerstrom wird im Folgenden unter Verwendung normierter Größen berechnet.

Mit $U_A^\otimes = U_F^\otimes = 1$ folgt:

$$\begin{aligned}\tau_A \frac{dI_A^\otimes}{dt} &= \frac{1}{R_A^\otimes} (1 - n^\otimes \phi^\otimes) - I_A^\otimes \\ \tau_F \frac{d\phi^\otimes}{dt} &= \frac{1}{R_F^\otimes} - I_F^\otimes, \quad \phi^\otimes = f(I_F^\otimes) \\ \tau_\Theta \frac{dn^\otimes}{dt} &= \phi^\otimes I_A^\otimes\end{aligned}$$

Die Eisensättigung wird mit der Funktion $\phi^\otimes = f(I_F^\otimes)$ berücksichtigt.

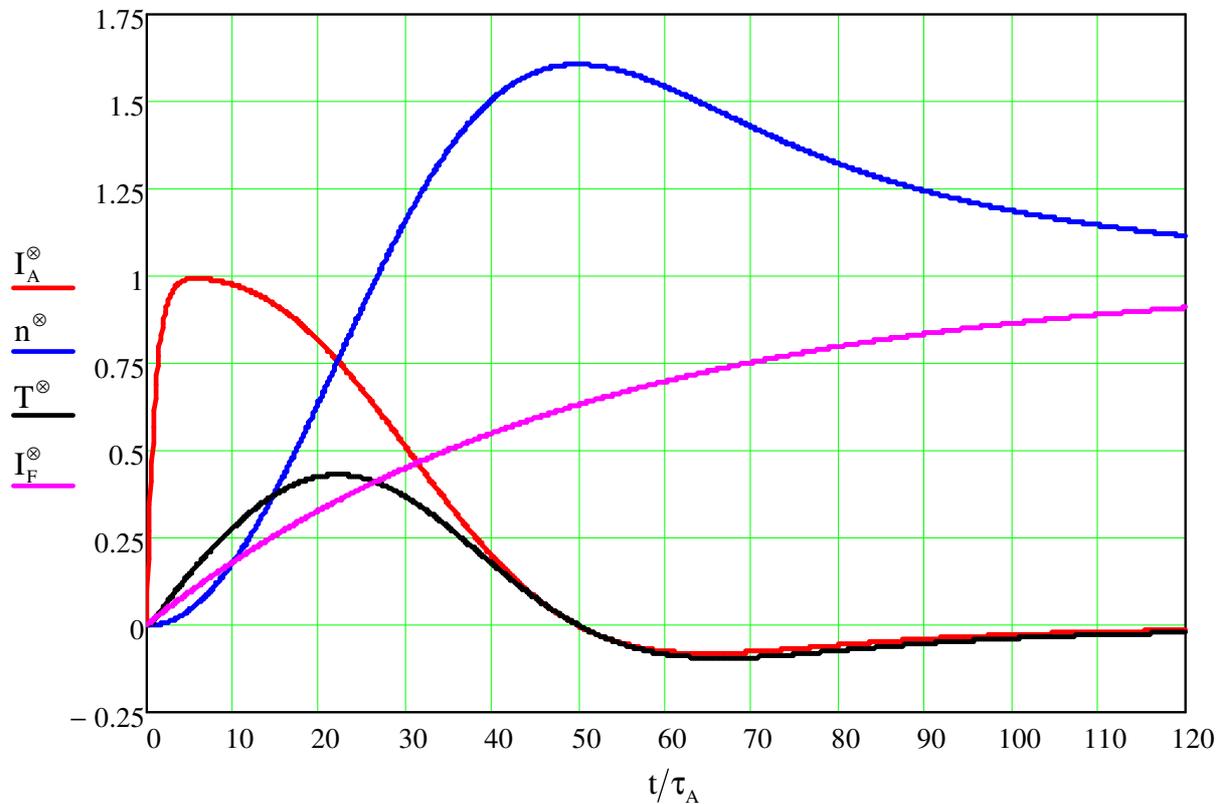
Dieses Gleichungssystem wird nun schrittweise durch numerische Integration auf dem Digitalrechner gelöst. Hierbei werden die benötigten Größen zum Zeitpunkt t_{k+1} aus den Werten zum Zeitpunkt t_k und der Änderung im Zeitintervall $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ ermittelt, indem aus den Differentialgleichungen Differenzgleichungen gebildet werden. Es folgt dann:

$$\begin{aligned}\tau_A \frac{I_{A,k+1}^\otimes - I_{A,k}^\otimes}{\Delta t} &= \frac{1}{R_A^\otimes} (1 - n_k^\otimes \phi_k^\otimes) - I_{A,k}^\otimes \\ \tau_F \frac{\phi_{k+1}^\otimes - \phi_k^\otimes}{\Delta t} &= \frac{1}{R_F^\otimes} - I_{F,k}^\otimes, \quad \phi_k^\otimes = f(I_{F,k}^\otimes) \\ \tau_\Theta \frac{n_{k+1}^\otimes - n_k^\otimes}{\Delta t} &= \phi_k^\otimes I_{A,k}^\otimes\end{aligned}$$

Eine weitere Umstellung dieser Gleichungen ergibt:

$$\begin{aligned}I_{A,k+1}^\otimes &= \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau_A}\right) I_{A,k}^\otimes + \frac{\Delta t}{\tau_A} \left(\frac{1 - n_k^\otimes \phi_k^\otimes}{R_A^\otimes}\right) \\ \phi_{k+1}^\otimes &= \phi_k^\otimes + \frac{\Delta t}{\tau_F} \left(\frac{1}{R_F^\otimes} - I_{F,k}^\otimes\right), \quad \phi_k^\otimes = f(I_{F,k}^\otimes) \\ n_{k+1}^\otimes &= n_k^\otimes + \frac{\Delta t}{\tau_\Theta} \phi_k^\otimes I_{A,k}^\otimes\end{aligned}$$

Die Auswertung dieses Gleichungssystems ist für den Hochlauf für typische Zeitkonstanten und typische bezogene Widerstände in der folgenden Grafik wiedergegeben (normierte Werte; Ankerstrom in rot, Drehzahl in blau, Drehmoment in schwarz und Felderregnerstrom in magenta):



Ein steiler Anstieg des Ankerstromes und eine langsame Zunahme des Erregerstromes führen während der Beschleunigungsphase zu einem reduzierten Drehmoment. Obwohl wegen

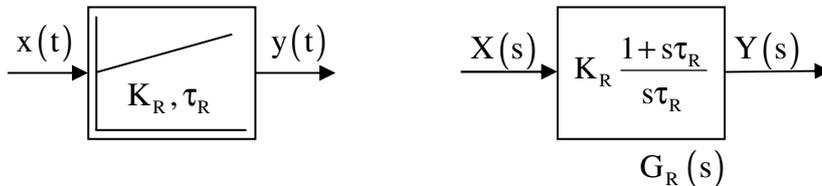
$D = \sqrt{\frac{\tau_{\text{mech}}}{4\tau_A}} > 1$ nach Kapitel 2.2 („fremderregte Gleichstrommaschine“) zunächst ein

aperiodischer Verlauf zu erwarten wäre, erfolgt ein Überschwingen der Drehzahl und des Ankerstromes. Der Grund für diesen unterschiedlichen Drehzahl- und Ankerstromverlauf zwischen der fremderregten Gleichstrommaschine und der Gleichstromnebenschlussmaschine ist:

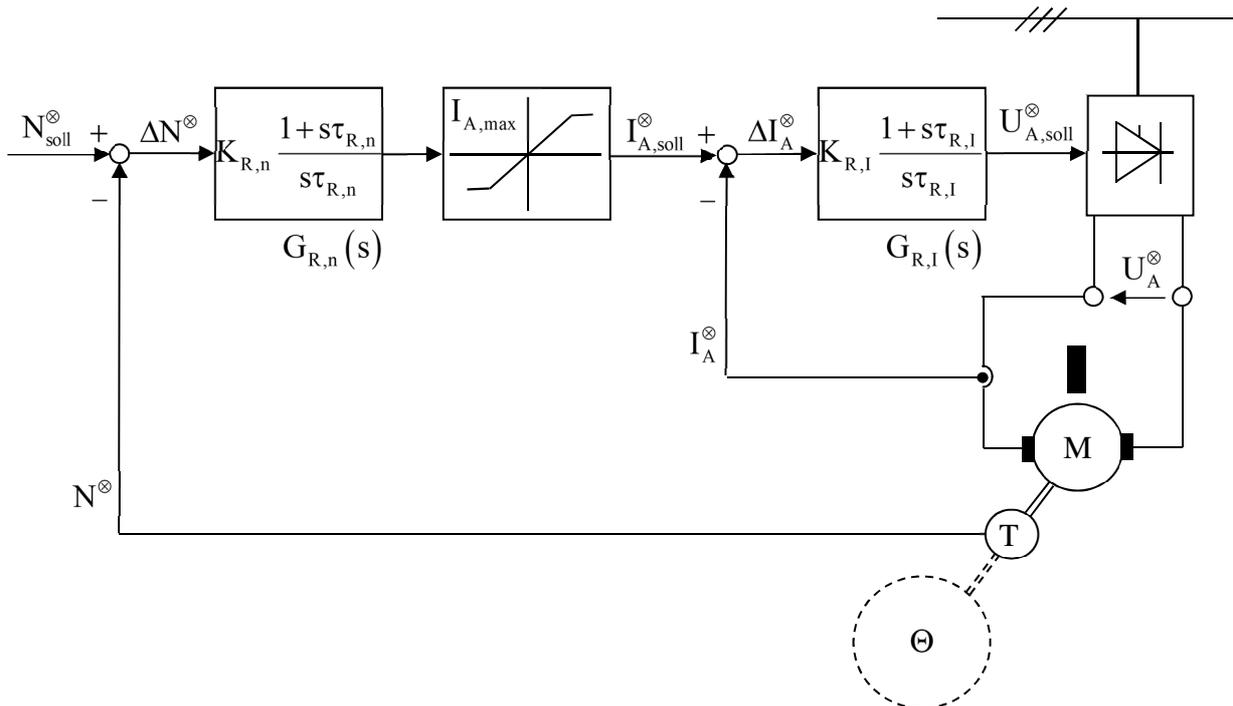
- Bei der fremderregten Gleichstrommaschine ist der Fluss immer auf seinem Nennwert, d.h. es gilt im gesamten Zeitbereich $\phi^\otimes = 1 = \text{const.}$
- Bei der Gleichstromnebenschlussmaschine dagegen wird das Feld nur verzögert aufgebaut.

2.4 Kaskadenregelung einer Gleichstrommaschine

Zu Regelungszwecken werden in der Antriebstechnik häufig PI-(Proportional-Integral-) Regler eingesetzt. Sie verknüpfen den Vorteil einer einfachen Struktur mit der Eigenschaft, stationär genau zu sein (d.h. bei Störgrößeneinwirkung Rückkehr auf den ursprünglichen Wert, nach Sollwertänderung Einstellung des neuen Wertes; jeweils ohne stationäre Abweichung). Blockschaltbild und Übertragungsfunktion eines PI-Reglers sind:



Das folgende Bild zeigt eine weit verbreitete Regelschaltung aus permanentmagneterregter Gleichstrommaschine, Stromrichter und Kaskadenregelung. Die Kaskadenregelung besteht aus einem Drehzahlregelkreis (realisiert mit einem PI-Regler: $G_{R,n}(s)$) und einem unterlagerten Stromregelkreis (ebenfalls realisiert mit einem PI-Regler: $G_{R,I}(s)$). Zusätzlich ist eine Ankerstrombegrenzung vorgesehen.



Für die schrittweise Lösung des Differentialgleichungssystems werden auch hier numerische Verfahren angewandt. Dann müssen aber auch die PI-Regler diskretisiert werden. Es gilt:

$$G_R(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = K_R \frac{1 + s\tau_R}{s\tau_R}$$

$$\Rightarrow s\tau_R Y(s) = K_R (1 + s\tau_R) X(s)$$

Im Zeitbereich erhält man dann:

$$\tau_R \frac{dy}{dt} = K_R \left(x + \tau_R \frac{dx}{dt} \right)$$

$$\Rightarrow y(t) = K_R \left(\frac{1}{\tau_R} \int x(t) dt + x(t) \right)$$

In diskretisierter Form lautet diese Gleichung:

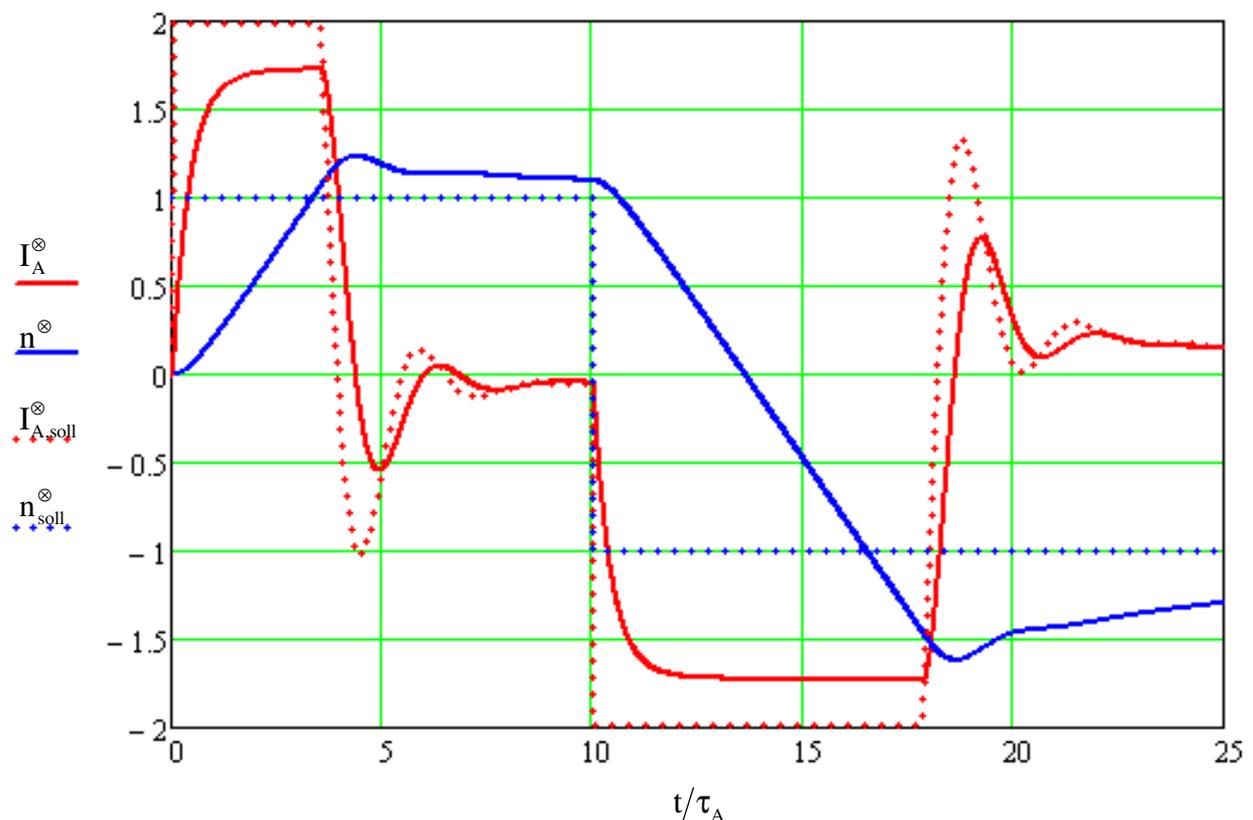
$$y_k = K_R \left(\frac{1}{\tau_R} \sum_{i=1}^{k-1} x_i \cdot \Delta t_i + x_k \right)$$

Für die folgende Berechnung eines dynamischen Betriebes wird die Totzeit (Verzögerungszeit) des Stromrichters vernachlässigt, d.h. es gilt $U_A^\otimes \equiv U_{A,soll}^\otimes$. Für die Gleichstrommaschine mit Permanentmagneterrregung ($\phi^\otimes = 1$) gilt in bezogenen Größen:

$$\tau_A \frac{dI_A^\otimes}{dt} = \frac{1}{R_A^\otimes} (U_A^\otimes - n^\otimes) - I_A^\otimes$$

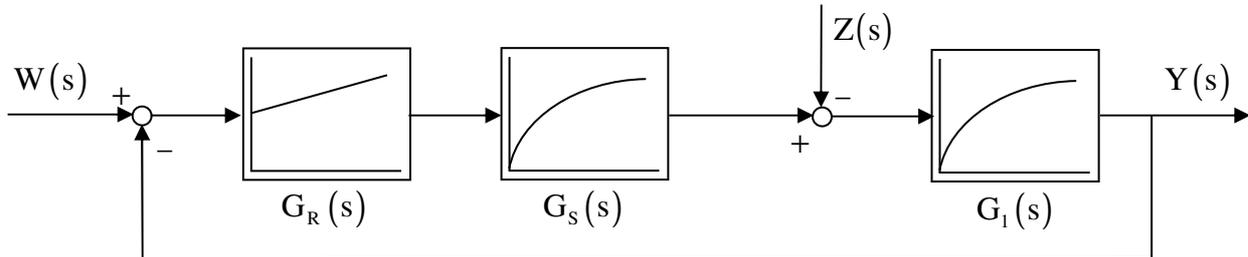
$$\tau_\Theta \frac{dn^\otimes}{dt} = I_A^\otimes - T_g^\otimes$$

In der folgenden Grafik ist der zeitliche Verlauf von Drehzahl und Ankerstrom (mit den jeweiligen Sollwerten) bei einem Sollwertsprung der Drehzahl von 0 auf 1 und später auf -1 (Hochlauf und Reversieren) ohne Last dargestellt. Der Ankerstrom ist hierbei auf den 2-fachen Nennwert begrenzt. Aufgrund der konstanten Erregung entspricht der Ankerstrom dem Drehmoment. An dem Überschwingen und den Oszillationen erkennt man, dass die Reglerparameter nicht optimal (hinsichtlich Schwingungsarmut, Schnelligkeit und Genauigkeit) eingestellt sind.



2.5 Einstellregeln für PI-Regler

In der elektrischen Antriebstechnik können geregelte Systeme mit PI-Reglern häufig (zumindest näherungsweise) auf folgende Grundstruktur zurückgeführt werden:



Hierbei gelten für die Übertragungsfunktionen in der Laplace-Ebene:

- PI-Regler: $G_R(s) = K_R \frac{1+s\tau_R}{s\tau_R}$
- Strecke: $G_S(s) = K_S \frac{1}{1+s\tau_S}$; $G_I(s) = \frac{1}{1+s\tau_1}$

Die Parameter bedeuten:

- K_R : die Verstärkung des PI-Reglers
- τ_R : die Nachstellzeit des PI-Reglers
- K_S : die Gesamtverstärkung der Strecke
- τ_S : die Summe der kleinen Zeitkonstanten der Strecke
- τ_1 : die große Zeitkonstante der Strecke

Eine Regel aus der Praxis besagt, dass die Unterscheidung zwischen „Summe der kleinen Zeitkonstanten“ und „große Zeitkonstante“ dann angewendet werden kann, wenn

$$\tau_1 \geq 4\tau_S$$

gilt.

Ohne detaillierte Herleitung werden nun für zwei besondere Fälle die Einstellregeln für die Regler-Parameter angegeben.

1. Einstellung auf optimales Führungsverhalten (Einstellregel „Betragsoptimum“):

Die Reglerparameter müssen wie folgt gewählt werden:

$$\tau_R = \tau_1, \quad K_R = \frac{1}{2} \frac{1}{K_S} \frac{\tau_1}{\tau_S}$$

2. Einstellung auf optimales Störverhalten (Einstellregel „Symmetrisches Optimum“):

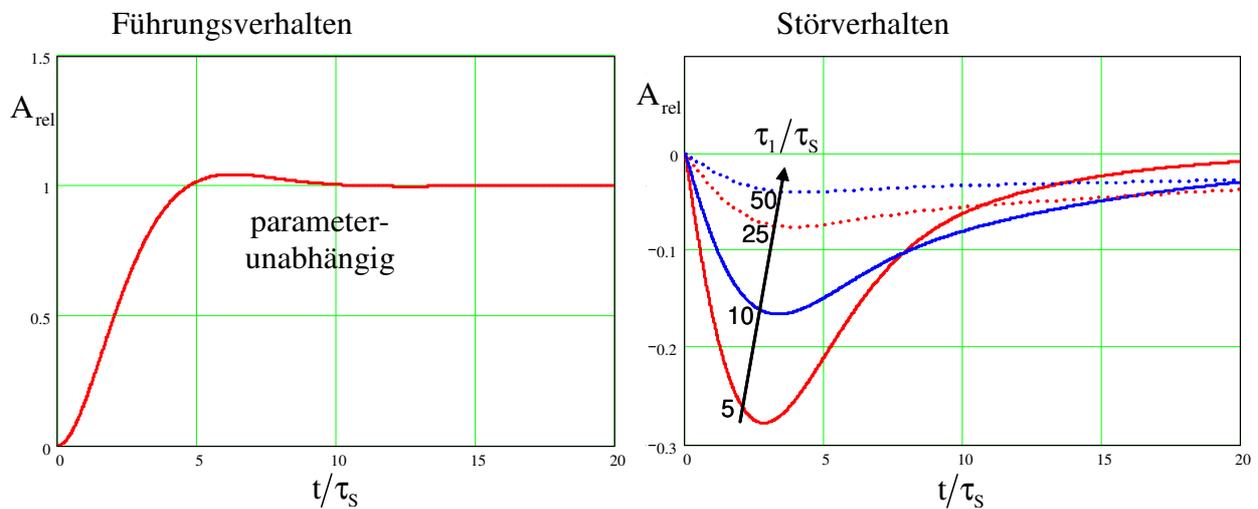
Die Reglerparameter müssen wie folgt gewählt werden:

$$\tau_R = 4\tau_S, \quad K_R = \frac{1}{2} \frac{1}{K_S} \frac{\tau_I}{\tau_S}$$

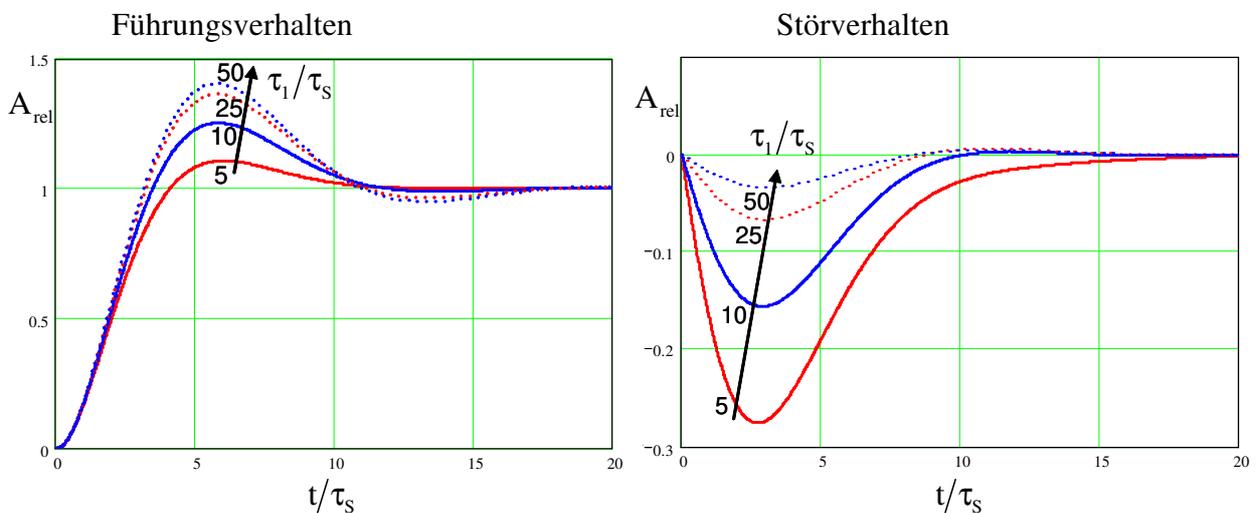
Beim Test mit Sprungfunktionen (der Führungsgröße bzw. der Störgröße) ergeben sich hiermit jeweils die in den folgenden Bildern dargestellten Charakteristiken des Systems. Hierbei gilt:

- In der vertikalen Achse ist die relative Amplitude A_{rel} der Ausgangsgröße angegeben.
- In der horizontalen Achse ist die normierte Zeit t/τ_S angegeben.
- Der Parameter der Kurven ist das Verhältnis der Zeitkonstanten τ_I/τ_S .

1. Einstellregel „Betragsoptimum“ (optimales Führungsverhalten):



2. Einstellregel „Symmetrisches Optimum“ (optimales Störverhalten):



3 Raumzeigertheorie für Drehfeldmaschinen

3.1 Methoden zur Feldberechnung

Zur Beschreibung und Berechnung von elektromagnetischen Feldern in elektrischen Maschinen werden im Wesentlichen die folgenden vier Methoden verwendet:

1. Die Wellendarstellung der elektromagnetischen Felder (siehe Kapitel 3.3 bis 3.5 der Vorlesung „Elektrische Maschinen und Antriebe“) hat sich bewährt, wenn stationäre Vorgänge berechnet werden sollen. Diese Darstellungsform ist für das Grundwellenverhalten elektrischer Maschinen anwendbar; sie kann aber auch genutzt werden, wenn neben der Grundwelle zusätzlich die Oberwellen berücksichtigt werden müssen. Dies ist z.B. dann der Fall, wenn Oberwellendrehmomente (Drehmoment-schwankungen) oder akustische Geräusche berechnet werden sollen.
2. Die symmetrischen Komponenten (siehe Kapitel 1.6 der Vorlesung „Elektrische Maschinen und Antriebe“) werden vor allem bei der Behandlung unsymmetrischer Vorgänge mit konstanter Frequenz (dies können auch Ausgleichsvorgänge sein) angewendet.
3. Die Nutzung komplexer Raumzeiger ist vorteilhaft, wenn das transiente Verhalten von (geregelt oder unregelt) Antrieben betrachtet werden soll. Diese Methode wird in den folgenden Kapiteln näher erläutert.
4. Bei der Finiten Elemente Methode (FEM) wird die elektrische Maschine in sehr viele kleine Bereiche („Finite Elemente“) aufgeteilt, und es werden die elektromagnetischen Verhältnisse in der Maschine für jeden dieser Bereiche und für jeden Betriebspunkt numerisch berechnet: Die Maxwellschen Gleichungen werden in jedem Bereich gelöst und die Lösungen an den Rändern der Bereiche aneinander angepasst. Der Nachteil ist zum einen eine sehr lange Rechenzeit, zum anderen ist diese Methode eher für die Analyse einer bekannten Maschine als für das Design einer neuen Maschine geeignet (die Relevanz verschiedener Einflussfaktoren auf das Maschinenverhalten wird nicht unmittelbar ersichtlich). Der Vorteil dieser Methode ist, dass praktisch alle relevanten Eigenschaften gleichzeitig berücksichtigt werden können, während bei den anderen drei (analytischen) Methoden immer einschränkende Voraussetzungen beachtet werden müssen. Die FEM-Methode wird in einer eigenen Vorlesung „FEM in der Antriebstechnik“ detailliert behandelt.

Wie an der obigen Beschreibung der einzelnen Methoden schon zu erkennen ist, richtet sich die Auswahl der Methode nach der zu lösenden Aufgabe.

3.2 Voraussetzungen für die Anwendung der Raumzeigertheorie

Für die folgenden Betrachtungen werden einige einschränkende Annahmen getroffen:

1. Jede Strangwicklung des Ständers und des Läufers erzeugt jeweils eine räumlich sinusförmige Durchflutung, wobei alle die gleiche Wellenlänge besitzen. Man beschränkt sich also jeweils auf die Grundwelle der Durchflutungen (und damit auch jeweils auf die Grundwellen von Strombelag und Luftspaltinduktion); die Wicklungsfaktoren aller Oberwellen werden zu null angenommen. Jede einzelne Welle kann als Vektor dargestellt werden, wobei die Lage des Vektors die augenblickliche Lage des Maximums der Welle angibt, und die Länge des Vektors den Wert des Maximums.
2. Die Maschine ist magnetisch völlig symmetrisch (d.h. konstanter Luftspalt am ganzen Umfang) und der Einfluss der Nutung wird vernachlässigt. Innerhalb eines Maschinenteils (Stator oder Rotor) sind die Selbst- und Gegeninduktivitäten von der Läuferstellung unabhängig.
Auf diese Voraussetzung kann teilweise verzichtet werden: Wenn der Stator oder der Rotor zwei magnetisch oder elektrisch senkrecht aufeinander stehende Vorzugsrichtungen besitzt, kann durch die Wahl eines am unsymmetrischen Maschinenteil fixierten Koordinatensystems die Raumzeigertheorie dennoch angewendet werden.
3. Die Sättigung wird vernachlässigt, d.h. die magnetischen Leitwerte sind von der Durchflutung unabhängig, und der magnetische Spannungsabfall im Eisen wird vernachlässigt ($\mu_{Fe} \rightarrow \infty$); es liegen also lineare Verhältnisse vor. Nun kann (als wesentlicher Vorteil der Darstellung der Wellen mit Vektoren) durch vektorielle Addition die gemeinsame Wirkung der einzelnen Wellen berechnet werden.²

Wichtig für das Verständnis der Raumzeigertheorie ist, dass über die Zeitabhängigkeit der einzelnen Ströme keine einschränkende Voraussetzung gemacht wird: Die Ströme können beliebige Zeitabhängigkeiten aufweisen, die auch unsymmetrisch sein dürfen (dies ist entscheidend, um transiente Vorgänge berechnen zu können). Trotz der beliebigen Zeitabhängigkeit der Ströme sind die von jedem einzelnen Strom hervorgerufene Durchflutung, Strombelag und Luftspaltinduktion zu jedem Zeitpunkt räumlich sinusförmig;³ hierfür sorgt die geschickte Wicklungverteilung in den Nuten der Maschine.

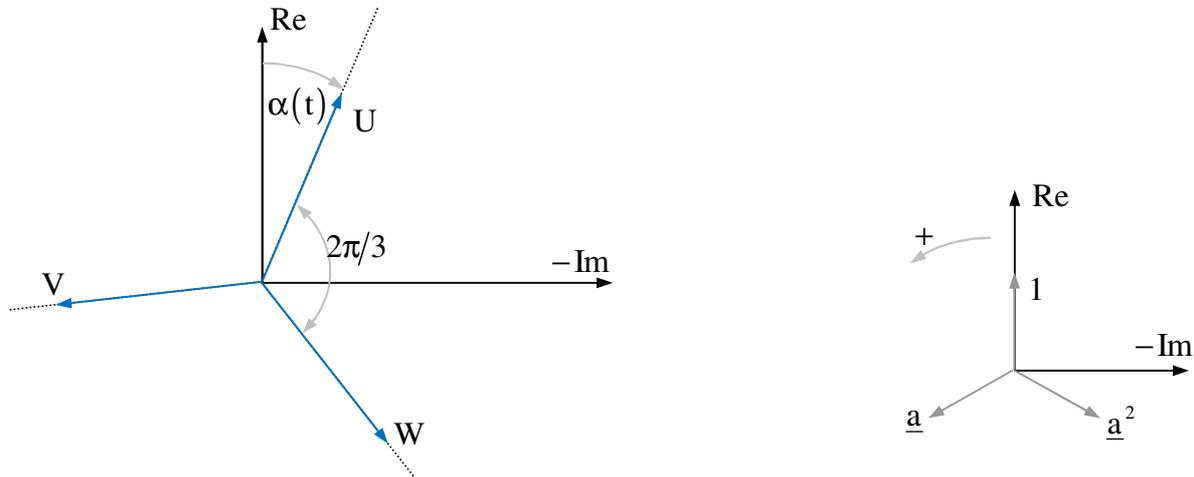
Im Folgenden werden ausschließlich die besonders wichtigen dreisträngigen Systeme betrachtet, die Methode des komplexen Raumzeigers ist aber für beliebige Strangzahlen anwendbar.

² Diese Einschränkung kann aufgeweicht werden: Es reicht, dass in der Maschine ein konstanter Sättigungszustand vorhanden ist; durch Linearisierung im Arbeitspunkt kann wieder die vektorielle Addition durchgeführt werden.

³ Dies gibt einen Hinweis auf die Entstehung des Namens „Raumzeigertheorie“: wesentlich ist die räumlich sinusförmige Verteilung der Wellen in der Maschine, Annahmen über besondere Zeitabhängigkeiten werden nicht gemacht.

3.3 Definition des komplexen Raumzeigers

Die Darstellung der Wellen mit Hilfe von Vektoren soll nun in eine Darstellung mit Hilfe von komplexen Zeigern überführt werden. Hierzu wird eine komplexe Zahlenebene definiert, bei der die reelle Achse mit der Achse der Wicklung „U“ einen (zeitabhängig veränderlichen) Winkel $\alpha(t)$ einschließt.



Nun wird ein komplexer Zeiger (hier am Beispiel der Ströme eines dreisträngigen Systems) wie folgt definiert (und im Folgenden Raumzeiger genannt):⁴

$$\underline{i}(t) = \frac{2}{3} (i_U(t) + \underline{a} \cdot i_V(t) + \underline{a}^2 \cdot i_W(t)) \cdot e^{-j\alpha(t)}$$

Die Multiplikation mit dem Operator $\underline{a} = e^{j\frac{2\pi}{3}}$ bedeutet eine Drehung um 120°. Der Faktor $2/3$ bewirkt eine Normierung des Betrages des Raumzeigers in der Art, dass dieser Betrag bei symmetrischer Speisung der drei Stränge der Amplitude eines Strangstromes entspricht. Um die Schreibweise zu vereinfachen, wird im Folgenden auf die explizite Angabe der Zeitabhängigkeit des Winkels α verzichtet.

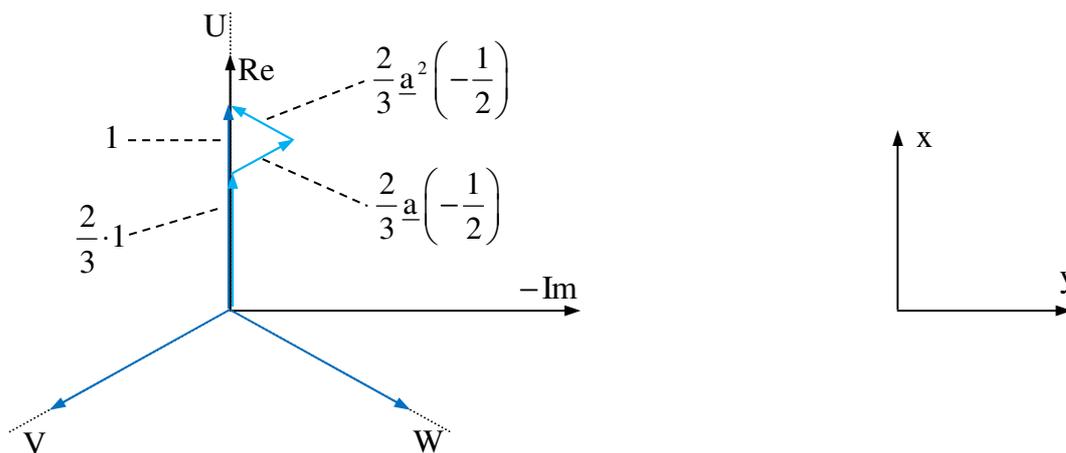
Die Projektion des komplexen Raumzeigers auf die jeweilige Strangwicklungsachse ergibt den Augenblickswert des jeweiligen Strangstromes.

Betrachtet man bei einem symmetrischen 3-phasigen Stromsystem den Zeitpunkt $t=0$, wobei der Strom $i_U(t)$ zu diesem Zeitpunkt maximal sein soll (d.h. die reelle Achse fällt mit der Wicklungsachse des Stranges U zusammen, also gilt $\alpha=0$), so ergibt sich in normierter Darstellung (siehe auch das folgende Bild):

$$i_U(t=0) = 1 \quad \text{und} \quad i_V(t=0) = i_W(t=0) = -\frac{1}{2}$$

⁴ Im Folgenden werden komplexe Raumzeiger, zur Unterscheidung von anderen komplexen Zahlen, mit „Unterpfählen“ gekennzeichnet. Die Rechenregeln für komplexe Zahlen gelten auch hier, die „Unterpfähle“ kennzeichnen nur die besondere Definitionsvorschrift dieser komplexen Zahlen. In der Literatur findet man auch häufig die einfache Unterstreichung als Kennzeichnung für komplexe Raumzeiger.

Für Systeme mit m Strängen gilt für den Raumzeiger: $\underline{i}(t) = \frac{2}{m} \sum_{k=1}^m \underline{\ell}^{k-1} \cdot i_k(t) \cdot e^{-j\alpha}$, mit $\underline{\ell} = e^{j\frac{2\pi}{m}}$. Mit Hilfe dieser Definition lassen sich dann auch für den Rotor einer Käfigläufermaschine entsprechende Raumzeiger einführen.



Spaltet man den komplexen Raumzeiger in Real- und Imaginärteil auf, so erhält man:

$$\begin{aligned}\underline{i}(t) &= \text{Re}\{\underline{i}(t)\} + j \cdot \text{Im}\{\underline{i}(t)\} \\ &= i_x(t) - j \cdot i_y(t)\end{aligned}$$

Aus

$$\underline{i}(t) = \frac{2}{3} \left(i_U(t) + \underline{a} \cdot i_V(t) + \underline{a}^2 \cdot i_W(t) \right) \cdot e^{-j\alpha} = i_x(t) - j \cdot i_y(t)$$

lassen sich nun die beiden Komponenten des Raumzeigers bestimmen:

$$\begin{aligned}i_x(t) &= \frac{2}{3} \left(\cos(-\alpha) \cdot i_U(t) + \cos\left(-\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) \cdot i_V(t) + \cos\left(-\alpha + \frac{4\pi}{3}\right) \cdot i_W(t) \right) \\ &= \frac{2}{3} \left(\cos(\alpha) \cdot i_U(t) + \cos\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) \cdot i_V(t) + \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) \cdot i_W(t) \right)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}i_y(t) &= -\frac{2}{3} \left(\sin(-\alpha) \cdot i_U(t) + \sin\left(-\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) \cdot i_V(t) + \sin\left(-\alpha + \frac{4\pi}{3}\right) \cdot i_W(t) \right) \\ &= \frac{2}{3} \left(\sin(\alpha) \cdot i_U(t) + \sin\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) \cdot i_V(t) + \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) \cdot i_W(t) \right)\end{aligned}$$

Zusammen mit der Gleichung für den Nullstrom $i_0(t)$:⁵

$$i_U(t) + i_V(t) + i_W(t) = 3 \cdot i_0(t)$$

kann nun folgende Matrix-Gleichung aufgestellt werden:

⁵ Der Faktor 3 in der Gleichung für den Nullstrom ist frei gewählt.

$$\begin{bmatrix} i_x(t) \\ i_y(t) \\ i_0(t) \end{bmatrix} = [T_{xy0}] \cdot \begin{bmatrix} i_U(t) \\ i_V(t) \\ i_W(t) \end{bmatrix}, \quad [T_{xy0}] = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \cos\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \sin(\alpha) & \sin\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Ebenso kann die Umkehrung mit Hilfe einer Matrixinversion leicht angegeben werden:

$$\begin{bmatrix} i_U(t) \\ i_V(t) \\ i_W(t) \end{bmatrix} = [T_{xy0}]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} i_x(t) \\ i_y(t) \\ i_0(t) \end{bmatrix}, \quad [T_{xy0}]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 1 \\ \cos\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \\ \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \end{bmatrix}$$

Ist als Sonderfall der Nullstrom zeitunabhängig immer gleich null, wie dies z.B. für im Stern verschaltete Drehstromsysteme ohne angeschlossenen Sternpunkt gilt, so vereinfachen sich die obigen Gleichungen zu:

$$i_0(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad i_W(t) = -i_U(t) - i_V(t)$$

$$\begin{bmatrix} i_x(t) \\ i_y(t) \end{bmatrix} = [T_{xy}] \cdot \begin{bmatrix} i_U(t) \\ i_V(t) \end{bmatrix}, \quad [T_{xy}] = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \cos\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \sin(\alpha) & \sin\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i_U(t) \\ i_V(t) \end{bmatrix} = [T_{xy}]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} i_x(t) \\ i_y(t) \end{bmatrix}, \quad [T_{xy}]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \cos\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix}$$

In gleicher Weise wie der Raumzeiger des Stromes zu Beginn dieses Kapitels, werden nun auch die Raumzeiger für die Spannung und die Flussverkettung eingeführt:

$$\underline{u}(t) = \frac{2}{3} (u_U(t) + \underline{a} \cdot u_V(t) + \underline{a}^2 \cdot u_W(t)) \cdot e^{-j\alpha}$$

$$\underline{\psi}(t) = \frac{2}{3} (\psi_U(t) + \underline{a} \cdot \psi_V(t) + \underline{a}^2 \cdot \psi_W(t)) \cdot e^{-j\alpha}$$

3.4 Spannungsgleichung in Raumzeigerdarstellung

Zunächst werden die drei Spannungsgleichungen des (symmetrischen) dreisträngigen Systems

$$u_U(t) = R \cdot i_U(t) + \frac{d\psi_U(t)}{dt},$$

$$u_V(t) = R \cdot i_V(t) + \frac{d\psi_V(t)}{dt},$$

$$u_W(t) = R \cdot i_W(t) + \frac{d\psi_W(t)}{dt}$$

mit $\frac{2}{3} \cdot e^{-j\alpha}$, $\frac{2}{3} \cdot \underline{a} \cdot e^{-j\alpha}$ bzw. $\frac{2}{3} \cdot \underline{a}^2 \cdot e^{-j\alpha}$ multipliziert und dann diese Gleichungen addiert. Mit Hilfe der folgenden Beziehung für das zeitliche Differential der Flussverkettung

$$\begin{aligned} \frac{d\psi(t)}{dt} &= \frac{2}{3} \left(\frac{d}{dt} \psi_U(t) + \underline{a} \cdot \frac{d}{dt} \psi_V(t) + \underline{a}^2 \cdot \frac{d}{dt} \psi_W(t) \right) \cdot e^{-j\alpha} + \\ &\quad \frac{2}{3} (\psi_U(t) + \underline{a} \cdot \psi_V(t) + \underline{a}^2 \cdot \psi_W(t)) \cdot (-j) \cdot \frac{d\alpha}{dt} \cdot e^{-j\alpha} \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{d}{dt} \psi_U(t) + \underline{a} \cdot \frac{d}{dt} \psi_V(t) + \underline{a}^2 \cdot \frac{d}{dt} \psi_W(t) \right) \cdot e^{-j\alpha} - j \cdot \frac{d\alpha}{dt} \cdot \underline{\psi}(t) \\ \Rightarrow \frac{2}{3} \left(\frac{d}{dt} \psi_U(t) + \underline{a} \cdot \frac{d}{dt} \psi_V(t) + \underline{a}^2 \cdot \frac{d}{dt} \psi_W(t) \right) \cdot e^{-j\alpha} &= \frac{d\underline{\psi}(t)}{dt} + j \cdot \frac{d\alpha}{dt} \cdot \underline{\psi}(t) \end{aligned}$$

ergibt sich dann die Spannungsgleichung in Raumzeigerdarstellung:⁶

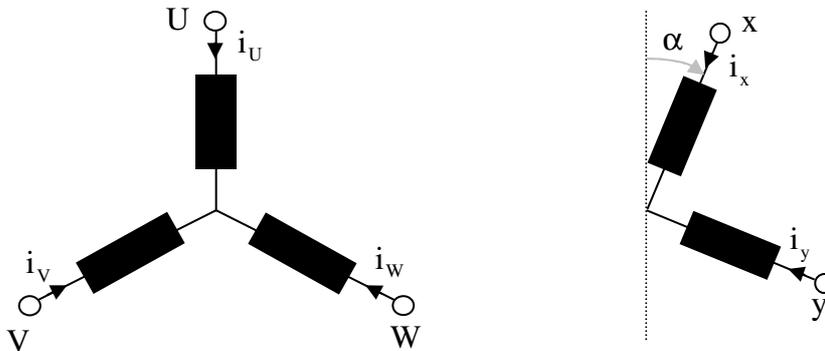
$$\underline{u}(t) = R \cdot \underline{i}(t) + \frac{d\underline{\psi}(t)}{dt} + j \cdot \frac{d\alpha}{dt} \cdot \underline{\psi}(t)$$

Bei dieser Herleitung ist wesentlich, dass die Linearkombination der drei allgemein gültigen Spannungsgleichungen keine Einschränkung hinsichtlich der räumlichen Verteilung der Felder oder der Zeitfunktionen der Ströme notwendig macht.

⁶ Für den Sonderfall $\alpha(t) = \text{const.}$, d.h. die reelle Achse des Koordinatensystems steht zeitunabhängig unter einem festen Winkel zur Achse der Strangwicklung „U“, gilt: $\underline{u}(t) = R \cdot \underline{i}(t) + \frac{d\underline{\psi}(t)}{dt}$. Dies gilt also auch für den Fall, dass die reelle Achse des Koordinatensystems mit der Achse der Strangwicklung „U“ zusammenfällt, d.h. für $\alpha(t) = 0$.

3.5 Interpretation der Raumzeigerdarstellung

Wie in den vorangegangenen Kapiteln gezeigt wurde, kann der Raumzeiger aus den Größen der drei Stränge berechnet werden, oder als Summe aus Real- und Imaginärteil. Dies bedeutet aber mit anderen Worten, dass das dreisträngige System in ein zweisträngiges System umgerechnet werden kann, wie es im folgenden Bild schematisch dargestellt ist



Mit Hilfe des als beliebig eingeführten Winkels α ist es außerdem gelungen, eine Umrechnung (Transformation) auf ein mit beliebiger Winkelgeschwindigkeit rotierendes Koordinatensystem durchzuführen: Die Zeitabhängigkeit des Winkels α ist nicht eingeschränkt worden.

Da sich die Ströme (und die Spannungen und Flussverkettungen) eines beliebigen m -strängigen Systems in zwei (rechtwinkligen) Koordinaten darstellen lassen, ist die Raumzeigermethode auf beliebige Strangzahlen anwendbar. Die Strangzahlen von Stator und Rotor dürfen auch unterschiedlich sein (ein Beispiel hierfür ist die Käfigläufer-Asynchronmaschine).

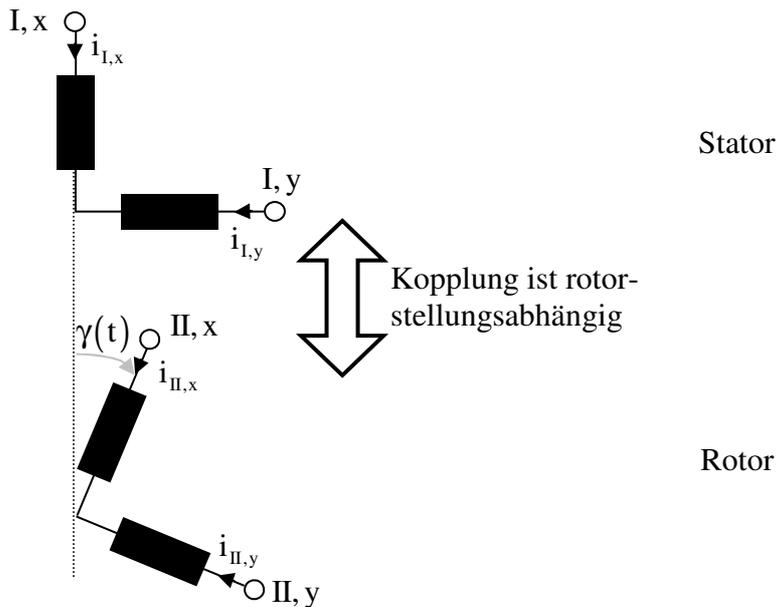
Insgesamt ergibt sich also bei Anwendung des in Kapitel 3.3 definierten Raumzeigers eine Transformation

- aus dem m -strängigen System in feststehenden Koordinaten
- in ein 2-strängiges System in (beliebig) rotierenden Koordinaten.

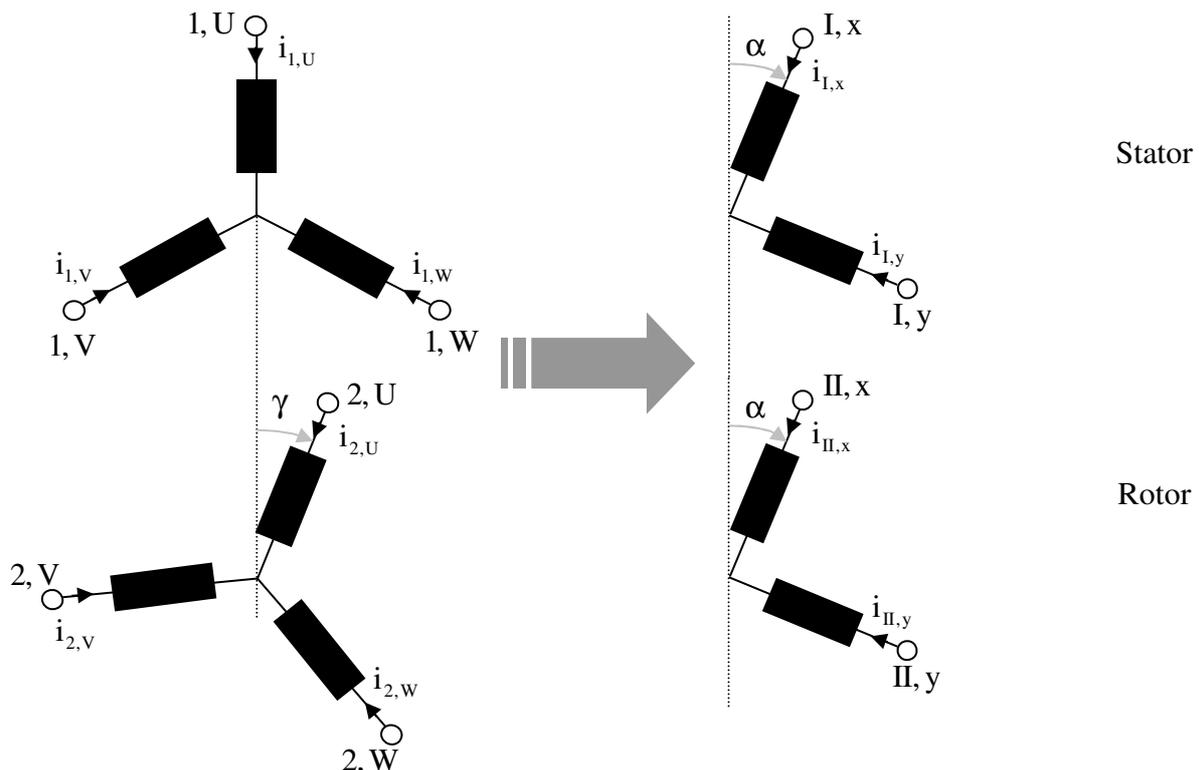
3.6 Gekoppelte Systeme

Betrachtet man je ein dreisträngiges System von Stator (Index „I“ bzw. „I“) und Rotor (Index „2“ bzw. „II“), so muss noch die räumliche Lage des Rotorsystems gegenüber dem Statorsystem mit Hilfe des zeitabhängigen Winkels $\gamma(t)$ berücksichtigt werden. Hierbei ist vorausgesetzt, dass die Rotorgrößen bereits auf die Statorgrößen umgerechnet sind (auf eine besondere Kennzeichnung wird aus Gründen der Schreibvereinfachung verzichtet).

Die Kopplung der beiden Systeme geschieht über die Flussverkettungen. Wie am folgenden Bild (Beispiel für $\alpha = 0$) deutlich wird, ist die Kopplung über die Flussverkettungen durch den zeitabhängig veränderlichen Winkel $\gamma(t)$ rotorstellungsabhängig.



Führen wir jetzt für die Raumzeiger des Rotors eine weitere Drehung mit $e^{j\gamma}$ ein, so sind beide Systeme auf ein gemeinsam rotierendes Koordinatensystem transformiert:



Die Raumzeiger des Rotorsystems lauten dann:

$$\underline{i}_{II}(t) = \frac{2}{3}(\underline{i}_{2,U}(t) + \underline{a} \cdot \underline{i}_{2,V}(t) + \underline{a}^2 \cdot \underline{i}_{2,W}(t)) \cdot e^{-j(\alpha-\gamma)}$$

$$\underline{u}_{II}(t) = \frac{2}{3}(\underline{u}_{2,U}(t) + \underline{a} \cdot \underline{u}_{2,V}(t) + \underline{a}^2 \cdot \underline{u}_{2,W}(t)) \cdot e^{-j(\alpha-\gamma)}$$

$$\underline{\psi}_{II}(t) = \frac{2}{3}(\underline{\psi}_{2,U}(t) + \underline{a} \cdot \underline{\psi}_{2,V}(t) + \underline{a}^2 \cdot \underline{\psi}_{2,W}(t)) \cdot e^{-j(\alpha-\gamma)}$$

Während die Raumzeiger des Statorsystems gegenüber der Definition aus Kapitel 3.3 lediglich die entsprechenden Indices erhalten:

$$\underline{i}_I(t) = \frac{2}{3}(\underline{i}_{1,U}(t) + \underline{a} \cdot \underline{i}_{1,V}(t) + \underline{a}^2 \cdot \underline{i}_{1,W}(t)) \cdot e^{-j\alpha}$$

$$\underline{u}_I(t) = \frac{2}{3}(\underline{u}_{1,U}(t) + \underline{a} \cdot \underline{u}_{1,V}(t) + \underline{a}^2 \cdot \underline{u}_{1,W}(t)) \cdot e^{-j\alpha}$$

$$\underline{\psi}_I(t) = \frac{2}{3}(\underline{\psi}_{1,U}(t) + \underline{a} \cdot \underline{\psi}_{1,V}(t) + \underline{a}^2 \cdot \underline{\psi}_{1,W}(t)) \cdot e^{-j\alpha}$$

Mit Hilfe der Herleitung aus Kapitel 3.4 lauten die Stator- und Rotorspannungsgleichungen in Raumzeigerdarstellung:

$$\underline{u}_I(t) = R_I \cdot \underline{i}_I(t) + \frac{d\underline{\psi}_I(t)}{dt} + j \cdot \frac{d\alpha}{dt} \cdot \underline{\psi}_I(t)$$

und

$$\underline{u}_{II}(t) = R_{II} \cdot \underline{i}_{II}(t) + \frac{d\underline{\psi}_{II}(t)}{dt} + j \cdot \frac{d(\alpha-\gamma)}{dt} \cdot \underline{\psi}_{II}(t)$$

Mit der Kreisfrequenz des Koordinatensystems $\omega_K = d\alpha/dt$ und der mechanischen Kreisfrequenz des Rotors $\omega_m = d\gamma/dt$ werden die Stator- und Rotorspannungsgleichung in Raumzeigerdarstellung zu:⁷

$$\underline{u}_I(t) = R_I \cdot \underline{i}_I(t) + \frac{d\underline{\psi}_I(t)}{dt} + j \cdot \omega_K \cdot \underline{\psi}_I(t)$$

$$\underline{u}_{II}(t) = R_{II} \cdot \underline{i}_{II}(t) + \frac{d\underline{\psi}_{II}(t)}{dt} + j \cdot (\omega_K - \omega_m) \cdot \underline{\psi}_{II}(t)$$

Es ist zu betonen, dass bezüglich der Zeitabhängigkeiten der Winkel $\alpha(t)$ und $\gamma(t)$ keine Einschränkungen gemacht wurden. Demzufolge können auch die Kreisfrequenzen ω_K und ω_m beliebige Zeitabhängigkeiten aufweisen. Dies ist wesentlich für die nachfolgende Berechnung dynamischer Ausgleichsvorgänge. Bei den Kreisfrequenzen wird im Folgenden (wie bereits für die Winkel α und γ) aus Gründen der Schreibvereinfachung auf die explizite Angabe der Zeitabhängigkeit verzichtet.

⁷ Es ist zu beachten, dass der Winkel γ die Relativbewegung zwischen Stator und Rotor in elektrischen Winkeln beschreibt (Relativbewegung der magnetischen Flüsse). Der Zusammenhang der mechanischen Kreisfrequenz mit der Rotordrehzahl ergibt sich mit Hilfe der Polpaarzahl p : $\omega_m = p\Omega = 2\pi p n$, mit n als mechanischer Drehzahl.

3.7 Leistung in Raumzeigerdarstellung

Die augenblickliche elektrische Leistung der Maschine kann aus der Summe der Augenblicksleistungen der drei Stränge berechnet werden:

$$p(t) = u_{1,U}(t) \cdot i_{1,U}(t) + u_{1,V}(t) \cdot i_{1,V}(t) + u_{1,W}(t) \cdot i_{1,W}(t) + \\ u_{2,U}(t) \cdot i_{2,U}(t) + u_{2,V}(t) \cdot i_{2,V}(t) + u_{2,W}(t) \cdot i_{2,W}(t)$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{\underline{u}_1(t) \cdot \underline{i}_1^*(t)\} &= \operatorname{Re}\left\{\left[\frac{2}{3}(u_{1,U}(t) + \underline{a} \cdot u_{1,V}(t) + \underline{a}^2 \cdot u_{1,W}(t)) \cdot e^{-j\alpha}\right] \cdot \right. \\ &\quad \left. \left[\frac{2}{3}(i_{1,U}(t) + \underline{a} \cdot i_{1,V}(t) + \underline{a}^2 \cdot i_{1,W}(t)) \cdot e^{-j\alpha}\right]^*\right\} \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \operatorname{Re}\{u_{1,U}(t) \cdot i_{1,U}(t) + u_{1,V}(t) \cdot i_{1,V}(t) + u_{1,W}(t) \cdot i_{1,W}(t) + \\ &\quad u_{1,U}(t) \cdot [\underline{a}^* \cdot i_{1,V}(t) + (\underline{a}^2)^* \cdot i_{1,W}(t)] + \\ &\quad u_{1,V}(t) \cdot [\underline{a} \cdot i_{1,U}(t) + \underline{a} \cdot (\underline{a}^2)^* \cdot i_{1,W}(t)] + \\ &\quad u_{1,W}(t) \cdot [\underline{a}^2 \cdot i_{1,U}(t) + \underline{a}^2 \cdot \underline{a}^* \cdot i_{1,V}(t)]\} \end{aligned}$$

Mit

$$\operatorname{Re}\{\underline{a}\} = \operatorname{Re}\left\{e^{j\frac{2\pi}{3}}\right\} = \operatorname{Re}\{\underline{a}^2\} = \operatorname{Re}\{\underline{a}^*\} = \operatorname{Re}\{(\underline{a}^2)^*\} = -\frac{1}{2}$$

folgt weiter

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{\underline{u}_1(t) \cdot \underline{i}_1^*(t)\} &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left[u_{1,U}(t) \cdot i_{1,U}(t) + u_{1,V}(t) \cdot i_{1,V}(t) + u_{1,W}(t) \cdot i_{1,W}(t) + \right. \\ &\quad \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot u_{1,U}(t) \cdot (i_{1,V}(t) + i_{1,W}(t)) + \\ &\quad \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot u_{1,V}(t) \cdot (i_{1,U}(t) + i_{1,W}(t)) + \\ &\quad \left. \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot u_{1,W}(t) \cdot (i_{1,U}(t) + i_{1,V}(t)) \right] \end{aligned}$$

Gilt für den Nullstrom $i_0(t) = 0$, folgt weiter⁸

⁸ Es kann gezeigt werden, dass die folgende Herleitung auch für den allgemeinen Fall $i_0(t) \neq 0$ gültig ist. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird an dieser Stelle auf die allgemeine Herleitung verzichtet. Als Hinweis soll dienen, dass der Nullstrom wegen $i_0 + \underline{a} \cdot i_0 + \underline{a}^2 \cdot i_0 = 0$ keinen Beitrag zum Raumzeiger liefert.

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{\underline{u}_I(t) \cdot \underline{i}_I^*(t)\} &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left[\underline{u}_{1,U}(t) \cdot \underline{i}_{1,U}(t) + \underline{u}_{1,V}(t) \cdot \underline{i}_{1,V}(t) + \underline{u}_{1,W}(t) \cdot \underline{i}_{1,W}(t) + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2}(\underline{u}_{1,U}(t) \cdot \underline{i}_{1,U}(t) + \underline{u}_{1,V}(t) \cdot \underline{i}_{1,V}(t) + \underline{u}_{1,W}(t) \cdot \underline{i}_{1,W}(t)) \right] \\ &= \left(\frac{2}{3}\right) \cdot (\underline{u}_{1,U}(t) \cdot \underline{i}_{1,U}(t) + \underline{u}_{1,V}(t) \cdot \underline{i}_{1,V}(t) + \underline{u}_{1,W}(t) \cdot \underline{i}_{1,W}(t)) \end{aligned}$$

Durch eine analoge Rechnung für die Rotorgößen und Vergleich mit der ersten Gleichung dieses Kapitels erhält man die elektrische Leistung in Raumzeigerdarstellung:

$$p(t) = \frac{3}{2} \operatorname{Re}\{\underline{u}_I(t) \cdot \underline{i}_I^*(t) + \underline{u}_{II}(t) \cdot \underline{i}_{II}^*(t)\}$$

Nun werden in diese Gleichung die Spannungsgleichungen aus Kapitel 3.6 eingesetzt:

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{3}{2} \operatorname{Re}\left\{ \left[\underline{R}_I \cdot \underline{i}_I(t) + \frac{d\underline{\psi}_I(t)}{dt} + j \cdot \omega_K \cdot \underline{\psi}_I(t) \right] \cdot \underline{i}_I^*(t) + \right. \\ &\quad \left. \left[\underline{R}_{II} \cdot \underline{i}_{II}(t) + \frac{d\underline{\psi}_{II}(t)}{dt} + j \cdot (\omega_K - \omega_m) \cdot \underline{\psi}_{II}(t) \right] \cdot \underline{i}_{II}^*(t) \right\} \\ &= \frac{3}{2} \operatorname{Re}\left\{ \left[\underline{R}_I \cdot \underline{i}_I(t) \cdot \underline{i}_I^*(t) + \underline{R}_{II} \cdot \underline{i}_{II}(t) \cdot \underline{i}_{II}^*(t) \right] + \right. \\ &\quad \left[\frac{d\underline{\psi}_I(t)}{dt} \cdot \underline{i}_I^*(t) + \frac{d\underline{\psi}_{II}(t)}{dt} \cdot \underline{i}_{II}^*(t) \right] + \\ &\quad \left. j \cdot \omega_K \cdot \left[\underline{\psi}_I(t) \cdot \underline{i}_I^*(t) + \underline{\psi}_{II}(t) \cdot \underline{i}_{II}^*(t) \right] - j \cdot \omega_m \cdot \underline{\psi}_{II}(t) \cdot \underline{i}_{II}^*(t) \right\} \end{aligned}$$

Stellt man die Flussverkettungen mit Hilfe von Selbst- und Gegeninduktivitäten (mit $L_{I,II} = L_{II,I}$) dar, folgt

$$\begin{aligned} &\underline{\psi}_I(t) \cdot \underline{i}_I^*(t) + \underline{\psi}_{II}(t) \cdot \underline{i}_{II}^*(t) \\ &= \left[L_I \cdot \underline{i}_I(t) + L_{I,II} \cdot \underline{i}_{II}(t) \right] \cdot \underline{i}_I^*(t) + \left[L_{II} \cdot \underline{i}_{II}(t) + L_{I,II} \cdot \underline{i}_I(t) \right] \cdot \underline{i}_{II}^*(t) \\ &= L_I \cdot \underline{i}_I(t) \cdot \underline{i}_I^*(t) + L_{II} \cdot \underline{i}_{II}(t) \cdot \underline{i}_{II}^*(t) + L_{I,II} \cdot \left[\underline{i}_{II}(t) \cdot \underline{i}_I^*(t) + \underline{i}_I(t) \cdot \underline{i}_{II}^*(t) \right] \\ &= L_I \cdot \underline{i}_I(t) \cdot \underline{i}_I^*(t) + L_{II} \cdot \underline{i}_{II}(t) \cdot \underline{i}_{II}^*(t) + L_{I,II} \cdot \left[\underline{i}_{II}(t) \cdot \underline{i}_I^*(t) + (\underline{i}_{II}(t) \cdot \underline{i}_I^*(t))^* \right] \end{aligned}$$

Damit ist dieser Ausdruck immer reell. Es folgt

$$\operatorname{Re}\left\{ j \cdot \omega_K \cdot \left[\underline{\psi}_I(t) \cdot \underline{i}_I^*(t) + \underline{\psi}_{II}(t) \cdot \underline{i}_{II}^*(t) \right] \right\} = 0$$

Die Leistung in Raumzeigerdarstellung vereinfacht sich also zu

$$p(t) = \frac{3}{2} \operatorname{Re} \left\{ \left[R_I \cdot \underline{i}_I(t) \cdot \underline{i}_I^*(t) + R_{II} \cdot \underline{i}_{II}(t) \cdot \underline{i}_{II}^*(t) \right] + \left[\frac{d\underline{\psi}_I(t)}{dt} \cdot \underline{i}_I^*(t) + \frac{d\underline{\psi}_{II}(t)}{dt} \cdot \underline{i}_{II}^*(t) \right] - j \cdot \omega_m \cdot \underline{\psi}_{II}(t) \cdot \underline{i}_{II}^*(t) \right\}$$

In dieser Gleichung lassen sich drei Anteile der Leistung separieren:

1. Die (in den Widerständen von Stator und Rotor) umgesetzte Verlustleistung:

$$p_v(t) = \frac{3}{2} \operatorname{Re} \left\{ R_I \cdot \underline{i}_I(t) \cdot \underline{i}_I^*(t) + R_{II} \cdot \underline{i}_{II}(t) \cdot \underline{i}_{II}^*(t) \right\}$$

2. Die Änderung der gespeicherten magnetischen Energie:

$$p_\mu(t) = \frac{3}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{d\underline{\psi}_I(t)}{dt} \cdot \underline{i}_I^*(t) + \frac{d\underline{\psi}_{II}(t)}{dt} \cdot \underline{i}_{II}^*(t) \right\}$$

3. Die mechanisch umgesetzte Leistung:

$$p_m(t) = -\frac{3}{2} \operatorname{Re} \left\{ j \cdot \omega_m \cdot \underline{\psi}_{II}(t) \cdot \underline{i}_{II}^*(t) \right\}$$

3.8 Ersatzschaltbildelemente

1. Widerstände

Für die Ohmschen Verluste gilt:

$$\begin{aligned} p_v(t) &= R_1 \cdot i_{1,U}^2(t) + R_1 \cdot i_{1,V}^2(t) + R_1 \cdot i_{1,W}^2(t) + \\ &\quad R'_2 \cdot i_{2,U}^2(t) + R'_2 \cdot i_{2,V}^2(t) + R'_2 \cdot i_{2,W}^2(t) \\ &= \frac{3}{2} \operatorname{Re} \{ R_I \cdot \underline{i}_I(t) \cdot \underline{i}_I^*(t) + R_{II} \cdot \underline{i}_{II}(t) \cdot \underline{i}_{II}^*(t) \} \end{aligned}$$

Betrachtet man zunächst nur den Anteil der Statorverluste, so folgt:

$$R_1 [i_{1,U}^2(t) + i_{1,V}^2(t) + i_{1,W}^2(t)] = \frac{3}{2} \operatorname{Re} \{ R_I \cdot \underline{i}_I(t) \cdot \underline{i}_I^*(t) \}$$

Durch Einsetzen des Statorstrom-Raumzeigers erhält man:

$$R_1 [i_{1,U}^2(t) + i_{1,V}^2(t) + i_{1,W}^2(t)] = \frac{3}{2} R_I \cdot \operatorname{Re} \left\{ \frac{2}{3} [\underline{i}_{1,U}(t) + \underline{a} \cdot \underline{i}_{1,V}(t) + \underline{a}^2 \cdot \underline{i}_{1,W}(t)] \cdot e^{-j\alpha(t)} \cdot \frac{2}{3} [\underline{i}_{1,U}(t) + \underline{a} \cdot \underline{i}_{1,V}(t) + \underline{a}^2 \cdot \underline{i}_{1,W}(t)]^* \cdot e^{j\alpha(t)} \right\}$$

Mit einer analogen Rechnung wie in Kapitel 3.7 gilt dann:

$$R_1 [i_{1,U}^2(t) + i_{1,V}^2(t) + i_{1,W}^2(t)] = \frac{3}{2} R_I \cdot \frac{2}{3} [i_{1,U}^2(t) + i_{1,V}^2(t) + i_{1,W}^2(t)]$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man schließlich

$$R_1 = R_I$$

Mit Hilfe einer analogen Rechnung folgt dann auch⁹

$$R_2 = R_{II}$$

Diese Rechnung zeigt, dass die Transformation in Raumzeigerdarstellung widerstandsinvariant und bzgl. der Ohmschen Verluste leistungsinvariant ist.

2. Induktivitäten

Betrachtet man zunächst nur die Flussverketzung des Stranges „1,U“ (siehe auch das Bild in Kapitel 3.6), so folgt mit L_{11} als Statorselbstinduktivität und $L_{1\sigma}$ als Statorstreuinduktivität:¹⁰

⁹ Wie üblich sind die Rotorparameter der Maschine auf die Statorseite umgerechnet (auf die Darstellung mit gestrichelten Größen wurde aus Gründen der Schreibvereinfachung verzichtet). Diese Umrechnung ist z.B. in der Vorlesung „Elektrische Maschinen und Antriebe“, Kapitel 4.1 für die Asynchronmaschine durchgeführt.

¹⁰ Die Umrechnung von Rotorgrößen auf Statorgrößen wird analog zu Kapitel 4.1 der Vorlesung „Elektrische Maschinen und Antriebe“ durchgeführt; diese Umrechnung ist hier vorausgesetzt (siehe den Beginn des Kapitels 3.6). Der Unterschied zur Vorlesung „Elektrische Maschinen und Antriebe“ ist, dass hier nicht mehr der stationäre Zustand mit Hilfe der einsträngigen komplexen Wechselstromrechnung betrachtet wird, sondern dass alle Zeitabhängigkeiten in allen Strängen von Stator und Rotor explizit berücksichtigt werden.

$$\begin{aligned} \psi_{1,U}(t) = & [L_{11} + L_{1\sigma}] \cdot i_{1,U}(t) + L_{11} \cdot i_{1,V}(t) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + L_{11} \cdot i_{1,W}(t) \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \\ & \left[L_{11} \cdot i_{2,U}(t) + L_{11} \cdot i_{2,V}(t) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + L_{11} \cdot i_{2,W}(t) \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right] \cdot e^{j\gamma} \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck kann wie folgt umgeformt werden:

$$\begin{aligned} \psi_{1,U}(t) = & L_{1\sigma} \cdot i_{1,U}(t) + L_{11} \cdot \left(i_{1,U}(t) - \frac{1}{2} \cdot i_{1,V}(t) - \frac{1}{2} \cdot i_{1,W}(t) \right) + \\ & L_{11} \cdot \left(i_{2,U}(t) - \frac{1}{2} \cdot i_{2,V}(t) - \frac{1}{2} \cdot i_{2,W}(t) \right) \cdot e^{j\gamma} \end{aligned}$$

Mit analogen Herleitungen für die Flussverkettungen der anderen Stränge und dem Raumzeiger der Statorflussverkettung aus Kapitel 3.6 folgt:

$$\begin{aligned} \underline{\psi}_I(t) = & \frac{2}{3} (\psi_{1,U}(t) + \underline{a} \cdot \psi_{1,V}(t) + \underline{a}^2 \cdot \psi_{1,W}(t)) \cdot e^{-j\alpha} \\ = & \frac{2}{3} \cdot L_{1\sigma} \cdot (i_{1,U}(t) + \underline{a} \cdot i_{1,V}(t) + \underline{a}^2 \cdot i_{1,W}(t)) \cdot e^{-j\alpha} + \\ & \frac{2}{3} \cdot L_{11} \cdot \left[(i_{1,U}(t) + \underline{a} \cdot i_{1,V}(t) + \underline{a}^2 \cdot i_{1,W}(t)) - \right. \\ & \quad \left. \frac{1}{2} (i_{1,V}(t) + \underline{a} \cdot i_{1,W}(t) + \underline{a}^2 \cdot i_{1,U}(t)) - \right. \\ & \quad \left. \frac{1}{2} (i_{1,W}(t) + \underline{a} \cdot i_{1,U}(t) + \underline{a}^2 \cdot i_{1,V}(t)) \right] \cdot e^{-j\alpha} + \\ & \frac{2}{3} \cdot L_{11} \cdot \left[(i_{2,U}(t) + \underline{a} \cdot i_{2,V}(t) + \underline{a}^2 \cdot i_{2,W}(t)) - \right. \\ & \quad \left. \frac{1}{2} (i_{2,V}(t) + \underline{a} \cdot i_{2,W}(t) + \underline{a}^2 \cdot i_{2,U}(t)) - \right. \\ & \quad \left. \frac{1}{2} (i_{2,W}(t) + \underline{a} \cdot i_{2,U}(t) + \underline{a}^2 \cdot i_{2,V}(t)) \right] \cdot e^{-j\alpha} e^{j\gamma} \end{aligned}$$

Einsetzen von Stator- und Rotorstromraumzeiger aus Kapitel 3.6 ergibt:

$$\begin{aligned} \underline{\psi}_I(t) = & L_{1\sigma} \cdot \underline{i}_I(t) + L_{11} \cdot \left[\underline{i}_I(t) - \frac{1}{2} \cdot \underline{a}^2 \cdot \underline{i}_I(t) - \frac{1}{2} \cdot \underline{a} \cdot \underline{i}_I(t) \right] + \\ & L_{11} \cdot \left[\underline{i}_{II}(t) - \frac{1}{2} \cdot \underline{a}^2 \cdot \underline{i}_{II}(t) - \frac{1}{2} \cdot \underline{a} \cdot \underline{i}_{II}(t) \right] \end{aligned}$$

Mit $\underline{a} + \underline{a}^2 = -1$ und der Statorhauptinduktivität $L_{1h} = 3/2 \cdot L_{11}$ folgt weiter:¹¹

$$\begin{aligned} \underline{\psi}_I(t) = & L_{1\sigma} \cdot \underline{i}_I(t) + \frac{3}{2} \cdot L_{11} \cdot \underline{i}_I(t) + \frac{3}{2} \cdot L_{11} \cdot \underline{i}_{II}(t) \\ = & L_{1\sigma} \cdot \underline{i}_I(t) + L_{1h} \cdot \underline{i}_I(t) + L_{1h} \cdot \underline{i}_{II}(t) \end{aligned}$$

¹¹ Zur Berechnung der Statorhauptinduktivität, die auch Drehfeldinduktivität genannt wird, siehe die Vorlesung „Elektrische Maschinen und Antriebe“, Kapitel 4.1.

Führt man nun noch die Statorinduktivität $L_1 = L_{1h} + L_{1\sigma}$ ein, so folgt:

$$\underline{\psi}_I(t) = L_1 \cdot \underline{i}_I(t) + L_{1h} \cdot \underline{i}_{II}(t)$$

Analog folgt für den Raumzeiger der Rotorflussverkettung (nach Umrechnung der Rotorgrößen auf die Statorgrößen):

$$\underline{\psi}_{II}(t) = L_2 \cdot \underline{i}_{II}(t) + L_{1h} \cdot \underline{i}_I(t)$$

wobei $L_2 = L_{1h} + L_{2\sigma}$ gilt.

3. Zusammenfassung der Ergebnisse

Die Umrechnung der Maschinenparameter von der realen (3-strängigen) Maschine auf die Raumzeigerdarstellung geschieht also wie folgt:

Parameter	Reale Maschine (Rotorgrößen auf Stator- seite umgerechnet)	Raumzeigerdarstellung (Rotorgrößen auf Stator- seite umgerechnet)
Statorwiderstand	R_1	$R_I = R_1$
Statorstreuinduktivität	$L_{1\sigma}$	$L_{1\sigma}$
Statorhauptinduktivität	L_{1h}	L_{1h}
Statorinduktivität	$L_1 = L_{1h} + L_{1\sigma}$	$L_1 = L_{1h} + L_{1\sigma}$
Rotorwiderstand	R_2	$R_{II} = R_2$
Rotorstreuinduktivität	$L_{2\sigma}$	$L_{2\sigma}$
Rotorinduktivität	$L_2 = L_{1h} + L_{2\sigma}$	$L_2 = L_{1h} + L_{2\sigma}$

Die Komponenten der Maschine in Raumzeigerdarstellung sind also identisch mit den Komponenten, wie sie bereits für das stationäre Verhalten hergeleitet wurden. Die Transformation ist also widerstands- und induktivitätsinvariant.

3.9 Drehmoment in Raumzeigerdarstellung

Bei einer beliebigen Polpaarzahl p der Maschine kann die mechanische Leistung aus Drehmoment und Kreisfrequenz wie folgt berechnet werden:

$$p_m(t) = T(t) \cdot \Omega = T(t) \cdot \frac{\omega_m}{p} = T(t) \cdot \frac{dy/dt}{p}, \quad \Omega(t) = 2\pi \cdot n(t)$$

Mit Hilfe der Gleichung für die mechanische Leistung aus Kapitel 3.7 folgt dann für das Drehmoment in Raumzeigerdarstellung:

$$T(t) = -\frac{3}{2} p \cdot \operatorname{Re} \left\{ j \cdot \underline{\psi}_{II}(t) \cdot \underline{i}_{II}^*(t) \right\}$$

Diese Gleichung wird nun noch etwas umgeformt, um das Drehmoment in Statorgrößen auszudrücken. Mit

$$\underline{\psi}_{II}(t) = L_{2\sigma} \cdot \underline{i}_{II}(t) + L_{1h} \cdot \underline{i}_{II}(t) + L_{1h} \cdot \underline{i}_I(t)$$

und

$$\operatorname{Re} \left\{ j \cdot \underline{i}_{II}(t) \cdot \underline{i}_{II}^*(t) \right\} = 0$$

folgt

$$T(t) = -\frac{3}{2} p \cdot \operatorname{Re} \left\{ j \cdot L_{1h} \cdot \underline{i}_I(t) \cdot \underline{i}_{II}^*(t) \right\}$$

Da $\underline{i}_I(t) \cdot \underline{i}_I^*(t)$ reell ist, folgt weiter

$$\begin{aligned} T(t) &= -\frac{3}{2} p \cdot \operatorname{Re} \left\{ j \cdot L_{1h} \cdot \underline{i}_I(t) \cdot \underline{i}_{II}^*(t) + j \cdot (L_{1h} + L_{1\sigma}) \cdot \underline{i}_I(t) \cdot \underline{i}_I^*(t) \right\} \\ &= -\frac{3}{2} p \cdot \operatorname{Re} \left\{ j \cdot \left[L_{1h} \cdot \underline{i}_{II}^*(t) + (L_{1h} + L_{1\sigma}) \cdot \underline{i}_I^*(t) \right] \cdot \underline{i}_I(t) \right\} \\ &= -\frac{3}{2} p \cdot \operatorname{Re} \left\{ j \cdot \underline{i}_I(t) \cdot \underline{\psi}_I^*(t) \right\} \\ &= \frac{3}{2} p \cdot \operatorname{Im} \left\{ \underline{i}_I(t) \cdot \underline{\psi}_I^*(t) \right\} \end{aligned}$$

Hinweis: Das Drehmoment kann auch als Kreuzprodukt aus Flussverkettung und Strom geschrieben werden, diese Herleitung ist im Anhang 9.1 durchgeführt.

3.10 Besondere Koordinatensysteme

Bei Drehstrommaschinen ist es häufig notwendig, die Berechnungen in verschiedenen Koordinatensystemen durchzuführen. Beispiele hierfür sind:

- Erreichung konstanter Gegeninduktivitäten bei der Schenkelpolsynchronmaschine
→ hier bietet sich die Berechnung in einem rotorfesten Koordinatensystem an;
- Feldorientierte Regelung bei Asynchronmaschinen
→ hier ist die Verwendung eines feldorientierten Koordinatensystems vorteilhaft.

Aus diesem Grund war die allgemeine Transformation auf ein mit beliebiger Winkelgeschwindigkeit $\omega_k = \frac{d\alpha}{dt}$ rotierendes Koordinatensystem sehr nützlich. Das Gleichungssystem ist allgemein anwendbar und je nach Maschinenart oder Zweckmäßigkeit kann nun $\alpha(t)$ frei gewählt werden, z.B.:

- $\alpha(t) = 0$ ruhendes Koordinatensystem (statorfest), die Achsen „x“ und „y“ des Koordinatensystems werden in diesem Fall in der Literatur häufig mit „ α “ und „ β “ bezeichnet;
- $\omega_k = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\gamma}{dt} = \omega_m$ mit der Läuferdrehzahl rotierendes Koordinatensystem (rotorfest), die Achsen „x“ und „y“ des Koordinatensystems werden in diesem Fall in der Literatur häufig mit „q“ und „d“ bezeichnet;
- $\omega_k = \frac{d\alpha}{dt} = \omega_1$ mit der Synchrondrehzahl rotierendes Koordinatensystem;
- $\omega_k = \frac{d\alpha}{dt} = \omega_\mu$ mit dem Luftspaltfluss rotierendes Koordinatensystem, auch hierfür werden die Achsen „x“ und „y“ des Koordinatensystems in der Literatur häufig mit „q“ und „d“ bezeichnet.

3.11 Zusammenhang zwischen Raumzeigertheorie und Zweiachsentheorie

Außer der in den vorangegangenen Kapiteln beschriebenen Raumzeigertheorie ist auch die Zweiachsentheorie zur Berechnung dynamischer Vorgänge in elektrischen Maschinen bekannt.

Beide Theorien sind sehr eng miteinander verwandt, insbesondere besitzen beide Theorien die selben Voraussetzungen, die für die Anwendung erfüllt sein müssen (siehe Kapitel 3.2).

Der wesentliche Unterschied besteht in der Definition der Zeiger. In der Zweiachsentheorie werden die Zeiger (hier beispielhaft für den Strom dargestellt) wie folgt definiert:

$$\underline{i}(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\underline{i}_U(t) + \underline{a} \cdot \underline{i}_V(t) + \underline{a}^2 \cdot \underline{i}_W(t) \right) \cdot e^{-j\alpha(t)}$$

Ähnliche Definitionen gelten dann auch für die Spannungen und Flussverkettungen. Als Ergebnis erhält man dann für das Drehmoment:

$$T(t) = p \cdot \text{Im} \left\{ \underline{i}_I(t) \cdot \underline{\psi}_I^*(t) \right\}$$

Bis auf den Faktor $3/2$ ist diese Gleichung identisch mit der Drehmomentgleichung der Raumzeigertheorie.

Die Raumzeigerdarstellung besitzt also den Vorteil, dass die Spannungen und Ströme anschaulich interpretiert werden können: Im stationären, symmetrischen Betrieb entspricht die Amplitude der Strom-, Spannungs- und Flussverkettung-Raumzeiger der Amplitude der Stranggrößen. Diese Transformation ist aber nicht leistungsinvariant (was z.B. an dem Faktor $3/2$ in der Drehmomentgleichung zu erkennen ist).

Dagegen kann gezeigt werden, dass die Zweiachsentheorie leistungsinvariant ist. Die Interpretation der Spannungen und Ströme ist dagegen nicht so anschaulich (d.h., um z.B. auf die real fließenden Ströme umrechnen zu können, muss hier ein entsprechender Faktor berücksichtigt werden).

3.12 Zusammenhang zwischen Raumzeigern und Zeitzeigern

Zwischen Raumzeigern und Zeitzeigern gibt es eine formale Ähnlichkeit. Betrachtet man z.B. den Strom-Zeitzeiger des Mitsystems bei den symmetrischen Komponenten (siehe Vorlesung „Elektrische Maschinen und Antriebe“, Kapitel 1.6), so gilt:

$$\underline{I}_m = \frac{1}{3} (\underline{I}_u + \underline{a} \cdot \underline{I}_v + \underline{a}^2 \cdot \underline{I}_w)$$

Hierbei sind \underline{I}_m der Strom-Zeitzeiger des Mitsystems, und \underline{I}_u , \underline{I}_v und \underline{I}_w die Strom-Zeitzeiger der drei Strangströme.

Eine wesentliche Voraussetzung bei der Anwendung symmetrischer Komponenten war, dass die drei Strangströme die gleiche Frequenz besitzen und zeitlich sinusförmig sind (dann kann auch mit Effektivwerten gerechnet werden, was die Grossbuchstaben in der obigen Gleichung anzeigen). Mit anderen Worten: Eingeschwungene (aber durchaus unsymmetrische) Zustände können mit Hilfe der komplexen Wechselstromrechnung und der Einführung von Zeitzeigern elegant berechnet werden.

Die Raumzeiger sind im vorangegangenen Kapitel 3.3 definiert worden. Für die Ströme gilt für den Spezialfall $\alpha = 0$:

$$\underline{i}(t) = \frac{2}{3} (i_u(t) + \underline{a} \cdot i_v(t) + \underline{a}^2 \cdot i_w(t))$$

Es ist bei der Einführung der Raumzeiger explizit festgehalten worden, dass für die Zeitabhängigkeit der Ströme keine Einschränkung besteht.¹² Dies ist der wesentliche inhaltliche Unterschied zu Zeitzeigern, und nur aufgrund dieses Unterschiedes lassen sich dynamische Vorgänge mit Raumzeigern behandeln, nicht aber mit Zeitzeigern.

¹² Zur Erinnerung: Bei der Einführung der Raumzeiger wurde gefordert, dass Durchflutung, Strombelag und Luftspaltinduktion zu jedem Zeitpunkt räumlich sinusförmig sind und für alle Stränge die gleiche Wellenlänge aufweisen. Dies wird mit Hilfe einer geschickten Wicklungsverteilung in der Maschine und der Beschränkung auf die Grundwellenbetrachtung (was genau genommen eine Näherung ist) erreicht.

4 Dynamisches Verhalten der Asynchronmaschine

4.1 Stationärer Betrieb der Asynchronmaschine in Raumzeigerdarstellung

1. Gleichungssystem

Für die Berechnung des dynamischen Betriebsverhaltens der Asynchronmaschine kann das allgemeine Gleichungssystem der Drehfeldmaschine (Raumzeigertheorie) verwendet werden, wobei wegen des konstanten Luftspaltes die Wahl von $\alpha(t)$ beliebig ist.

Es wird ein zunächst beliebiges Koordinatensystem gewählt, über dessen Drehgeschwindigkeit und Anfangswert noch verfügt werden kann:

$$\alpha(t) = \omega_K t + \alpha_0$$

Für die mechanische Drehzahl gilt (siehe auch die Fußnote in Kapitel 3.6):

$$\frac{d\gamma}{dt} = \omega_m = p\Omega = 2\pi p n$$

Die Synchronwinkelgeschwindigkeit ist:

$$\omega_1 = 2\pi f_1$$

Nach Umrechnung der Läufergrößen auf die Ständerwindungszahl lauten die Spannungsgleichungen der Asynchronmaschine bei kurzgeschlossener Läuferwicklung (siehe Kapitel 3.6):

$$\underline{u}_I(t) = R_1 \cdot \underline{i}_I(t) + \frac{d\underline{\psi}_I(t)}{dt} + j \cdot \omega_K \cdot \underline{\psi}_I(t)$$

$$0 = R_2 \cdot \underline{i}_{II}(t) + \frac{d\underline{\psi}_{II}(t)}{dt} + j \cdot (\omega_K - \omega_m) \cdot \underline{\psi}_{II}(t)$$

mit den Flussverkettungen (siehe Kapitel 3.8):

$$\underline{\psi}_I(t) = L_1 \cdot \underline{i}_I(t) + L_{1h} \cdot \underline{i}_{II}(t)$$

$$\underline{\psi}_{II}(t) = L_2 \cdot \underline{i}_{II}(t) + L_{1h} \cdot \underline{i}_I(t)$$

und der Drehmomentgleichung (siehe Kapitel 3.9):

$$T(t) = \frac{3}{2} p \cdot \text{Im} \{ \underline{i}_I(t) \cdot \underline{\psi}_I^*(t) \}$$

2. Stationärer Betrieb im Leerlauf

Zunächst soll der stationäre Betrieb im Leerlauf betrachtet werden. Hierbei gilt:

$$\omega = \text{const.}, \quad \frac{d\underline{\psi}}{dt} = 0 \quad \text{und} \quad \underline{i}_{II}(t) = 0$$

Wird nun zusätzlich noch der Statorwiderstand vernachlässigt ($R_1 = 0$), so wird das Gleichungssystem zu:

$$\begin{aligned} \underline{u}_I(t) &= j \cdot \omega_K \cdot L_1 \cdot \underline{i}_I(t) \\ 0 &= j \cdot (\omega_K - \omega_m) \cdot L_{1h} \cdot \underline{i}_I(t) \\ T(t) &= \frac{3}{2} p \cdot L_1 \cdot \text{Im} \{ \underline{i}_I(t) \cdot \underline{i}_I^*(t) \} \end{aligned}$$

Diese drei Gleichungen werden nun näher betrachtet:

Für die Statorspannungsgleichung ergibt sich mit der Definitionsgleichung für den Statorspannung-Raumzeiger

$$\underline{u}_I(t) = \frac{2}{3} (u_{1,U}(t) + \underline{a} \cdot u_{1,V}(t) + \underline{a}^2 \cdot u_{1,W}(t)) \cdot e^{-j\alpha}$$

und einer Speisung der Maschine mit einem symmetrischen Spannungssystem

$$\begin{aligned} u_{1,U}(t) &= \sqrt{2} \cdot U_1 \cos(\omega_1 t) = \sqrt{2} \cdot U_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot [e^{j\omega_1 t} + e^{-j\omega_1 t}] \\ u_{1,V}(t) &= \sqrt{2} \cdot U_1 \cos\left(\omega_1 t - \frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{2} \cdot U_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot [\underline{a}^2 \cdot e^{j\omega_1 t} + \underline{a} \cdot e^{-j\omega_1 t}] \\ u_{1,W}(t) &= \sqrt{2} \cdot U_1 \cos\left(\omega_1 t - \frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt{2} \cdot U_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot [\underline{a} \cdot e^{j\omega_1 t} + \underline{a}^2 \cdot e^{-j\omega_1 t}] \end{aligned}$$

Folgendes:

$$\begin{aligned} \underline{u}_I(t) &= \frac{2}{3} \sqrt{2} \cdot U_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[(1 + \underline{a} \cdot \underline{a}^2 + \underline{a}^2 \cdot \underline{a}) \cdot e^{j\omega_1 t} + (1 + \underline{a} \cdot \underline{a} + \underline{a}^2 \cdot \underline{a}^2) \cdot e^{-j\omega_1 t} \right] \cdot e^{-j\alpha} \\ &= \sqrt{2} \cdot U_1 \cdot e^{j\omega_1 t} \cdot e^{-j\alpha} \end{aligned}$$

Der Statorspannung-Raumzeiger führt also eine (räumliche) Kreisbewegung mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1 aus.

Es wird nun ein Koordinatensystem gewählt, das synchron mit dem Ständerdrehfeld umläuft ($\omega_K = \omega_1$). Zusätzlich wird der Anfangswert $\alpha_0 = 0$ gewählt. Damit gilt

$$\alpha(t) = \omega_K t + \alpha_0 = \omega_1 t$$

und es folgt weiter

$$\underline{u}_I(t) = \sqrt{2} \cdot U_1 \cdot e^{j\omega_1 t} \cdot e^{-j\omega_1 t} = \sqrt{2} \cdot U_1$$

Der Realteil des Statorspannung-Raumzeigers ist also gleich dem Scheitelwert der Strangspannung, der Imaginärteil ist gleich null. Da das Koordinatensystem synchron mit der Statorfrequenz rotiert (es war ja $\omega_K = \omega_1$ gewählt worden), gilt dieser Zusammenhang für alle Zeitpunkte. Mit anderen Worten: Bei dieser Wahl von ω_K werden im stationären Fall alle

Statorgrößen zu Gleichgrößen (für die Statorspannungen ist dies in der letzten Gleichung gezeigt: auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens tritt keine Zeitabhängigkeit mehr auf).

Wertet man nun die Statorspannungsgleichung weiter aus, so folgt:

$$\sqrt{2} \cdot U_1 = j \cdot \omega_k \cdot L_1 \cdot \underline{i}_1(t)$$

und damit

$$\underline{i}_1(t) = -j \frac{\sqrt{2} \cdot U_1}{\omega_k \cdot L_1}$$

Dieser Ausdruck ist rein imaginär und stellt den Leerlaufstrom der Maschine im stationären Zustand dar. Dieser Leerlaufstrom ist um 90° gegenüber der Statorspannung phasenverschoben, was bereits aus der Vorlesung „Elektrische Maschinen und Antriebe“ für diesen Betriebszustand bekannt ist.

Die Rotorspannungsgleichung lautet

$$0 = j \cdot (\omega_k - \omega_m) \cdot L_{1h} \cdot \underline{i}_1(t)$$

und kann nur erfüllt werden für $\omega_k = \omega_m$. Da das Koordinatensystem synchron mit dem Ständerdrehfeld umläuft (siehe die Wahl von $\alpha(t)$ oben), folgt sofort, dass $\omega_1 = \omega_m$ gelten muss. Mit anderen Worten rotiert die Maschine mit synchroner Drehzahl. Dies kennzeichnet, wie bekannt, den Leerlaufbetrieb (bei vernachlässigten Verlusten).

Für die Drehmomentgleichung gilt:

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{3}{2} p \cdot L_1 \cdot \text{Im}\{\underline{i}_1(t) \cdot \underline{i}_1^*(t)\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

da die Multiplikation einer komplexen Zahl mit der konjugiert komplexen Zahl immer einen reellen Wert ergibt. Auch dieses Ergebnis ist in Übereinstimmung mit dem bekannten Drehmomentverhalten der Asynchronmaschine im stationären Betrieb bei Leerlauf.

4.2 Schneller Hochlauf und Laststoß

Im Folgenden wird nun der schnelle Hochlauf der Asynchronmaschine berechnet, wenn zur Zeit $t = 0$ bei Stillstand der Maschine die Klemmen an Nennspannung gelegt werden. Dabei wird angenommen, dass das speisende Netz starr ist (in Bezug auf die Spannung U_1 und die Kreisfrequenz $\omega_1 = 2\pi f_1$) und die Maschine nur durch ihr Trägheitsmoment belastet ist. Nach Erreichen eines (nahezu) stationären Zustandes wird die Maschine dann plötzlich mit dem Nennmoment belastet.

Als Drehgeschwindigkeit und Anfangswert des Koordinatensystems wird

$$\alpha(t) = \omega_1 t$$

gewählt. Zur numerischen Lösung wird das Gleichungssystem in die folgende Form gebracht (hierbei ist Θ das Massenträgheitsmoment und T_g das Gegenmoment; die Gleichung für das

Drehmomentgleichgewicht lautet: $\Theta \frac{d\Omega}{dt} = T - T_g$):

$$\frac{d\underline{\psi}_I(t)}{dt} = \underline{u}_I(t) - R_1 \cdot \underline{i}_I(t) - j \cdot \omega_k \cdot \underline{\psi}_I(t)$$

$$\frac{d\underline{\psi}_{II}(t)}{dt} = -R_2 \cdot \underline{i}_{II}(t) - j \cdot (\omega_k - \omega_m) \cdot \underline{\psi}_{II}(t)$$

$$\frac{d\omega_m}{dt} = \frac{p}{\Theta} \left[\frac{3}{2} p \cdot \text{Im} \{ \underline{i}_I(t) \cdot \underline{\psi}_I^*(t) \} - T_{g\sigma} \right]$$

Aus den Gleichungen für die Flussverkettungen (siehe Kapitel 4.1) folgt¹³

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \underline{i}_I(t) \\ \underline{i}_{II}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} L_1 & L_{1h} \\ L_{1h} & L_2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\psi}_I(t) \\ \underline{\psi}_{II}(t) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1-\sigma}{\sigma L_{1h}} \begin{bmatrix} 1+\sigma_2 & -1 \\ -1 & 1+\sigma_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\psi}_I(t) \\ \underline{\psi}_{II}(t) \end{bmatrix}, \text{ mit } \sigma = 1 - \frac{1}{(1+\sigma_1)(1+\sigma_2)} \end{aligned}$$

Die Anfangsbedingungen für $t = 0$ lauten nun, dass alle Ströme und Spannungen in diesem Gleichungssystem, sowie die Kreisfrequenz und das Gegenmoment null sind. Für $t > 0$ lautet die Anregung:

$$\underline{u}_I(t) = \sqrt{2} \cdot U_1 \quad T_g = 0$$

Nach Beendigung des schnellen Hochlaufs der leerlaufenden Asynchronmaschine werden folgende Daten erreicht (vgl. den vorangegangenen Abschnitt):

$$\underline{i}_I(t) = -j \frac{\sqrt{2} \cdot U_1}{\omega_1 \cdot L_1}$$

$$\underline{i}_{II}(t) = 0$$

Zum Zeitpunkt $t = t_1$ wird die Asynchronmaschine stoßartig mit dem Nennmoment als Lastmoment $T_g = T_N$ belastet. Die Anregungsgrößen sind dann:

¹³ Die Inversion einer Induktivitätsmatrix ist im Anhang 9.3 ausführlich durchgeführt.

$$\underline{u}_1(t) = \sqrt{2} \cdot U_1 \quad T_g = T_N$$

In beiden Fällen (schneller Hochlauf der leerlaufenden Asynchronmaschine am starren Netz und Laststoß) finden dynamische Ausgleichsvorgänge statt, die in den folgenden Bildern dargestellt sind.

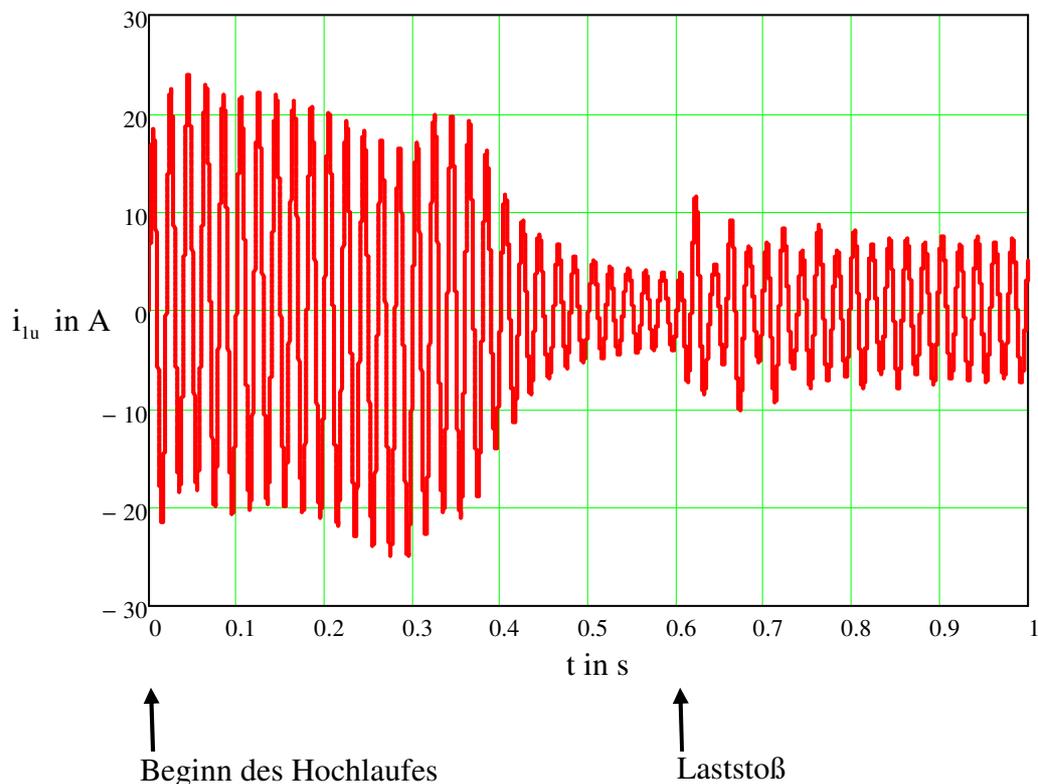
Die Daten der simulierten Maschine sind:

- Statorwiderstand: $R_1 = 1\Omega$,
- Rotorwiderstand: $R'_2 = 1\Omega$
- Statorhauptinduktivität: $L_{1h} = 260\text{mH}$
- Statorstreuzyffler: $\sigma_1 = 0.1$
- Rotorstreuzyffler: $\sigma_2 = 0.1$
- Polpaarzahl: $p = 2$
- Massenträgheitsmoment: $\Theta = 5 \cdot 10^{-3} \text{kgm}^2$

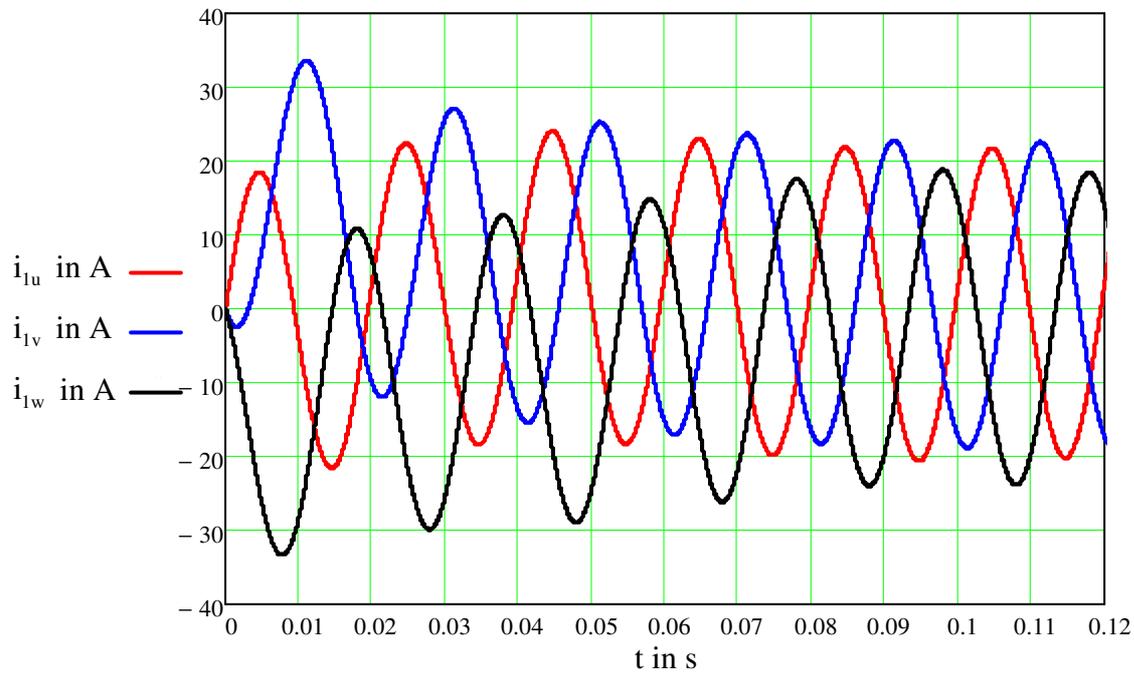
Die Speisung der Maschine geschieht mit $U_1 = 230\text{V}$ und $f_1 = 50\text{Hz}$.

Die Maschine entwickelt bei dieser Speisung ein Kippmoment von $T_{\text{kipp}} \approx 26.8\text{Nm}$ bei einem Kippchlupf von $s_{\text{kipp}} \approx 0.058$. Das Nennmoment beträgt $T_N = 15.0\text{Nm}$, so dass die Überlastfähigkeit $T_{\text{kipp}}/T_N \approx 1.8$ ist.

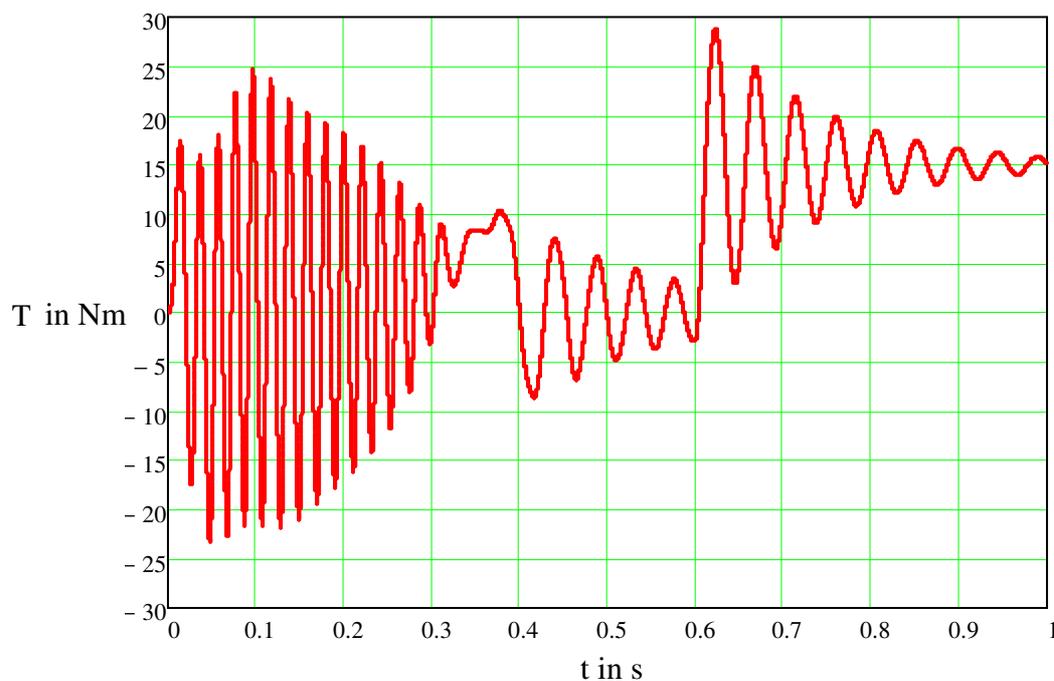
Zeitfunktion des Stromes in Strang U:



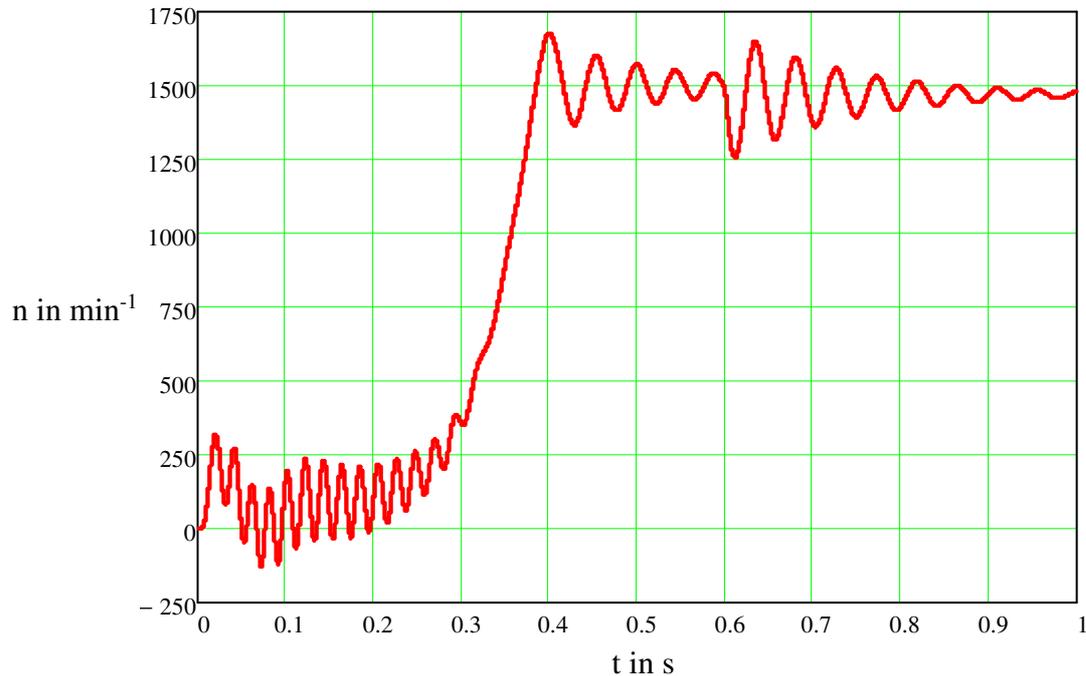
Zeitfunktionen aller drei Ströme zu Beginn des Hochlaufes (Strang U: rot; Strang V: blau; Strang W: schwarz):



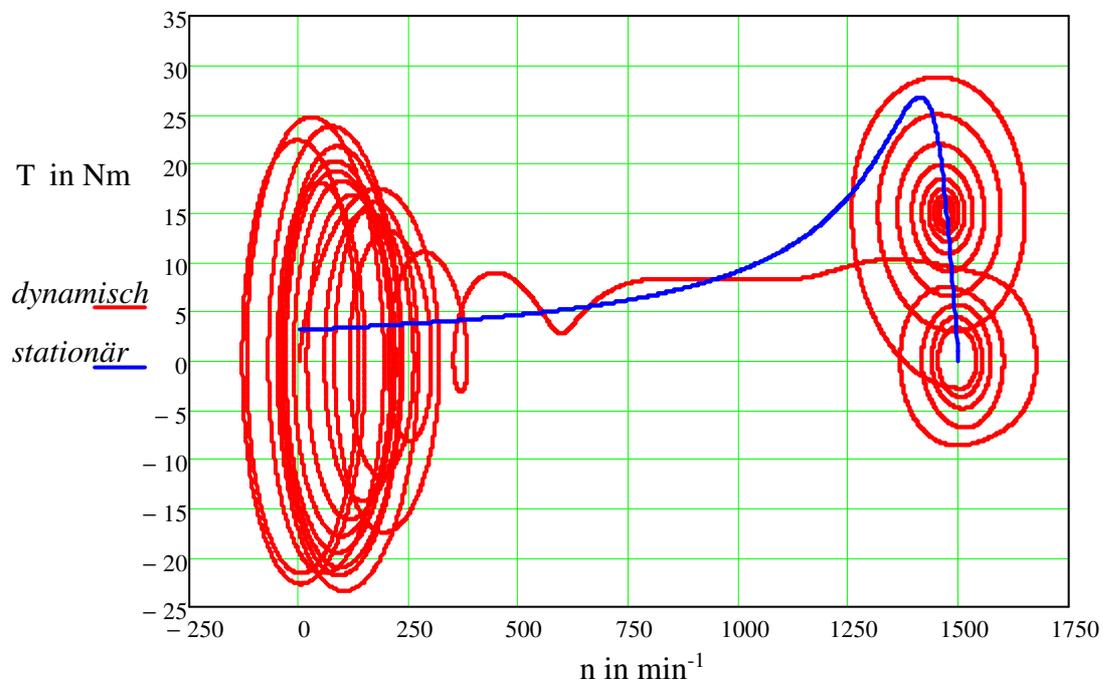
Zeitfunktion des Drehmomentes:



Zeitfunktion der Drehzahl:



Das folgende Bild zeigt die Drehmoment-Drehzahl-Kennlinien der betrachteten Asynchronmaschine. In blau ist die stationäre Kennlinie dargestellt, in rot die dynamische Charakteristik.



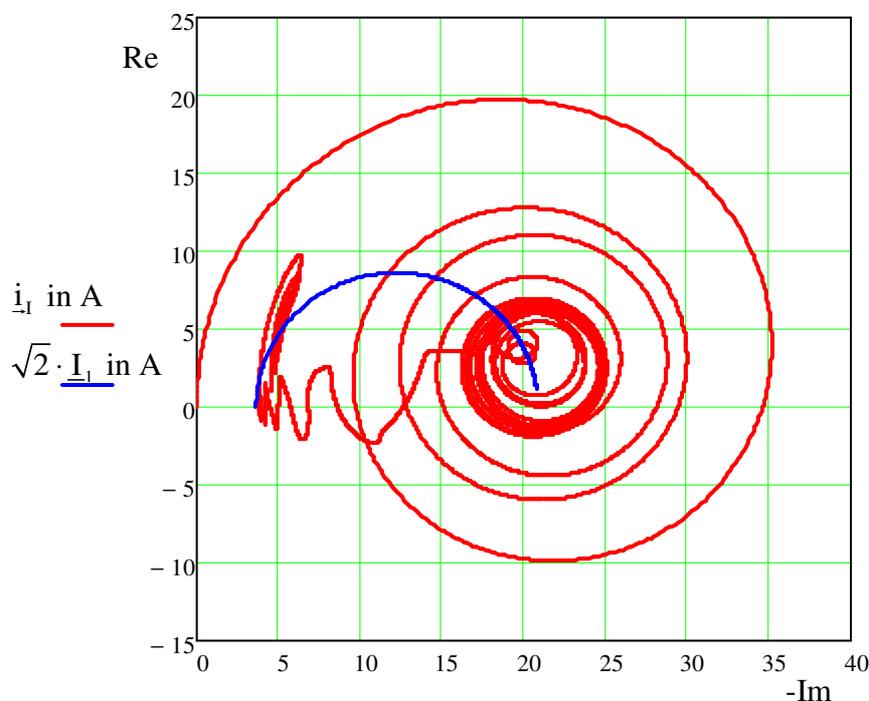
Beim Einschalten entwickelt die Asynchronmaschine im Stillstand (infolge der Gleichstromanteile) zunächst heftige Pendelmomente verbunden mit hohen Kurzschlusswechselströmen. Nach Abklingen dieser Pendelmomente läuft die Maschine je nach Größe der angekoppelten Massen mehr oder weniger schnell hoch und pendelt mit Überschwingen in den Leerlauf ein.

Der Laststoß bremst die Maschine zunächst ab, bis das elektromagnetische Moment aufgebaut ist. Danach findet wieder ein Einschwingvorgang in den stationären Betriebspunkt statt. Die stationäre Enddrehzahl liegt geringfügig unterhalb der Synchrondrehzahl.

Die Abweichungen von den stationären Kennlinien sind erheblich, siehe den Vergleich von stationärer und dynamischer Drehmoment-Drehzahl-Kennlinie. Nach Abklingen der Ausgleichsvorgänge liegen alle mit Hilfe der dynamischen Gleichungen berechneten Betriebspunkte auf der stationären Kennlinie.

Das folgende Bild zeigt den Stromraumzeiger für diese Ausgleichsvorgänge in der komplexen Ebene (rote Kennlinie). Zusätzlich ist in blau die Stromortskurve des stationären Betriebes dieser Asynchronmaschine dargestellt (allerdings als Ortskurve der Amplitudenwerte, nicht als Ortskurve der Effektivwerte).

Auch an diesen Kennlinien wird deutlich, dass dynamische Ausgleichsvorgänge stattfinden. Es entwickeln sich hohe oszillierende Ströme; die Abweichungen von der stationären Stromortskurve der Maschine sind erheblich. Sowohl nach dem Hochlauf, als auch nach dem Laststoß liegen die stationären Endwerte auf der Stromortskurve der Asynchronmaschine, die bei rein stationärem Betrieb berechnet werden kann.



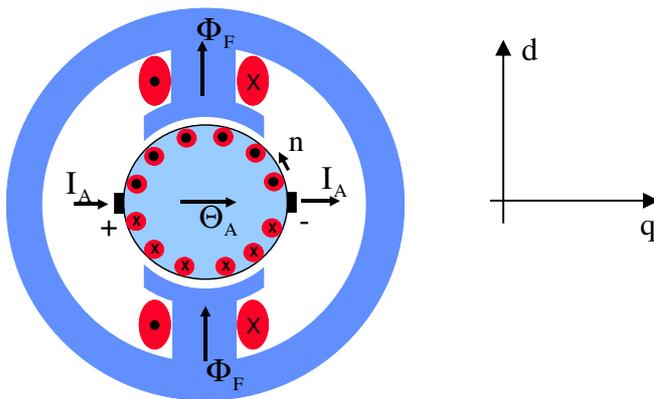
Die Einschwingvorgänge lassen sich vermeiden, wenn mit Hilfe einer langsamen $U_1 - f_1 -$ Kennlinie der Hochlauf praktisch quasistationär erfolgt (Hochlauf auf der stationären Kennlinie).

Als dynamisches Stellglied in einem Antriebssystem ist die Asynchronmaschine in beiden Fällen (dynamischer Hochlauf mit Einschwingvorgängen oder quasistationärer Hochlauf) ungeeignet. Im Folgenden wird eine Lösung entwickelt, wie die Asynchronmaschine dennoch als dynamisches Stellglied (ähnlich der Gleichstrommaschine) verwendet werden kann.

4.3 Feldorientiertes Koordinatensystem für die Asynchronmaschine

Bei der fremderregten Gleichstrommaschine stehen Erregerfluss Φ_F und Ankerdurchflutung Θ_A durch die Wirkung des Kommutators immer senkrecht aufeinander und ihre räumliche Lage ist ortsfest.

Das Ankerquerfeld wird durch die Wendepol- und Kompensationswicklung vollständig aufgehoben (im Bild unten aus Gründen der Übersichtlichkeit weggelassen); dadurch bleibt der Erregerfluss vom Ankerstrom unbeeinflusst (die Ankerflussverkettung in der Querachse ist null: $\Psi_{A,q} = 0$). Dies bedeutet, dass die Ankerflussverkettung in der Längsachse nur vom Felderregerstrom abhängt ($\Psi_{A,d} \sim I_F$); das Drehmoment wird dann gebildet aus: $T \sim I_A \Phi_F$



Diese Eigenschaften der Gleichstrommaschine kann man auch auf die Asynchronmaschine übertragen, indem man ein läuferflussorientiertes Koordinatensystem wählt, das mit der Winkelgeschwindigkeit des Läuferflusses rotiert:

$$\alpha(t) = \omega_\mu t + \alpha_0$$

wobei der Augenblickswert der Winkelgeschwindigkeit des Läuferflusses

$$\omega_\mu = \omega_m + \omega_R$$

nicht unbedingt mit dem stationären Wert ω_l des Ständerdrehfeldes übereinstimmen muss (mit $\omega_m = d\gamma/dt = p\Omega$ und ω_R als Winkelgeschwindigkeit der Läuferströme).

Um diese Analogie zur Gleichstrommaschine besser deutlich zu machen, werden im Folgenden die Raumzeiger in ihre Komponenten zerlegt und diese Komponenten den entsprechenden Achsen zugeordnet. Hierzu wird zunächst das allgemeine Gleichungssystem aus den Kapiteln 3.6, 3.8 und 3.9 wiederholt:

$$\underline{u}_I(t) = R_1 \cdot \underline{i}_I(t) + \frac{d\underline{\psi}_I(t)}{dt} + j \cdot \omega_k \cdot \underline{\psi}_I(t)$$

$$\underline{u}_{II}(t) = R_2 \cdot \underline{i}_{II}(t) + \frac{d\underline{\psi}_{II}(t)}{dt} + j \cdot (\omega_k - \omega_m) \cdot \underline{\psi}_{II}(t)$$

$$\underline{\psi}_I(t) = L_1 \cdot \underline{i}_I(t) + L_{1h} \cdot \underline{i}_{II}(t)$$

$$\underline{\psi}_{II}(t) = L_2 \cdot \underline{i}_{II}(t) + L_{1h} \cdot \underline{i}_I(t)$$

$$T(t) = -\frac{3}{2} p \cdot \operatorname{Re} \left\{ j \cdot \underline{\psi}_{II}(t) \cdot \underline{i}_{II}^*(t) \right\}$$

Die Aufteilung in Real- und Imaginärteil ist für den allgemeinen Stromraumzeiger bereits in Kapitel 3.3. eingeführt worden:

$$\begin{aligned} \underline{i}(t) &= \operatorname{Re} \left\{ \underline{i}(t) \right\} + j \cdot \operatorname{Im} \left\{ \underline{i}(t) \right\} \\ &= i_x(t) - j \cdot i_y(t) \end{aligned}$$

Mit einer solchen Aufteilung in die Komponenten ergibt sich für die Spannungs- und Flussverkettungsgleichungen:

$$u_{I,x}(t) = R_1 \cdot i_{I,x}(t) + \frac{d\psi_{I,x}(t)}{dt} + \omega_K \cdot \psi_{I,y}(t)$$

$$u_{I,y}(t) = R_1 \cdot i_{I,y}(t) + \frac{d\psi_{I,y}(t)}{dt} - \omega_K \cdot \psi_{I,x}(t)$$

$$u_{II,x}(t) = R_2 \cdot i_{II,x}(t) + \frac{d\psi_{II,x}(t)}{dt} + (\omega_K - \omega_m) \cdot \psi_{II,y}(t)$$

$$u_{II,y}(t) = R_2 \cdot i_{II,y}(t) + \frac{d\psi_{II,y}(t)}{dt} - (\omega_K - \omega_m) \cdot \psi_{II,x}(t)$$

$$\psi_{I,x}(t) = L_1 \cdot i_{I,x}(t) + L_{1h} \cdot i_{II,x}(t)$$

$$\psi_{I,y}(t) = L_1 \cdot i_{I,y}(t) + L_{1h} \cdot i_{II,y}(t)$$

$$\psi_{II,x}(t) = L_2 \cdot i_{II,x}(t) + L_{1h} \cdot i_{I,x}(t)$$

$$\psi_{II,y}(t) = L_2 \cdot i_{II,y}(t) + L_{1h} \cdot i_{I,y}(t)$$

Die Drehmomentgleichung wird wie folgt umgeformt:

$$\begin{aligned} T(t) &= -\frac{3}{2} p \cdot \operatorname{Re} \left\{ j \cdot \underline{\psi}_{II}(t) \cdot \underline{i}_{II}^*(t) \right\} \\ &= -\frac{3}{2} p \cdot \operatorname{Re} \left\{ j \cdot \left[\psi_{II,x}(t) - j \cdot \psi_{II,y}(t) \right] \cdot \left[i_{II,x}(t) + j \cdot i_{II,y}(t) \right] \right\} \\ &= -\frac{3}{2} p \cdot \operatorname{Re} \left\{ j \cdot \left[\psi_{II,x}(t) \cdot i_{II,x}(t) + \psi_{II,y}(t) \cdot i_{II,y}(t) \right] - \left[\psi_{II,x}(t) \cdot i_{II,y}(t) - \psi_{II,y}(t) \cdot i_{II,x}(t) \right] \right\} \\ &= \frac{3}{2} p \cdot \left[\psi_{II,x}(t) \cdot i_{II,y}(t) - \psi_{II,y}(t) \cdot i_{II,x}(t) \right] \end{aligned}$$

Da das Koordinatensystem mit der Winkelgeschwindigkeit des Läuferflusses rotiert (siehe die Wahl von $\alpha(t)$ zu Beginn dieses Kapitels), sind mit der oben angegebenen Komponentendarstellung die Ständer- und Läuferdurchflutungen in Längskomponente (y -Komponente) und Querkomponente (x -Komponente) in Bezug auf den Läuferfluss zerlegt. Da es sich hierbei um ein flussorientiertes Koordinatensystem handelt, werden die y - und x -

Komponenten im Folgenden als d-Komponente (Längskomponente) und q-Komponente (Querkomponente) bezeichnet.¹⁴

Diese Zerlegung in d- und q-Komponente führt zu einer übersichtlichen Entkopplung und ermöglicht durch geeignete Regelung das Einprägen solcher Ströme, dass die folgenden Ziele erreicht werden können:

- Die Läuferflussverkettung in der Querachse wird zu null ($\Psi_{II,q} = 0$).
- Die Läuferflussverkettung in der Längsachse hängt nur noch vom Magnetisierungsstrom ab ($\Psi_{II,d} \sim i_{\mu,d}$).
- Die Drehmomentbildung erfolgt dann nur noch durch die senkrecht aufeinander stehenden Komponenten von Läuferfluss und Ständerstrom: $T \sim \Psi_{II,d} i_{I,q}$.

Der beschriebene Betrieb wird als feldorientiert bezeichnet. Ein relativ zu dem mit $\alpha(t)$ rotierenden System ruhender Beobachter stellt die gleiche Feldverteilung und Drehmomentbildung fest wie bei der Gleichstrommaschine. Es ergeben sich einfache Beziehungen für die Regelgrößen Läuferfluss und Ständerwirkstrom, die wie bei der Gleichstrommaschine unabhängig voneinander eingestellt werden können.

Nun wird erläutert, wie diese Ziele erreicht werden können (auf die explizite Darstellung der Zeitabhängigkeiten in den Gleichungen wird im Folgenden aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet).

Für die Läuferflussverkettungen wird gefordert:

$$\begin{aligned} \Psi_{II,d} &= L_2 i_{II,d} + L_{1h} i_{I,d} \\ &! \\ &= L_{1h} i_{\mu,d} && \text{(Längsachse)} \\ \Psi_{II,q} &= L_2 i_{II,q} + L_{1h} i_{I,q} \\ &! \\ &= 0 && \text{(Querachse)} \end{aligned}$$

Hierbei ist $i_{\mu,d}$ ein Magnetisierungsstrom, der so definiert ist, dass er der Läuferflussverkettung proportional ist.

Für die Läuferströme folgt dann aus der Forderung für die Läuferflussverkettungen:

$$\begin{aligned} i_{II,d} &= \frac{L_{1h}}{L_2} (i_{\mu,d} - i_{I,d}) \\ i_{II,q} &= \frac{L_{1h}}{L_2} (-i_{I,q}) \end{aligned}$$

und für die Winkelgeschwindigkeiten:

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt} &= \omega_m = p\Omega \\ \frac{d\alpha}{dt} &= \omega_K = \omega_\mu = \omega_m + \omega_R \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \frac{d(\alpha - \gamma)}{dt} = \omega_R$$

¹⁴ Die Bezeichnung mit „d“ und „q“ ist nur eine Umbenennung der Komponenten, die i.a. für flussorientierte Koordinatensysteme eingeführt wird.

Da die Rotorwicklungen kurzgeschlossen sind (z.B. beim Käfigläufermotor) lauten die Rotorspannungsgleichungen:

$$0 = R_2 i_{II,q} + \frac{d\Psi_{II,q}}{dt} + \frac{d(\alpha - \gamma)}{dt} \Psi_{II,d}$$

$$0 = R_2 i_{II,d} + \frac{d\Psi_{II,d}}{dt} - \frac{d(\alpha - \gamma)}{dt} \Psi_{II,q}$$

Setzt man nun die obigen Beziehungen für die Ströme, Flussverkettungen und Winkelgeschwindigkeiten ein, so erhält man:

$$0 = R_2 \frac{L_{1h}}{L_2} (-i_{I,q}) + 0 + \omega_R L_{1h} i_{\mu,d}$$

$$0 = R_2 \frac{L_{1h}}{L_2} (i_{\mu,d} - i_{I,d}) + L_{1h} \frac{di_{\mu,d}}{dt} - 0$$

Mit der Läuferzeitkonstanten

$$\tau_2 = \frac{L_2}{R_2}$$

erhält man die Rotorspannungsgleichungen in feldorientierten Koordinaten:

$$\omega_R = \frac{i_{I,q}}{\tau_2 i_{\mu,d}} = \omega_\mu - \omega_m$$

$$\tau_2 \frac{di_{\mu,d}}{dt} + i_{\mu,d} = i_{I,d}$$

Die Drehmomentgleichung in feldorientierten Koordinaten lautet:

$$T = \frac{3}{2} p (\Psi_{II,q} i_{II,d} - \Psi_{II,d} i_{II,q})$$

$$= -\frac{3}{2} p \Psi_{II,d} \frac{L_{1h}}{L_2} (-i_{I,q})$$

$$= \frac{3}{2} p L_{1h} i_{\mu,d} \frac{L_{1h}}{L_2} i_{I,q}$$

$$= \frac{3}{2} p \frac{L_{1h}^2}{L_2} i_{\mu,d} i_{I,q}$$

$$= \frac{3}{2} p \frac{L_{1h}}{1 + \sigma_2} i_{\mu,d} i_{I,q}$$

Für die Ständerflussverkettungen gilt nach Einsetzen der Läuferströme:

$$\begin{aligned}\Psi_{I,d} &= L_1 i_{I,d} + L_{1h} i_{II,d} \\ &= L_1 i_{I,d} + L_{1h} \frac{L_{1h}}{L_2} (i_{\mu,d} - i_{I,d}) \\ &= \frac{L_{1h}^2}{L_2} i_{\mu,d} + \left(L_1 - \frac{L_{1h}^2}{L_2} \right) i_{I,d} \\ \Psi_{I,q} &= L_1 i_{I,q} + L_{1h} i_{II,q} \\ &= L_1 i_{I,q} + L_{1h} \frac{L_{1h}}{L_2} (-i_{I,q}) \\ &= \left(L_1 - \frac{L_{1h}^2}{L_2} \right) i_{I,q}\end{aligned}$$

Hiermit werden nun die Statorspannungsgleichungen umgeformt:

$$\begin{aligned}u_{I,q} &= R_1 i_{I,q} + \frac{d\Psi_{I,q}}{dt} + \omega_\mu \Psi_{I,d} \\ &= R_1 i_{I,q} + \frac{d}{dt} \left(\left(L_1 - \frac{L_{1h}^2}{L_2} \right) i_{I,q} \right) + \omega_\mu \left(\frac{L_{1h}^2}{L_2} i_{\mu,d} + \left(L_1 - \frac{L_{1h}^2}{L_2} \right) i_{I,d} \right) \\ &= R_1 i_{I,q} + \left(L_1 - \frac{L_{1h}^2}{L_2} \right) \frac{di_{I,q}}{dt} + \omega_\mu \frac{L_{1h}^2}{L_2} i_{\mu,d} + \omega_\mu \left(L_1 - \frac{L_{1h}^2}{L_2} \right) i_{I,d} \\ u_{I,d} &= R_1 i_{I,d} + \frac{d\Psi_{I,d}}{dt} - \omega_\mu \Psi_{I,q} \\ &= R_1 i_{I,d} + \frac{d}{dt} \left(\frac{L_{1h}^2}{L_2} i_{\mu,d} + \left(L_1 - \frac{L_{1h}^2}{L_2} \right) i_{I,d} \right) - \omega_\mu \left(L_1 - \frac{L_{1h}^2}{L_2} \right) i_{I,q} \\ &= R_1 i_{I,d} + \frac{L_{1h}^2}{L_2} \frac{di_{\mu,d}}{dt} + \left(L_1 - \frac{L_{1h}^2}{L_2} \right) \frac{di_{I,d}}{dt} - \omega_\mu \left(L_1 - \frac{L_{1h}^2}{L_2} \right) i_{I,q}\end{aligned}$$

Mit der Statorzeitkonstanten

$$\tau_1 = \frac{L_1}{R_1}$$

und der Streuziffer (siehe Vorlesung „Elektrische Maschinen und Antriebe“)

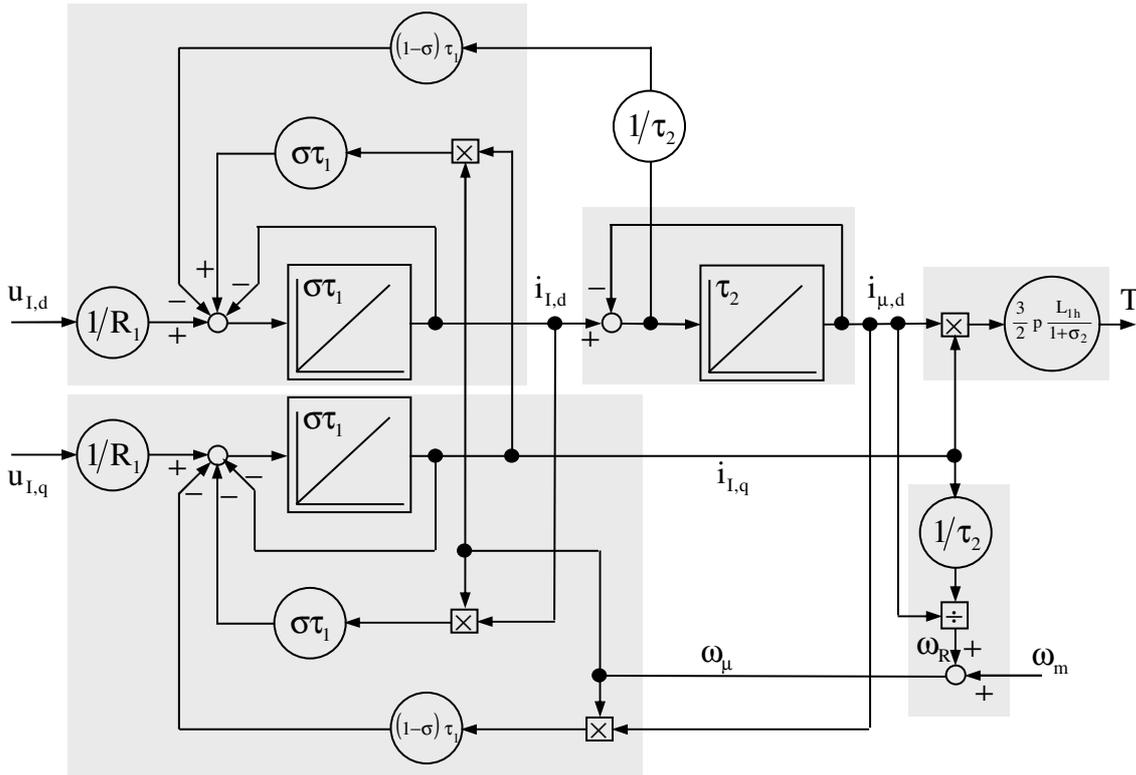
$$\sigma = 1 - \frac{L_{1h}^2}{L_1 \cdot L_2}$$

erhält man die Statorspannungsgleichungen in feldorientierten Koordinaten:

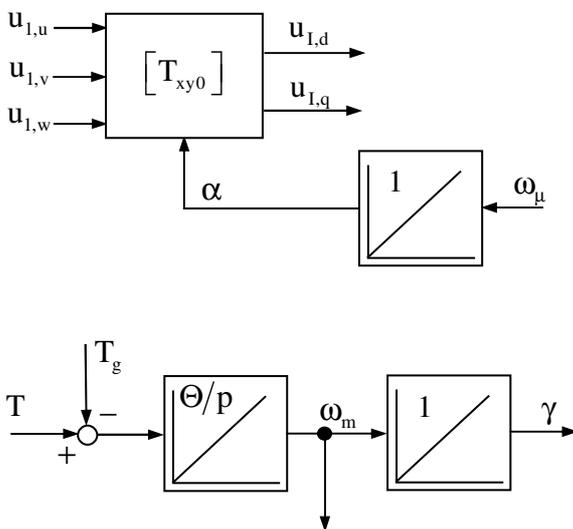
$$\sigma \tau_1 \frac{di_{I,q}}{dt} + i_{I,q} = \frac{u_{I,q}}{R_1} - \omega_\mu \sigma \tau_1 i_{I,d} - (1 - \sigma) \tau_1 \omega_\mu i_{\mu,d}$$

$$\sigma\tau_1 \frac{di_{1,d}}{dt} + i_{1,d} = \frac{u_{1,d}}{R_1} + \omega_\mu \sigma\tau_1 i_{1,q} - (1-\sigma)\tau_1 \frac{di_{\mu,d}}{dt}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen lässt sich nun das folgende Strukturbild der Asynchronmaschine in feldorientierten Koordinaten aufstellen, wobei zur besseren Übersicht die fünf Gleichungen (zwei Statorspannungsgleichungen, zwei Rotorspannungsgleichungen und die Drehmomentgleichung) grau unterlegt sind:



Die Koordinatentransformationen und das Momentengleichgewicht können mit Hilfe folgender Strukturbilder dargestellt werden:



Diskussion des Gleichungssystems:

Der Gleichung

$$\tau_2 \frac{di_{\mu,d}}{dt} + i_{\mu,d} = i_{1,d}$$

ist zu entnehmen, dass die Längskomponente des Ständerstromes ($i_{1,d}$) die Größe des Rotorflusses (proportional zu $i_{\mu,d}$, siehe oben) kontrolliert. Wie bei der Feldwicklung der Gleichstrommaschine ist hierbei eine große Zeitkonstante (die Rotorzeitkonstante τ_2) maßgebend. Die Größe des Rotorflusses ist deshalb nicht geeignet, um schnelle Regelvorgänge durchzuführen.

Die Gleichung

$$\omega_R = \frac{i_{1,q}}{\tau_2 i_{\mu,d}} = \omega_\mu - \omega_m$$

zeigt, dass sich die Winkelgeschwindigkeit des Schlupfes (Winkelgeschwindigkeit der Rotorströme ω_R) aus der Querkomponente des Ständerstromes ($i_{1,q}$) und der Größe des Rotorflusses ($\sim i_{\mu,d}$) bestimmt. Die Winkelgeschwindigkeit des Rotorflusses ergibt sich aus der Winkelgeschwindigkeit des Schlupfes und der mechanischen Winkelgeschwindigkeit des Rotors.

Die Gleichung

$$T = \frac{3}{2} p \frac{L_{1h}^2}{L_2} i_{\mu,d} i_{1,q}$$

beschreibt die Drehmomentbildung, die nun genau wie bei der Gleichstrommaschine aus Längsfluss ($\sim i_{\mu,d}$) und Querstrom ($i_{1,q}$) erfolgt. Wenn (wie gefordert) $\Psi_{1h,d} = L_{1h} i_{\mu,d} = \text{const.}$ ist, dann sind das Drehmoment T und die Winkelgeschwindigkeit des Schlupfes ω_R direkt proportional zum Querstrom $i_{1,q}$.

Die Gleichungen

$$\sigma \tau_1 \frac{di_{1,q}}{dt} + i_{1,q} = \frac{u_{1,q}}{R_1} - \omega_\mu \sigma \tau_1 i_{1,d} - (1 - \sigma) \tau_1 \omega_\mu i_{\mu,d}$$

$$\sigma \tau_1 \frac{di_{1,d}}{dt} + i_{1,d} = \frac{u_{1,d}}{R_1} + \omega_\mu \sigma \tau_1 i_{1,q} - (1 - \sigma) \tau_1 \frac{di_{\mu,d}}{dt}$$

ergänzen das Maschinenmodell um das Zusammenwirken von Statorspannungen und Statorströmen. In Bezug auf die Statorstromkomponenten verhält sich die Asynchronmaschine wie ein Verzögerungsglied erster Ordnung mit der Zeitkonstanten $\sigma \tau_1$ und der Verstärkung $1/R_1$. Die Statorstromkomponenten sind durch die rechte Seite miteinander gekoppelt. Die Terme $\omega_\mu \sigma \tau_1 i_{1,q}$ und $\omega_\mu \sigma \tau_1 i_{1,d}$ stellen die rotatorischen Spannungen dar, die durch den Strom in der jeweils anderen Achse verursacht werden. $(1 - \sigma) \tau_1 \frac{di_{\mu,d}}{dt}$ ist die transformatorische

Spannung, die bei einer Änderung des Magnetisierungsstromes entsteht. $(1 - \sigma) \tau_1 \omega_{\mu} i_{\mu,d}$ ist die rotatorisch induzierte Spannung des Hauptfeldes.

Diese Gleichungen und das daraus abgeleitete (oben dargestellte) Strukturbild beschreiben die Asynchronmaschine äquivalent zu den Gleichungen in Kapitel 4.1 bzw. 4.2. Würde man auf die Eingangsklemmen der stillstehenden Maschine einen Spannungssprung aufschalten, ergäbe sich der gleiche Hochlauf (bzw. bei einem Lastsprung aus dem Leerlauf der gleiche Einschwingvorgang) wie in Kapitel 4.2 dargestellt!

Der Vorteil dieser Darstellung für das dynamische Verhalten der Asynchronmaschine wird im folgenden Kapitel 4.4 deutlich.

4.4 Feldorientierte Regelung der Asynchronmaschine mit eingprägten Statorströmen

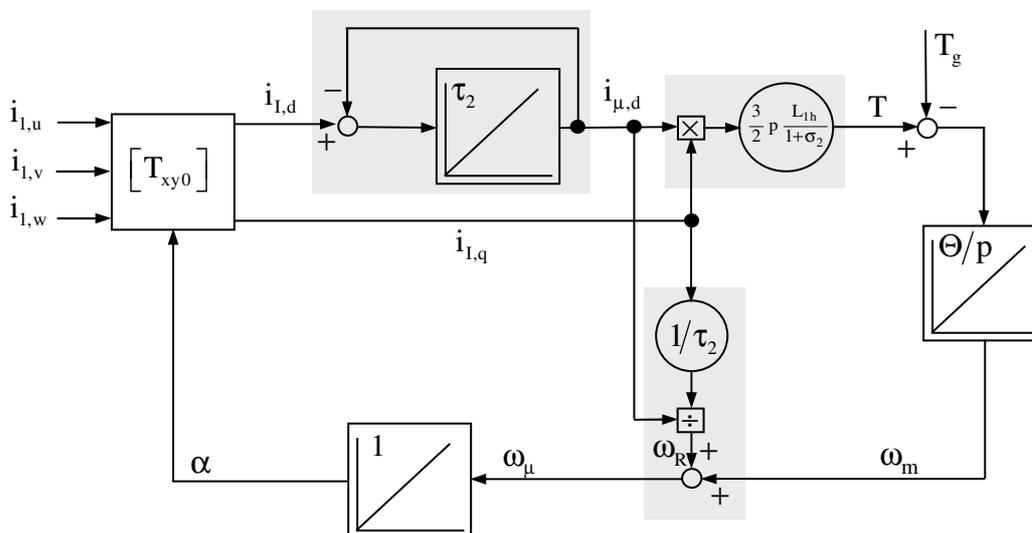
Der Vorteil der im letzten Abschnitt hergeleiteten Darstellungsform ist, dass nun die gleiche Regelstrategie angewendet werden kann wie bei der fremderregten Gleichstrommaschine und somit die Asynchronmaschine als hochdynamischer Antrieb verwendet werden kann: Der Magnetisierungsstrom und damit der Läuferfluss sollte entsprechend der Maschinenauslegung auf seinem Nennwert konstant gehalten werden, und das Drehmoment sollte allein über die Querstromkomponente eingestellt werden.¹⁵ Dazu müssen die transformierten Ständerströme in Längs- und Querachse unabhängig voneinander regelbar sein. Diese Art der Regelung wurde Ende der 1960er bzw. Anfang der 1970er Jahre unabhängig voneinander von Karl Hasse und Felix Blaschke entwickelt.

Die oben beschriebene Regelbarkeit wird ermöglicht durch

- Leistungssteller mit hoher Schaltfrequenz (bei kleineren Leistungen ca. 20kHz) und
- kurzen Abtastzeiten für die Regelung (bei kleineren Leistungen für die Stromregelung einige 100µs, für die Drehzahlregelung einige ms).

Unter diesen Voraussetzungen kann man annehmen, dass die Statorströme eingpräg sind. Dann entfallen die Gleichungen für das Zusammenwirken der Statorspannungen und Statorströme, da diese im Leistungsstellglied verarbeitet werden.

Das Strukturbild der Asynchronmaschine besitzt nun das folgende Aussehen:



Das Strukturbild der Asynchronmaschine mit eingprägten Statorströmen in feldorientierten Koordinaten entspricht dem einer fremderregten Gleichstrommaschine, bei der die Wirkung der Ankerzeitkonstanten vernachlässigt wurde (vgl. Kapitel 2.1). Dies bedeutet, dass der Drehmomentaufbau bei konstantem Läuferfluss dem Querstrom $i_{1,q}$ unverzögert folgt und der Läuferfluss allein über den Längsstrom regelbar ist.

¹⁵ Der Ständerfluss wächst dann mit der Belastung, sodass Sättigung im Ständer auftreten kann.

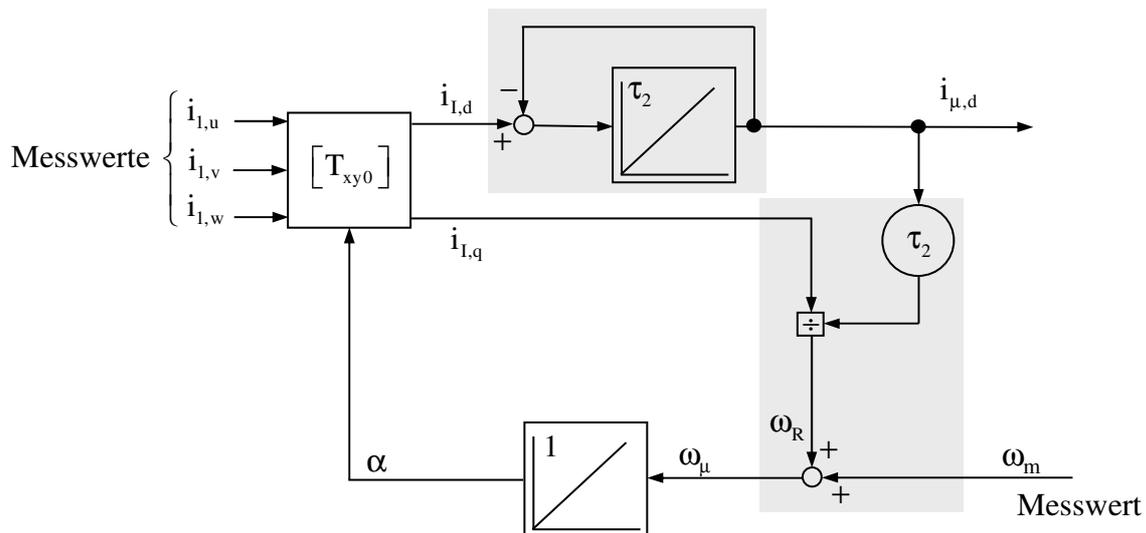
Damit ist das Ziel einer hochdynamischen Antriebseinheit prinzipiell erreicht. Wenn die Asynchronmaschine aber in Feldkoordinaten geregelt werden soll, ist es erforderlich, die augenblickliche Größe und Winkellage des Rotorflusses zu kennen. Bei einem Kurzschlussläufer können aber weder Rotorströme noch Rotorspannungen gemessen werden, und die Messung des Luftspaltflusses stellt eine Näherung dar, die aufwändig und störanfällig ist.

Größe und Winkellage des Rotorflusses können jedoch aus den Messwerten der Statorströme und der Drehzahl rechnerisch ermittelt werden, indem die Rotorgleichungen der Asynchronmaschine ausgewertet werden. Man spricht dann von einem „Flussmodell“:

$$\tau_2 \frac{di_{\mu,d}}{dt} + i_{\mu,d} = i_{l,d}$$

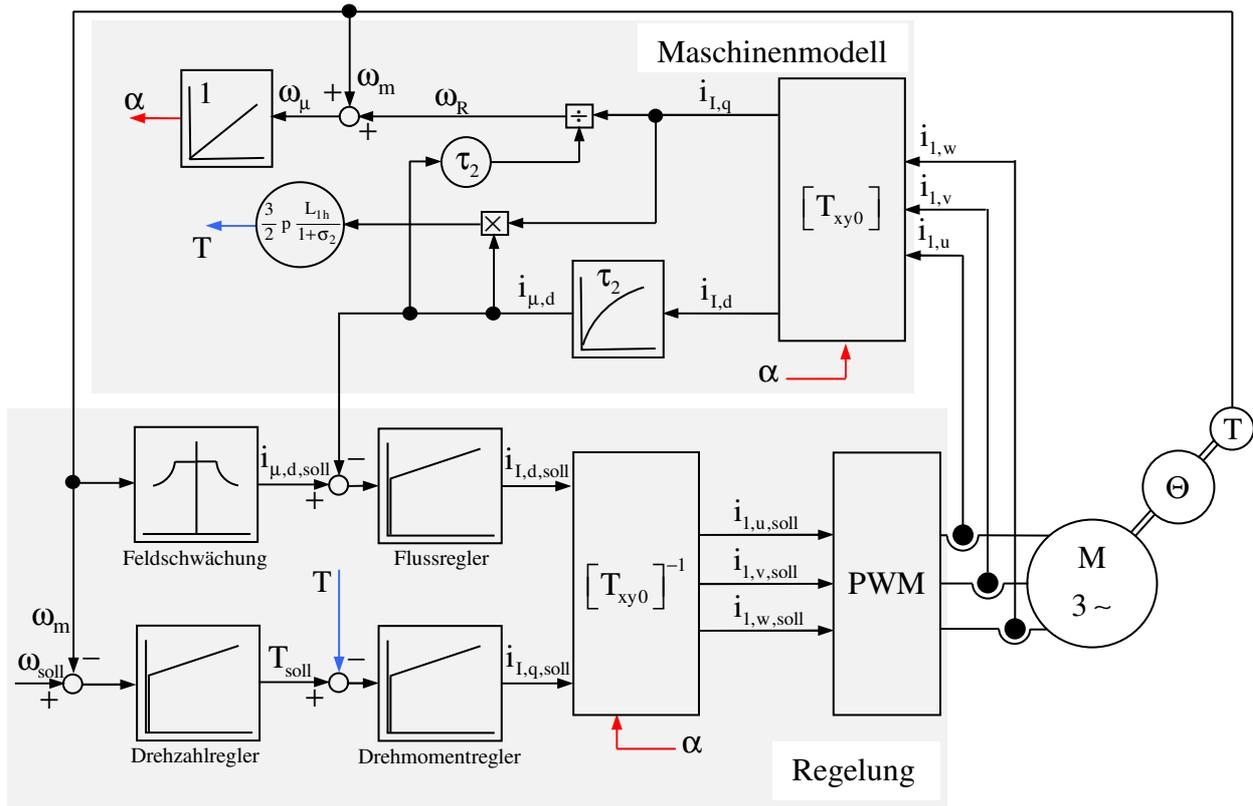
$$\frac{i_{l,q}}{\tau_2 i_{\mu,d}} + \omega_m = \omega_\mu = \frac{d\alpha}{dt}$$

Als Strukturbild erhält man:



Man erkennt, dass die Rotorzeitkonstante τ_2 einen entscheidenden Einfluss auf die Qualität des Flussmodells hat. Insbesondere ergibt sich die Schwierigkeit, den Rotorwiderstand R_2 betriebstemperaturabhängig genau zu kennen.

Ist die Rotorzeitkonstante τ_2 bekannt, kann die Asynchronmaschine hochdynamisch geregelt werden. Für ein Antriebssystem mit Drehzahl-, Drehmoment- und Flussregler ergibt sich das folgende Strukturbild:



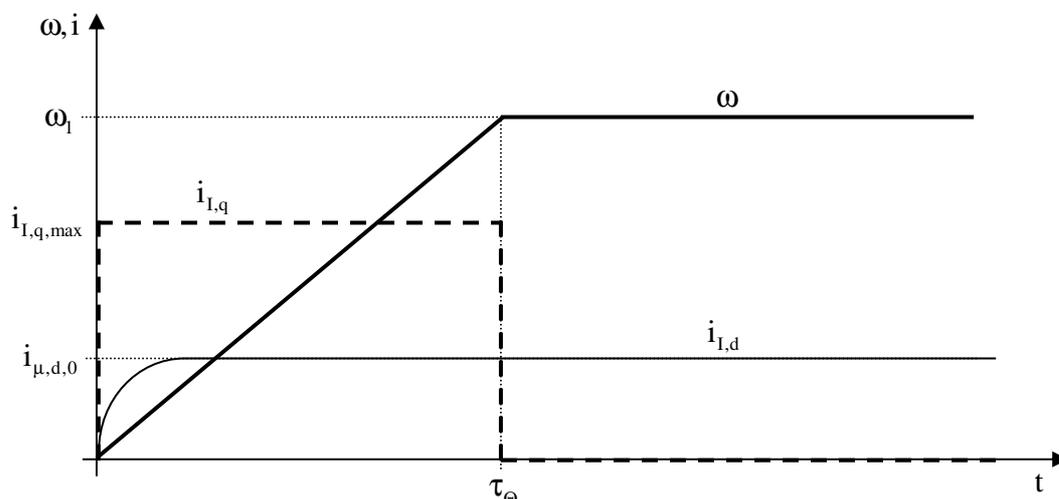
Wenn man nun auf die stillstehende Maschine zur Zeit $t=0$ einen Sollwertsprung $\omega = \omega_1 = \omega_{\text{soll}}$ gibt, werden durch die Regelung über das Leistungsstellglied (im Strukturbild mit „PWM“ bezeichnet) die Strangströme $i_{1,u}$, $i_{1,v}$ und $i_{1,w}$ so eingepreßt, dass

- sich der Magnetisierungsstrom $i_{\mu,d}$ mit der Rotorzeitkonstanten

$$\tau_2 = \frac{(1 + \sigma_2) L_{1h}}{R'_2} = \frac{L'_2}{R'_2} = \frac{L_2}{R_2} \text{ auf seinen Nennwert aufbaut und}$$

- der Hochlauf entsprechend dem eingestellten Querstrom $i_{L,q} = i_{L,q,\text{max}}$ während der Hochlaufzeit $\tau_\Theta = \frac{\Theta}{p} \frac{\omega_1}{T_{\text{max}}}$ nahezu linear geschieht.

Es ergeben sich die folgenden Zeitverläufe (unter der Voraussetzung $\tau_2 \ll \tau_\Theta$):



Aufgrund der Regelung gibt es nun bei diesem Antrieb kein Überschwingen und keine Pendelungen mehr; der Antrieb ist hochdynamisch.

Im Folgenden wird das beim Hochlauf zur Verfügung stehende Drehmoment berechnet:

Während des Hochlaufes soll die Leerlaufschlussverkettung beibehalten werden; dann gilt mit der Herleitung in Kapitel 4.1 (für $R_1 \approx 0$):

$$\underline{i}_l(t) = -j \frac{\sqrt{2} \cdot U_1}{\omega_K \cdot L_1} = i_{l,q} - j \cdot i_{l,d}$$

$$\Rightarrow i_{l,d} = i_{\mu,d,0} = \frac{\sqrt{2} \cdot U_1}{\omega_K \cdot L_1} = \sqrt{2} \cdot I_0$$

Dieser Magnetisierungsstrom baut sich mit der Zeitkonstanten τ_2 auf:

$$i_{\mu,d} = i_{l,d} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right)$$

Im stationären Betrieb erhält man das maximale Moment im Kipp-Punkt:

$$\omega_R = \omega_{\text{kipp}} = \frac{R'_2 (1 + \sigma_1)^2}{L_1 \frac{\sigma}{1 - \sigma}} = \frac{R'_2}{\sigma L_{1h} (1 + \sigma_2)} (1 + \sigma_2)(1 + \sigma_1)(1 - \sigma)$$

$$= \frac{1}{\sigma \tau_2} (1 + \sigma_2)(1 + \sigma_1) \left(1 - \left(1 - \frac{1}{(1 + \sigma_1)(1 + \sigma_2)} \right) \right) = \frac{1}{\sigma \tau_2}$$

Für den Querstrom (d.h. den drehmomentbildenden Strom) folgt nun (bei feldorientierter Regelung und $\omega_R = 1/\sigma\tau_2$):

$$i_{l,q} = \omega_R \tau_2 i_{\mu,d} = \frac{1}{\sigma} \sqrt{2} \cdot I_0$$

Das zur Verfügung stehende Drehmoment beträgt dann:

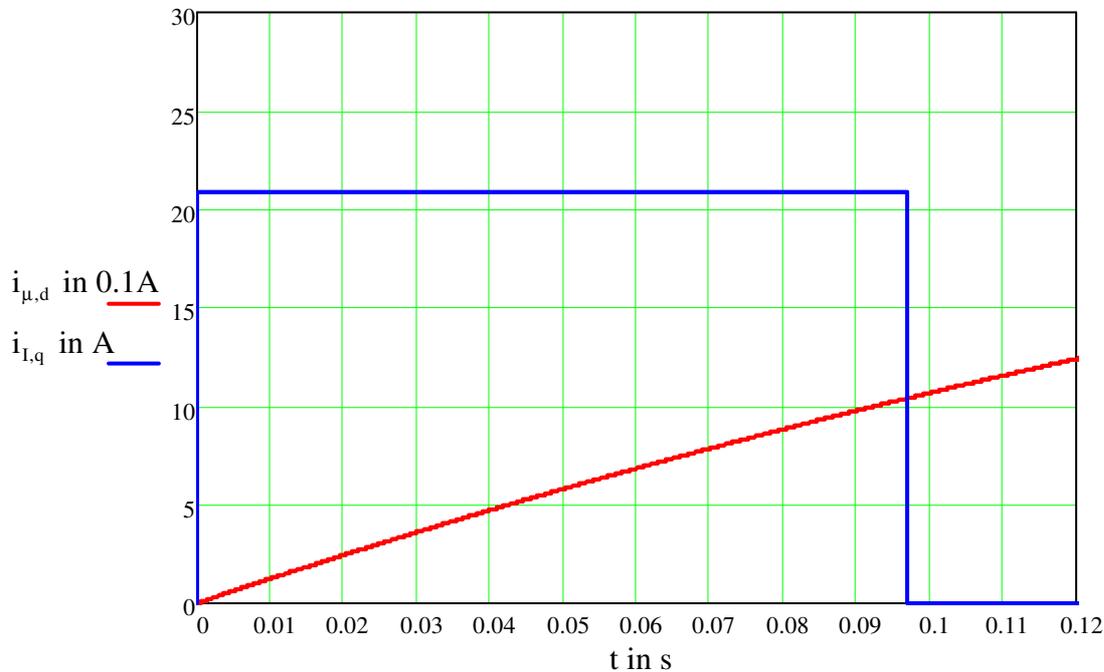
$$T = \frac{3}{2} p \frac{L_{1h}}{1 + \sigma_2} i_{\mu,d} i_{l,q} = \frac{3}{2} p \frac{L_{1h}}{1 + \sigma_2} \sqrt{2} \cdot I_0 \frac{1}{\sigma} \sqrt{2} \cdot I_0$$

$$= \frac{3p}{\omega_1} X_1 I_0^2 \frac{1 - \sigma}{\sigma} = \frac{3p}{\omega_1} \frac{U_1^2}{X_1 \frac{\sigma}{1 - \sigma}} = 2 \cdot T_{\text{kipp}}$$

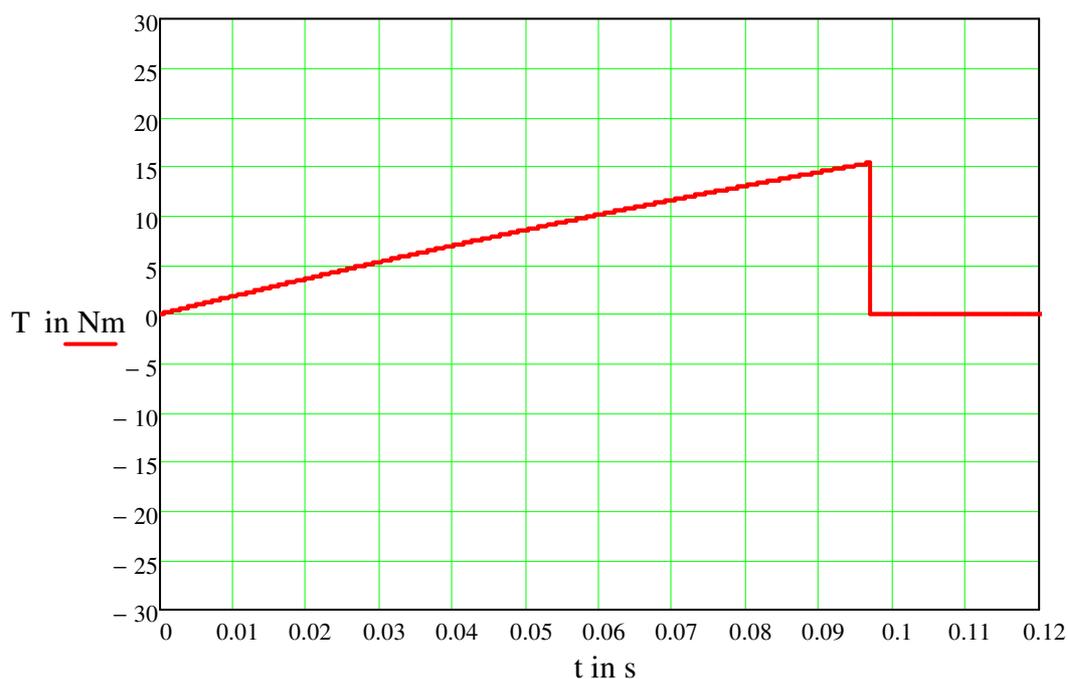
Man erhält also bei $\omega_R = 1/\sigma\tau_2$ während des feldorientiert geregelten Beschleunigungsvorganges das doppelte Drehmoment (gegenüber dem stationären Betrieb am symmetrischen, starren Drehspannungsnetz).

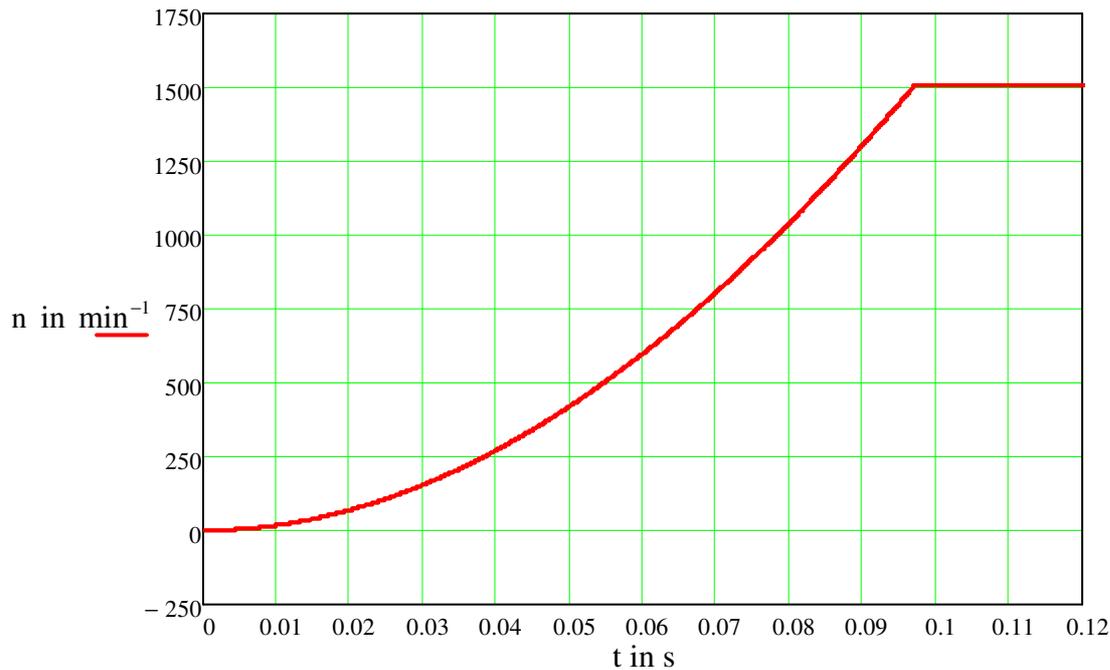
Legt man die gleichen Maschinendaten wie im Beispiel in Kapitel 4.2 („Schneller Hochlauf und Laststoß“) zugrunde, so ergeben sich die folgenden Zeitverläufe (dargestellt ist nur der Hochlauf; deshalb ist die Darstellung auf den Zeitbereich 0s bis 0.12s begrenzt).

Der flussbildende Strom $i_{\mu,d}$ (im folgenden Bild rot dargestellt) baut sich wegen der in diesem Beispiel relativ großen Zeitkonstanten τ_2 nur sehr langsam auf. Dennoch wird der drehmomentbildende Strom $i_{I,q}$ (im folgenden Bild blau dargestellt) bereits nach ca. 0,097s von seinem Nennwert auf null zurückgenommen, weil der Hochlauf bereits beendet ist.



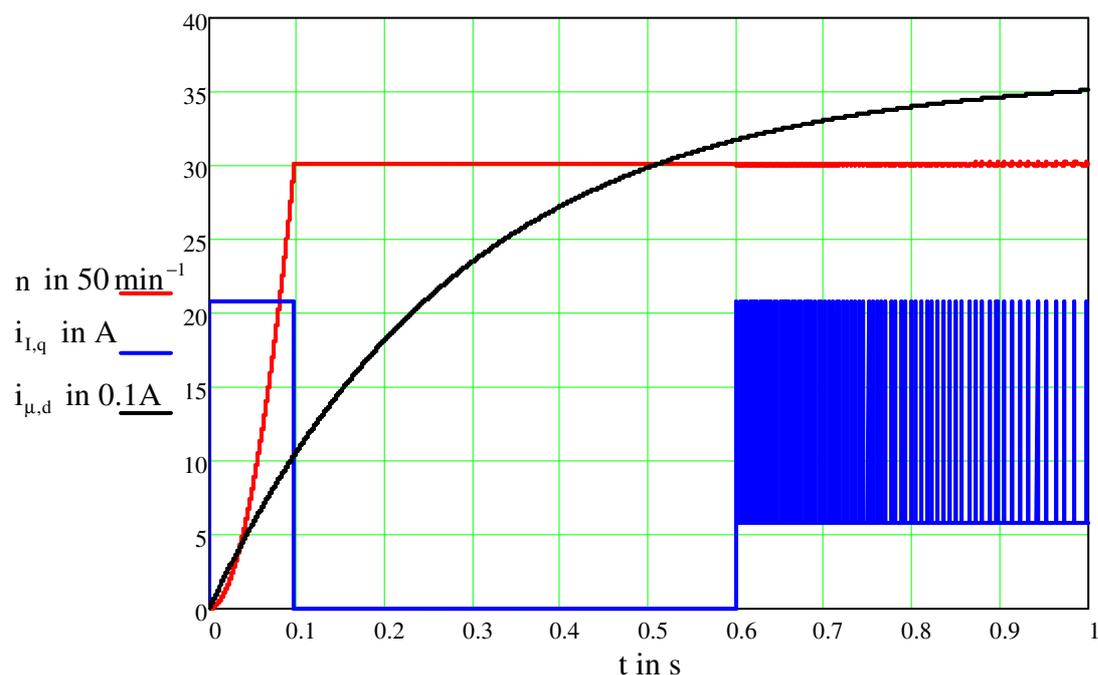
Die folgenden beiden Bilder zeigen Drehmoment und Drehzahl während dieser Hochlaufphase (Maßstäbe der vertikalen Achse wie in Kapitel 4.2). Das Drehmoment baut sich analog zum Magnetisierungsstrom $i_{\mu,d}$ auf, solange $i_{I,q} > 0$ ist. Die Hochlaufzeit ist deutlich verkürzt (gegenüber der Hochlaufzeit bei Betrieb am starren Netz), und es treten keine Schwingungen mehr auf.



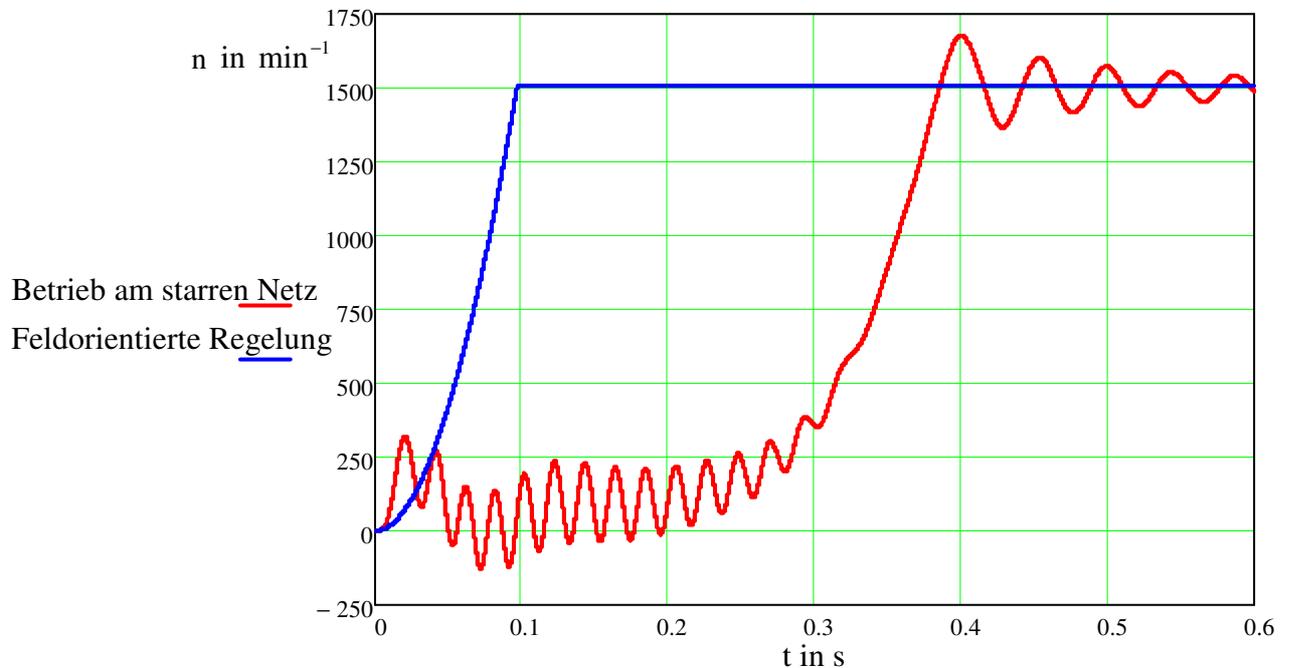


Das folgende Bild zeigt die Zeitfunktionen von Drehzahl, drehmomentbildendem Querstrom $i_{l,q}$ und feldbildendem Magnetisierungsstrom $i_{\mu,d}$:

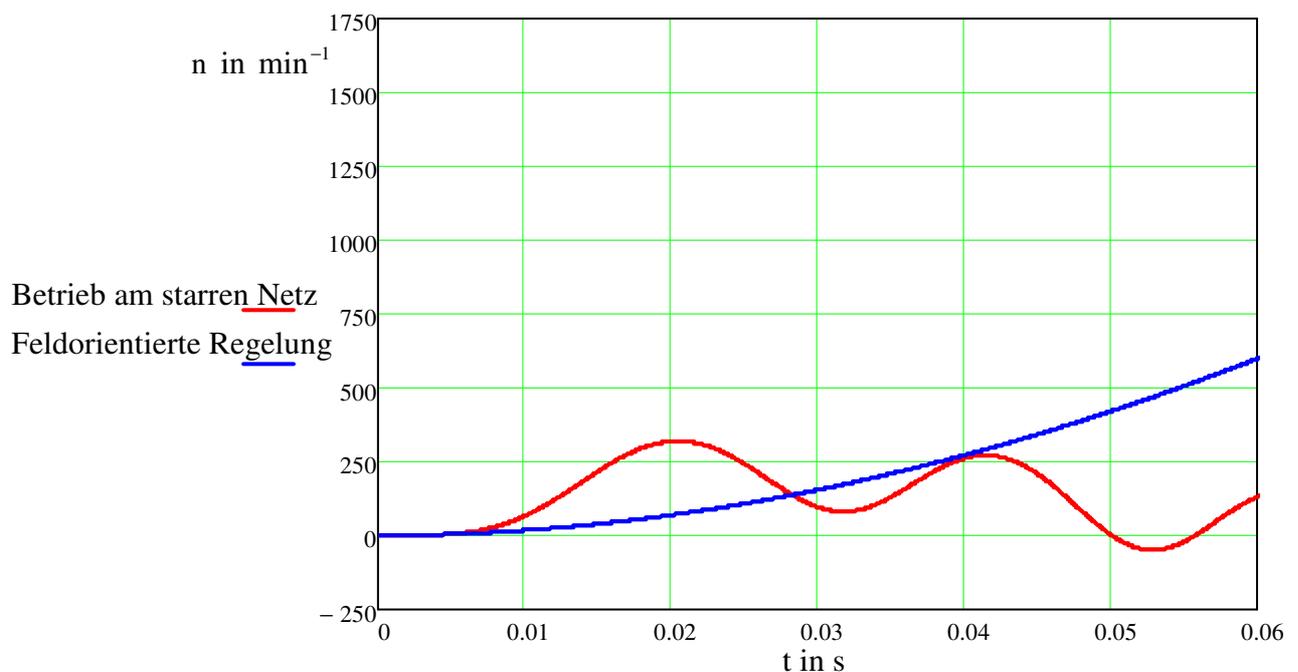
- Die nach 0.097s beendete Hochlaufphase ist gekennzeichnet durch $i_{l,q} = i_{l,q,max}$ und einem sehr steilen Drehzahlanstieg (der Magnetisierungsstrom baut sich wegen der großen Zeitkonstanten τ_2 nur sehr langsam auf; dies gilt auch für die weiteren Zeitbereiche).
- Nach beendetem Hochlauf und bis zur Aufschaltung des Lastmomentes nach 0.6s wird $i_{l,q} = 0$ gesetzt, die Drehzahl ist dann konstant.
- Nach Aufschalten der Last ist deutlich der Einfluss der Regelung zu sehen: leichte Drehzahlschwankungen hervorgerufen durch die Regelung des drehmomentbildenden Querstroms $i_{l,q}$ sind zu erkennen.



Zum besseren Vergleich sind im folgenden Bild noch einmal die Drehzahl-Zeit-Funktionen bei Hochlauf am starren Netz (rote Kennlinie) und bei feldorientiert geregeltm Hochlauf (blaue Kennlinie) dargestellt. Dargestellt ist der gesamte Hochlauf im Bereich 0s bis 0.6s; die Verbesserung der Dynamik gegenüber der Betriebsweise in Kapitel 4.2 ist eindrucksvoll. Der zusätzliche Aufwand zur Realisierung dieses Betriebsverhaltens besteht i.w. in einem leistungsfähigen Controller und dem leistungselektronischen Stellglied.



Das folgende Bild zeigt diesen Hochlaufvergleich noch einmal in einer Ausschnittvergrößerung für die ersten 0.06s:



Die Zeitfunktionen der drei Strangströme erhält man aus den Strömen $i_{1,d}$ und $i_{1,q}$ durch Rücktransformation. Mit der oben durchgeführten Herleitung gilt:

$$i_{1,d} = \sqrt{2} \cdot I_0 = \text{const.}$$

$$i_{1,q}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} \sqrt{2} \cdot I_0, & \text{für } 0s \leq t \leq 0.097s \\ 0, & \text{für } 0.097s \leq t \leq 0.6s \end{cases}$$

$$I_0 = \frac{U_1}{X_1}$$

Weiter gilt (siehe Kapitel 3.3):

$$i_{1,u} = i_{1,q} \cos(\alpha) + i_{1,d} \sin(\alpha)$$

$$i_{1,v} = i_{1,q} \cos\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) + i_{1,d} \sin\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$i_{1,w} = -i_{1,u} - i_{1,v}$$

mit dem zeitabhängigen Winkel

$$\alpha(t) = \int_0^t \omega_{\mu}(t') dt' \quad \text{mit} \quad \omega_{\mu}(t') = \omega_m(t') + \omega_R, \quad \omega_R = 1/\sigma\tau_2$$

Setzt man die Gleichungen ineinander ein, so erhält man insgesamt für die ersten 0.097s des Hochlaufes:

$$i_{1,u} = \sqrt{2} \cdot I_0 \left[\frac{1}{\sigma} \cos(\alpha) + \sin(\alpha) \right]$$

$$i_{1,v} = \sqrt{2} \cdot I_0 \left[\frac{1}{\sigma} \cos\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) \right]$$

$$i_{1,w} = -i_{1,u} - i_{1,v}$$

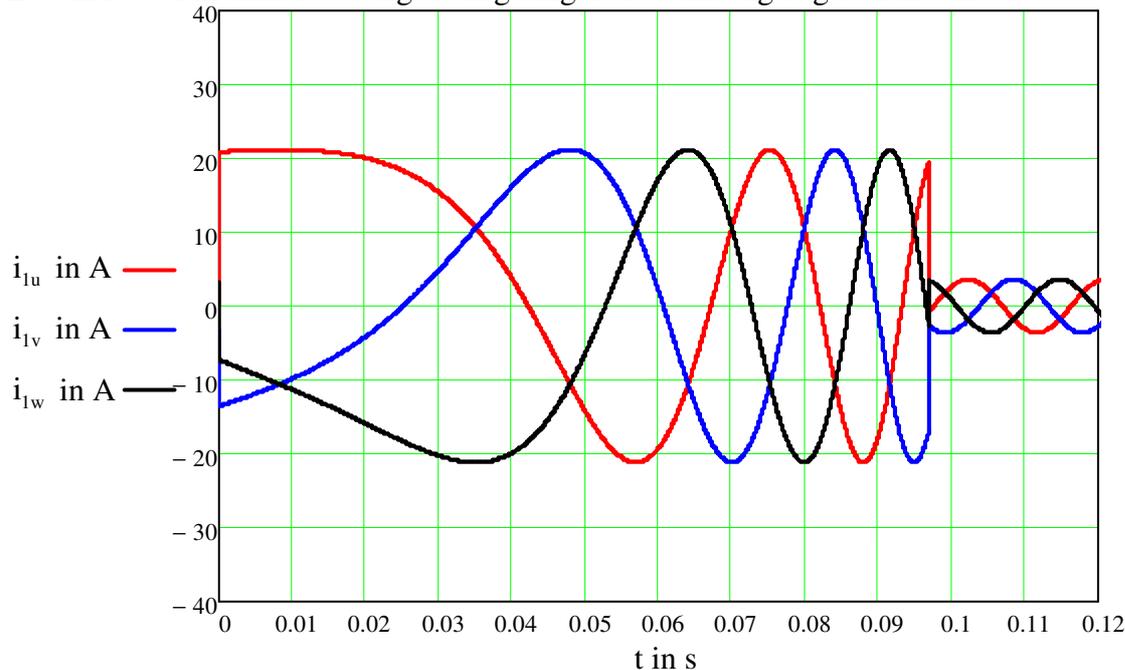
Diese Gleichungen sind gültig, so lange $i_{1,d}$ und $i_{1,q}$ auf ihren Maximalwerten ($\sqrt{2} \cdot I_0$ bzw. $1/\sigma \cdot \sqrt{2} \cdot I_0$) konstant gehalten werden. Bei Erreichen der gewünschten Drehzahl wird aber die Stromkomponente $i_{1,q}$ zu null gesetzt (siehe die Bilder auf den vorangegangenen Seiten), um damit auch das beschleunigende Drehmoment zu null werden zu lassen (der Magnetisierungszustand der Maschine wird unverändert beibehalten, d.h. $i_{1,d} = \sqrt{2} \cdot I_0 = \text{const.}$, der Magnetisierungsstrom $i_{\mu,d}$ baut sich über die Zeitkonstante τ_2 auf). Um jetzt mit Hilfe der Rücktransformation die Strangströme für den gesamten Zeitbereich zu berechnen, muss die zeitabhängige Stromkomponente $i_{1,q} = i_{1,q}(t)$, siehe oben, berücksichtigt werden. Man erhält dann:

$$i_{1,u} = i_{1,q}(t) \cos(\alpha) + i_{1,d} \sin(\alpha)$$

$$i_{1,v} = i_{1,q}(t) \cos\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) + i_{1,d} \sin\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$i_{1,w} = -i_{1,u} - i_{1,v}$$

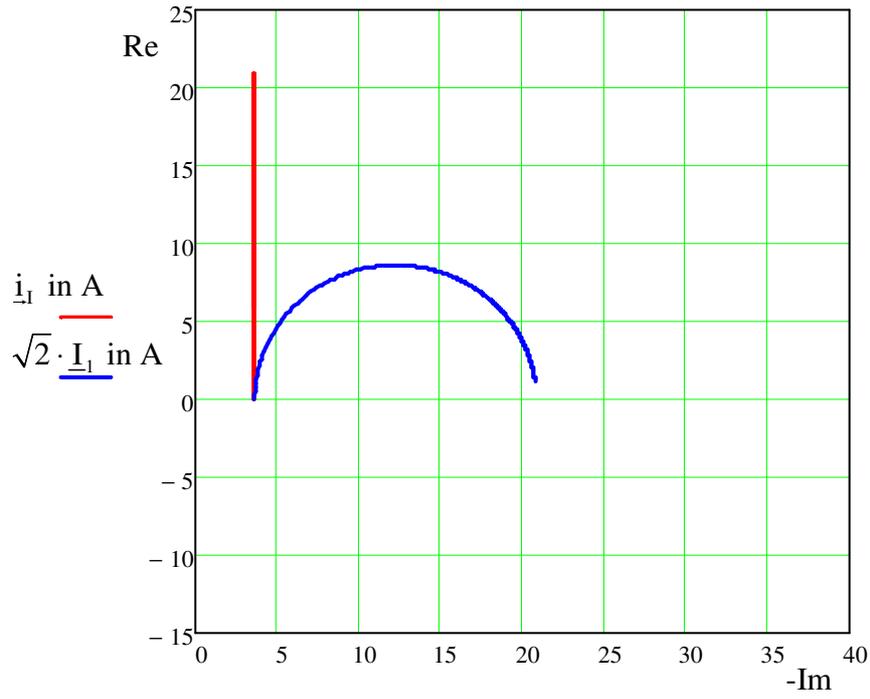
Die Zeitfunktionen dieser drei so berechneten Strangströme zu Beginn des Hochlaufes sind im folgenden Bild dargestellt (gleicher Maßstab der vertikalen Achse wie in Kapitel 4.2). Im Gegensatz zum Hochlauf in Kapitel 4.2 sind die Amplituden der drei Strangströme gleich und jeweils (während des Hochlaufes und während des stationären Betriebs) zeitlich konstant. Zudem ist der maximale Strangstrom geringer als beim unregelmäßigem Hochlauf.



Bereits an der Änderung der Frequenz der Ströme kann man den Eingriff der Leistungsendstufe erkennen; dies wäre bei Betrieb am starren Netz (konstante Spannung und Frequenz) nicht möglich.

Am Ende des Hochlaufes (bei etwa 0.097s) wird die Stromkomponente $i_{1,q}$ zu null gesetzt; dies macht sich in den Strangströmen in der gleichzeitigen Änderung von Amplitude und Phasenlage bemerkbar; die Frequenz ändert sich dann nicht mehr. Während des gesamten Betriebes bleibt als Schlupfwert der Kipp-Schlupf des stationären Falles eingestellt ($\omega_R = 1/\sigma\tau_2$); das Drehmoment wird über den Strom (genauer: die Stromkomponente $i_{1,q}$) eingestellt.

Das folgende Bild zeigt den Statorstrom-Raumzeiger bei feldorientiertem geregelterm Betrieb:



4.5 Feldorientierte Regelung der Asynchronmaschine mit eingprägten Statorspannungen

Die feldorientierte Regelung der Asynchronmaschine wurde bisher unter der Voraussetzung betrachtet, dass stromeinprgende Leistungssteller mit hohen Schaltfrequenzen und ausreichender Spannungsreserve sowie schnelle Controller zur Berechnung der Regelung zu Verfgung stehen. Bei Antrieben bis zu einer Leistung von einigen kW ist dies gegeben (Servoantriebe mit Transistorumrichtern und Taktfrequenzen im Bereich von bis zu 20 kHz). Bei grßeren Antrieben werden hufig Pulswechselrichter mit Spannungszwischenkreis und Taktfrequenzen von wenigen kHz benutzt. Hier sind die oben genannten Bedingungen nicht mehr erfllt, sodass die Statorspannungsgleichungen bercksichtigt werden mssen ($\tau_1 = L_1/R_1$):

$$\sigma\tau_1 \frac{di_{1,d}}{dt} + i_{1,d} = \frac{1}{R_1} \left(u_{1,d} + \omega_\mu \sigma L_1 i_{1,q} - (1-\sigma)L_1 \frac{di_{\mu,d}}{dt} \right)$$

$$\sigma\tau_1 \frac{di_{1,q}}{dt} + i_{1,q} = \frac{1}{R_1} \left(u_{1,q} - \omega_\mu \sigma L_1 i_{1,d} - (1-\sigma)L_1 \omega_\mu i_{\mu,d} \right)$$

Die beiden Regelstrecken sind ber die Statorstrme gekoppelt, also nicht unabhngig voneinander. Erwnscht ist jedoch gerade eine Entkopplung derart, dass die Stromregler unabhngig voneinander eingestellt werden knnen. Dies kann erreicht werden, indem zu den Reglerausgangsspannungen $u_{R,d}$ und $u_{R,q}$ Kompensationsspannungen mit negativem Vorzeichen so addiert werden, dass die Koppelspannungen zu null werden. Jetzt sehen die Regler entkoppelte Strecken. Bei der Kompensation wird angenommen, dass die Rotorflussverkettung konstant ist, d.h. dass $di_{\mu,d}/dt = 0$ ist. Es gilt dann:

$$u_{R,d} - \omega_\mu \sigma L_1 i_{1,q} = u_{1,d}$$

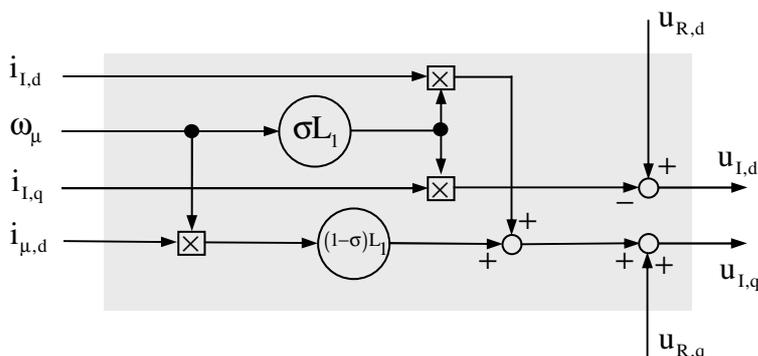
$$u_{R,q} + \omega_\mu \sigma L_1 i_{1,d} + (1-\sigma)L_1 \omega_\mu i_{\mu,d} = u_{1,q}$$

Dann folgt weiter:

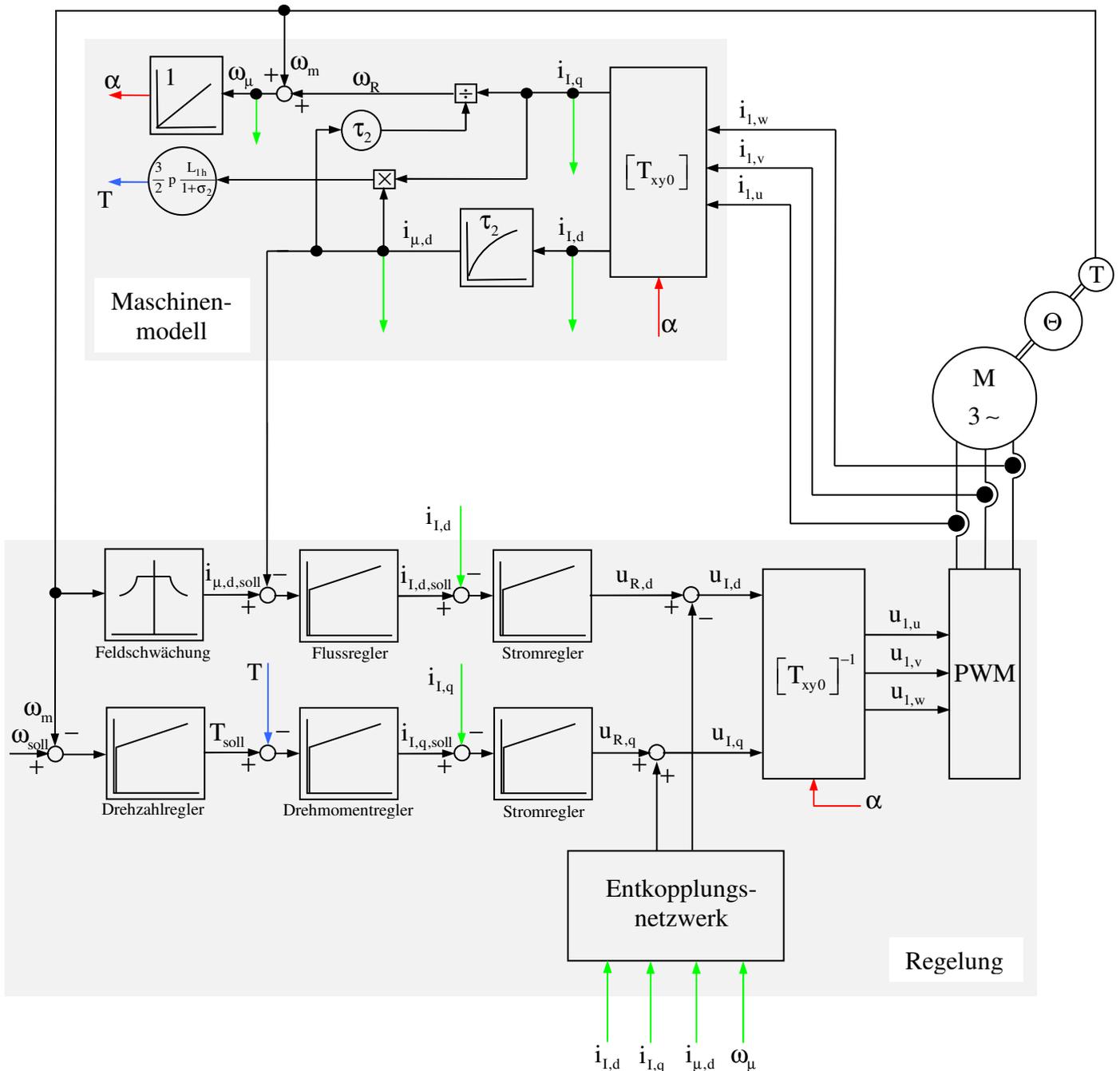
$$\sigma\tau_1 \frac{di_{1,d}}{dt} + i_{1,d} = \frac{1}{R_1} u_{R,d}$$

$$\sigma\tau_1 \frac{di_{1,q}}{dt} + i_{1,q} = \frac{1}{R_1} u_{R,q}$$

Das Strukturbild fr dieses Entkopplungsnetzwerk sieht wie folgt aus:



Das folgende Bild stellt nun die vollständige Schaltung einer feldorientiert geregelten Asynchronmaschine mit spannungseinprägendem Pulswechselrichter („PWM“) dar. Für Längs- und Querstrom wird jeweils eine Kaskadenregelung eingesetzt; diese Regelungen können mit Hilfe des Entkopplungsnetzwerkes unabhängig voneinander eingestellt werden. Die für die Regelung benötigten Istwerte für Größe und Lage des Rotorflusses werden mit Hilfe des Flussmodells berechnet.



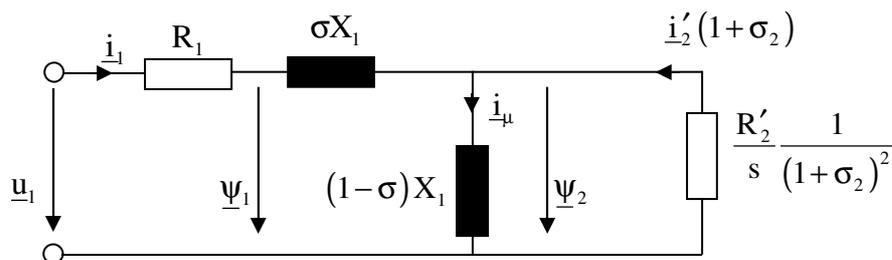
4.6 Feldorientierte Regelung der Asynchronmaschine ohne mechanischen Sensor

Die mechanische Drehzahl muss bei der feldorientierten Regelung der Asynchronmaschine bekannt sein: Sowohl zur Drehzahlregelung als auch für die Koordinatentransformation (der Winkel α wird mit Hilfe der mechanischen Drehzahl ermittelt) ist dieser Wert notwendig. Mechanische Drehzahlsensoren besitzen aber einige Nachteile, die man möglichst vermeiden möchte:

- Anfälligkeit gegen äußere Einwirkungen (Kräfte, Drehmomente, Temperaturen, Verschmutzung)
- Kosten
- Platzverbrauch
- Notwendigkeit eines freien Wellenendes

Deshalb ist es wünschenswert, die Drehzahl aus der Messung der Klemmengrößen der Maschine zu ermitteln (häufig wird diese Vorgehensweise auch als „sensorlose“ Drehzahlregelung bezeichnet).

Das Verfahren kann an Hand des folgenden Ersatzschaltbildes der Asynchronmaschine erläutert werden:



Für die Statorflussverkettung gilt:

$$\underline{\psi}_1 = \int (\underline{u}_1 - R_1 \underline{i}_1) dt + \underline{\psi}_{1,0}$$

und für die Rotorflussverkettung:

$$\underline{\psi}_2 = \underline{\psi}_1 - \sigma L_1 \underline{i}_1$$

Damit ist die Rotorflussverkettung nach Betrag und Phase bekannt:

- Die Phase ist der Winkel α , der für die Koordinatentransformationen benötigt wird. Durch Differenzierung erhält man die Kreisfrequenz ω_u , die zusammen mit dem Wert für ω_R zur Drehzahlregelung benötigt wird.
- Der Betrag der Rotorflussverkettung ist bereits aus dem in Kapitel 4.4 beschriebenen Flussmodell bekannt und wird zunächst nicht benötigt.
- Die obigen Gleichungen zur Ermittlung der Phase der Rotorflussverkettung werden nach Messung der Stranggrößen (Ströme und Spannungen) und Koordinatentransformation für eine zweisträngige Ersatzanordnung ausgewertet.

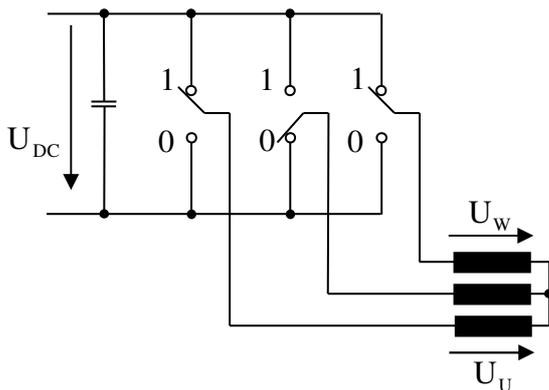
- Schwierigkeiten bei dieser Berechnung bereitet die Auswertung des Integrals bei sehr kleinen Spannungen und Frequenzen (Genauigkeit und Größe des Zeitintervalls); d.h. bei sehr kleinen Drehzahlen ist dieses Verfahren stark fehlerbehaftet. Das Verfahren arbeitet zuverlässig ab etwa 5% Nennfrequenz aufwärts.

Das Flussmodell aus Kapitel 4.4 (das ausschließlich auf Strommessung basiert) hatte die Schwäche der Temperaturabhängigkeit (Abhängigkeit von der Rotorzeitkonstanten τ_2); das in diesem Kapitel vorgestellte Modell besitzt die Schwäche der Ungenauigkeit bei kleinen Drehzahlen. Durch geschickte Kombination lässt sich der Bereich des zuverlässigen Betriebs ohne mechanischen Drehzahlsensor deutlich erweitern.

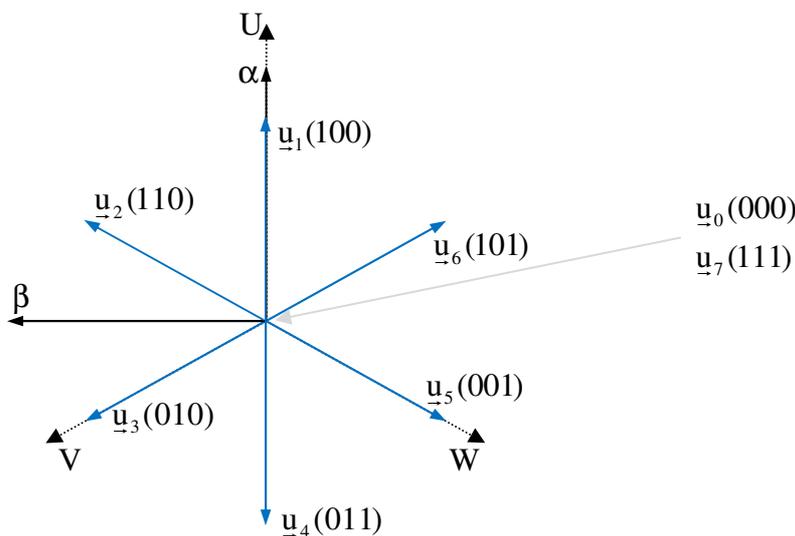
4.7 Direct Torque Control

Die Direkte Selbstregelung (DSR; bzw. Direct Torque Control, DTC) wurde nahezu gleichzeitig zu Beginn der 1980er Jahre in ähnlicher Form in Deutschland (Manfred Depenbrock) und Japan (Isao Takahashi und Toshihiko Noguchi) für Asynchronmaschinen entwickelt. Inzwischen wird dieses Prinzip auch bei anderen Drehfeldmaschinen angewendet. Das Prinzip der DTC beruht darauf, über die Wahl der Strangspannungen direkt den Fluss und das Drehmoment der Maschine zu beeinflussen.

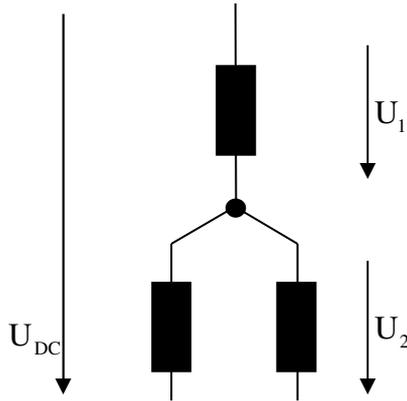
Zur Erläuterung wird zunächst ein einfaches Schaltermodell für die Leistungselektronik und eine Maschine in Sternschaltung betrachtet:



Die durch die drei Schalter mit jeweils 2 möglichen Schalterstellungen („0“ und „1“) definierten 8 Spannungen sind im folgenden Bild dargestellt; die Spannungen $\underline{u}_0(000)$ und $\underline{u}_7(111)$ werden als Null-Vektoren im Ursprung des Koordinatensystems eingezeichnet:



Lässt man nur die hier gezeigten Schalterstellungen der Leistungselektronik zu, so ergibt sich (bis auf die Schaltungen „000“ und „111“) zu jedem Zeitaugenblick eine Reihenschaltung eines Stranges der Maschine mit der Parallelschaltung der anderen beiden Stränge (wie im folgenden Bild dargestellt):



Es folgt mit der Strangimpedanz Z und dem Gesamtstrom I :

$$\begin{aligned} U_{DC} &= U_1 + U_2 \\ &= Z \cdot I + \frac{Z \cdot Z}{Z + Z} I \\ &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot Z \cdot I \\ &= \frac{3}{2} U_1 \end{aligned}$$

Über einem Strang fällt also immer $2/3$ der Zwischenkreisspannung U_{DC} ab, und über der Parallelschaltung der anderen beiden Stränge $1/3$ der Zwischenkreisspannung. Dann gilt z.B. für den Spannungsraumzeiger \underline{u}_1 (siehe die Definition des komplexen Raumzeigers in Kapitel 3.3):

$$\begin{aligned} \underline{u}_1 &= \frac{2}{3} (u_u(t) + \underline{a} \cdot u_v(t) + \underline{a}^2 \cdot u_w(t)) \cdot e^{-j\alpha(t)} \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} U_{DC} - \frac{1}{3} U_{DC} (\underline{a} + \underline{a}^2) \right) \cdot e^{j0} \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} U_{DC} + \frac{1}{3} U_{DC} \right) \\ &= \frac{2}{3} U_{DC} \end{aligned}$$

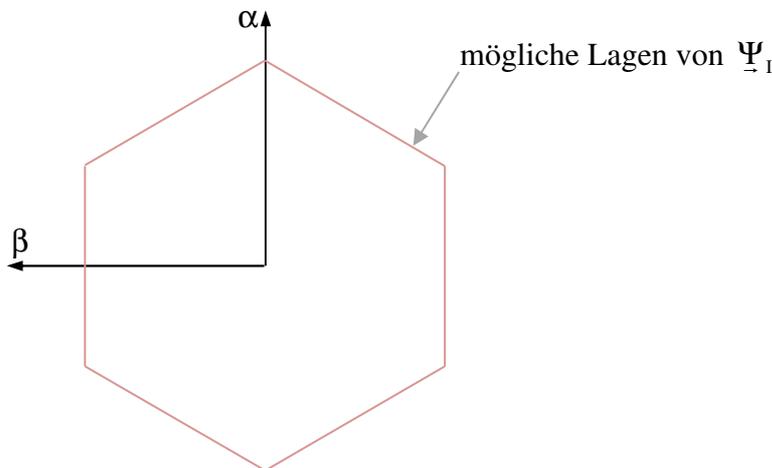
Die anderen Raumzeiger werden analog berechnet. Zusammenfassend können die Strangspannungen der Maschine dann wie folgt als Raumzeiger beschrieben werden:

$$\underline{u}_v = \begin{cases} \frac{2}{3} U_{DC} \cdot e^{j(v-1)\frac{\pi}{3}} & \text{falls } v = 1, \dots, 6 \\ 0 & \text{falls } v = 0, 7 \end{cases}$$

Bei Wahl eines ruhenden Koordinatensystem ($\alpha(t) = \text{const.}$, hier speziell $\alpha(t) = 0$) ergibt sich aus der Statorspannungsgleichung in Raumzeigerdarstellung (siehe Kapitel 3.6) die Statorflussverkettung wie folgt:

$$\underline{u}_1 = R_1 \cdot \dot{\underline{i}}_1 + \frac{d}{dt} \underline{\Psi}_1 \Rightarrow \underline{\Psi}_1 = \int (\underline{u}_1 - R_1 \cdot \dot{\underline{i}}_1) dt$$

Bei vernachlässigbarem Widerstand R_1 führen die Statorspannungsraumzeiger \underline{u}_1 bis \underline{u}_6 also zu einer kontinuierlichen Bewegung des Flussraumzeigers, während die Spannungsraumzeiger \underline{u}_0 und \underline{u}_7 den Flussraumzeiger anhalten. Werden die Spannungsraumzeiger \underline{u}_1 bis \underline{u}_6 während einer Periode nur jeweils einmal geschaltet,¹⁶ so bewegt sich der Flussraumzeiger auf einem Hexagon. Damit ist die erste Aufgabe (Einstellung des Flusses in der Maschine) erfüllt.



Das Drehmoment berechnet sich nach Kapitel 3.9 zu

$$T = \frac{3}{2} p \cdot \text{Im} \{ \dot{\underline{i}}_1 \cdot \underline{\Psi}_1^* \}$$

Mit

$$\begin{aligned} \underline{\Psi}_1 &= L_1 \cdot \dot{\underline{i}}_1 + L_{1h} \cdot \dot{\underline{i}}_{II} \\ &= L_1 \cdot \dot{\underline{i}}_1 + L_{1h} \frac{L_2}{L_2} \cdot \dot{\underline{i}}_{II} \\ &= \frac{L_{1h}}{L_2} (L_2 \cdot \dot{\underline{i}}_{II} + L_{1h} \cdot \dot{\underline{i}}_1) + L_1 \cdot \dot{\underline{i}}_1 - \frac{L_{1h}}{L_2} L_{1h} \cdot \dot{\underline{i}}_1 \\ &= \frac{L_{1h}}{L_2} \underline{\Psi}_{II} + \left((1 + \sigma_1) - \frac{1}{1 + \sigma_2} \right) L_{1h} \cdot \dot{\underline{i}}_1 \\ &= \frac{L_{1h}}{L_2} \underline{\Psi}_{II} + \left(1 - \frac{1}{(1 + \sigma_2)(1 + \sigma_1)} \right) L_1 \cdot \dot{\underline{i}}_1 \\ &= \frac{L_{1h}}{L_2} \underline{\Psi}_{II} + \sigma L_1 \cdot \dot{\underline{i}}_1 \end{aligned}$$

folgt weiter

¹⁶ Ein solcher Betrieb wird „Grundfrequenztaktung“ genannt.

$$T = \frac{3}{2} \cdot \frac{p}{\sigma L_1} \cdot \text{Im} \left\{ \left(\underline{\Psi}_I - \frac{L_{1h}}{L_2} \underline{\Psi}_{II} \right) \cdot \underline{\Psi}_I^* \right\}$$

Mit

$$\text{Im} \{ \underline{\Psi}_I \cdot \underline{\Psi}_I^* \} = 0$$

folgt schließlich

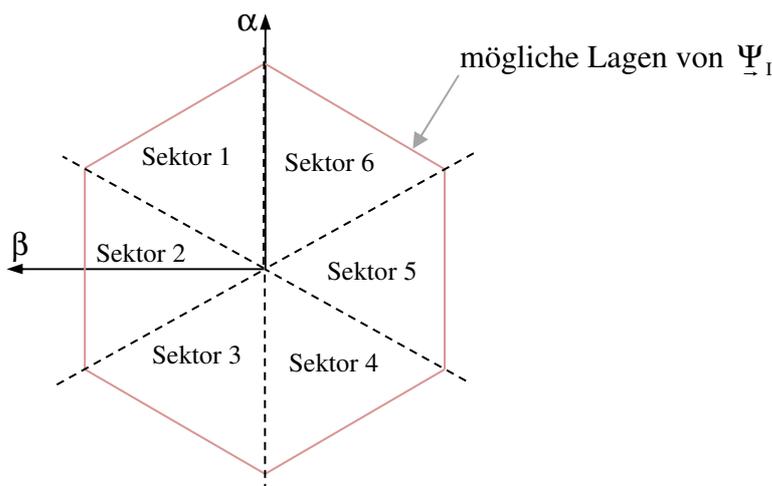
$$\begin{aligned} T &= -\frac{3}{2} \cdot \frac{p}{\sigma L_1} \cdot \frac{L_{1h}}{L_2} \cdot \text{Im} \{ \underline{\Psi}_{II} \cdot \underline{\Psi}_I^* \} \\ &= -\frac{3}{2} p \cdot \frac{1-\sigma}{\sigma L_{1h}} \cdot \text{Im} \{ \underline{\Psi}_{II} \cdot \underline{\Psi}_I^* \} \end{aligned}$$

Für die Drehmomentbildung kommt es also auf die Amplituden von Statorflussverkettung und Rotorflussverkettung und die relative Phasenlage dieser Flussverkettungen an.

Für die folgende Betrachtung wird angenommen, dass die Geschwindigkeit und die Amplitude der Rotorflussverkettung während eines Schaltzustandes des Statorspannungsraumzeigers konstant ist. Dann werden die Statorflussverkettung und das Drehmoment direkt über die Wahl des Statorspannungsraumzeigers eingestellt. Zur Wahl des im aktuellen Betriebszustandes des Motors notwendigen Statorspannungsraumzeigers müssen folgende Schritte durchgeführt werden:

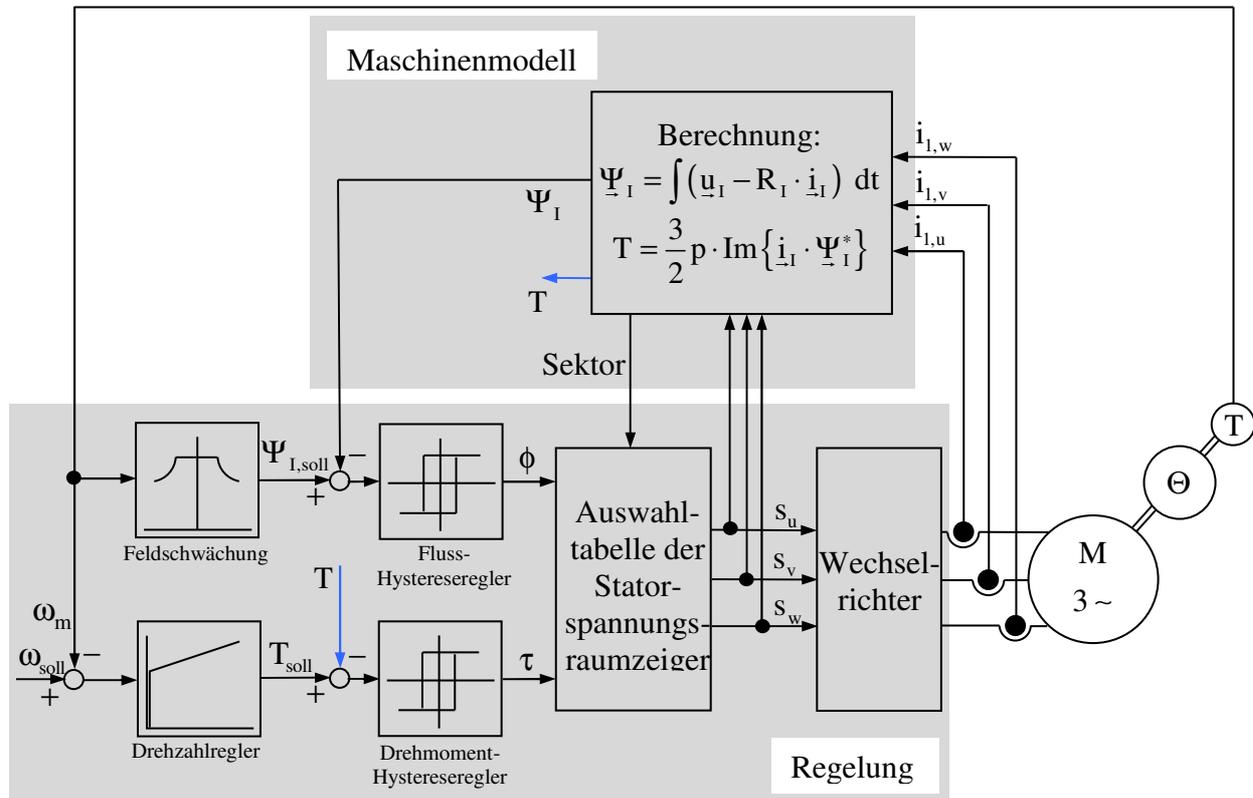
- Einteilung der α - β -Ebene in Sektoren;
- Berechnung, in welchem Sektor sich die Statorflussverkettung augenblicklich befindet;
- Ermittlung, ob Statorflussverkettung und Drehmoment erhöht bzw. verringert werden müssen;
- Einstellung des hieraus folgenden Statorspannungsraumzeigers.

Die Sektoren in der α - β -Ebene können z.B. wie folgt gewählt werden:



Mit Hilfe eines Maschinenmodells können nun zu jedem Zeitpunkt die aktuelle Lage und Größe der Statorflussverkettung und die Größe des Drehmomentes berechnet werden. Durch Vergleich mit den entsprechenden Sollwerten ergeben sich Differenzen, die auf je einen

Hystereseregler gegeben werden. Aus der aktuellen Lage der Statorflussverkettung und der Notwendigkeit, Statorflussverkettung und Drehmoment zu erhöhen oder zu erniedrigen (d.h. Ausgänge der Hystereseregler gleich „1“ oder „-1“), ergibt sich der nächste einzustellende Statorspannungsraumzeiger mit Hilfe einer Auswahltabelle (siehe unten). Entsprechende Schaltsignale s_u , s_v und s_w steuern die Leistungshalbleiter des Wechselrichters an. Das zugehörige Blockschaltbild ist im folgenden Bild dargestellt.



Die Auswahltabelle besitzt hierbei folgenden Aufbau:

ϕ	τ	Sektor 1	Sektor 2	Sektor 3	Sektor 4	Sektor 5	Sektor 6
1	1	\underline{u}_2	\underline{u}_3	\underline{u}_4	\underline{u}_5	\underline{u}_6	\underline{u}_1
1	-1	\underline{u}_6	\underline{u}_1	\underline{u}_2	\underline{u}_3	\underline{u}_4	\underline{u}_5
-1	1	\underline{u}_3	\underline{u}_4	\underline{u}_5	\underline{u}_6	\underline{u}_1	\underline{u}_2
-1	-1	\underline{u}_5	\underline{u}_6	\underline{u}_1	\underline{u}_2	\underline{u}_3	\underline{u}_4

Die wesentlichen Vorteile von „Direct Torque Control“ gegenüber der feldorientierten Regelung sind:

- Der Rechenaufwand im Mikrocontroller ist deutlich verringert, da keine Koordinatentransformationen benötigt werden.

- Fluss und Drehmoment werden über einfache Hystereseregler gestellt; es werden keine Stromregler und keine Pulsweitenmodulation benötigt. Folglich ist die Schaltfrequenz der Leistungshalbleiter relativ niedrig.
- Es besteht eine geringere Sensitivität gegenüber Änderungen der Rotorparameter, weil nur Fluss- und Drehmomentberechnungen benötigt werden.
- Zur Drehmoment- und Flussregelung ist keine Drehzahlerfassung erforderlich; bei der feldorientierten Regelung war dies zur Ermittlung des Winkels α notwendig.
- Je nach Genauigkeit des Maschinenmodells kann auch für die Drehzahlregelung auf den Drehzahlsensor verzichtet werden.
- Im Allgemeinen ist die Drehmomentregelung bei der DTC schneller als bei der feldorientierten Regelung.

Nachteile der DTC sind dagegen:

- Aufgrund der fehlenden Stromregler wird keine aktive Beeinflussung der Stromkurvenform durchgeführt. Dies führt zu größeren Abweichungen von der idealen Sinusform, was zu erhöhten Verlusten in der Asynchronmaschine führt.
- Die Genauigkeit der Fluss- und Drehmomentberechnung hängt bei nicht-sinusförmigen Strömen stark von der Genauigkeit und Häufigkeit der Strommessung und der Zykluszeit des Reglers ab.
- Die Drehmomentwelligkeit, die von der Stromkurvenform und der gewählten Breite des Hysteresereglers abhängt, ist i.a. größer als bei der feldorientierten Regelung. Dies führt zu mechanischen Belastungen und akustischen Geräuschen.
- Die Schaltfrequenz der Leistungshalbleiter ist nicht fest vorgegeben und ändert sich mit der Drehzahl der Maschine; damit sind auch die Schaltverluste der Leistungshalbleiter drehzahlabhängig.

Insgesamt ist die DTC gekennzeichnet durch Einfachheit, Robustheit, niedrige Schaltverluste und schnelle Drehmomentregelung. Diese Eigenschaften machen diese Art der Regelung besonders interessant für drehzahlvariable Antriebe hoher Leistung.

Die bisher vorgestellte DTC kann erweitert werden, z.B. durch

- Messung der Zwischenkreisspannung und Berücksichtigung bei der Berechnung der Statorspannungsraumzeiger;
- hochfrequentes Schalten (z.B. PWM) und Nutzung aller Spannungsvektoren \underline{u}_0 bis \underline{u}_7 (hierdurch kann die Bewegung des Flussraumzeigers mit zunehmender Frequenz immer mehr einer Kreisform angenähert werden);
- Erhöhung der Anzahl der Sektoren;
- Hystereseregler mit 3 Stufen (zusätzliche Stufe „0“, d.h. keine Änderung von Fluss bzw. Drehmoment).

Durch diese Maßnahmen verbessern sich die technischen Eigenschaften (z.B. Stromkurvenform und Drehmomentwelligkeit), allerdings steigt auch der Aufwand.

5 Dynamisches Verhalten der Synchronmaschine

5.1 Schwingungen der Synchronmaschine, Dämpferwicklung

Es soll nun zunächst berechnet werden, wie sich die Synchronmaschine verhält, wenn sich der Polradwinkel ϑ um kleine Ausschläge $\Delta\vartheta$ in der Nähe des Arbeitspunktes (Index „0“) ändert. Da nur kleine Änderungen betrachtet werden, kann in diesem Abschnitt auf die Beschreibung der Synchronmaschine für den stationären Betrieb zurückgegriffen werden. Es gilt:

$$\vartheta = \vartheta_0 + \Delta\vartheta$$

Das Antriebsmoment der Turbine ist im stationären Betrieb gleich dem Moment der Synchronmaschine im betrachteten Arbeitspunkt:

$$T_A = T_{\text{kipp}} \sin(\vartheta_0), \quad T_{\text{kipp}} = \frac{3p}{\omega_1} \frac{U_{N,\text{Strang}} U_P}{X}$$

Das Drehmoment des Synchrongenerators ist:

$$T_{\text{Gen}} = T_{\text{kipp}} \sin(\vartheta)$$

Das Beschleunigungsmoment ist

$$T_{\text{acc}} = \Theta \frac{d\Omega}{dt},$$

wobei Θ das Trägheitsmoment aller rotierenden Massen ist und die Synchronmaschine mit einer Drehzahl $\Omega \neq 2\pi n_0$ läuft:¹⁷

$$\Omega = 2\pi n_0 + \frac{d\vartheta/p}{dt}$$

Aus dem Momentengleichgewicht

$$T_A - T_{\text{Gen}} = T_{\text{acc}}$$

folgt dann die Differentialgleichung:

$$T_{\text{kipp}} \sin(\vartheta_0) - T_{\text{kipp}} \sin(\vartheta) = \Theta \frac{d\Omega}{dt} = \frac{\Theta}{p} \frac{d^2\vartheta}{dt^2}$$

Diese Differentialgleichung wird durch eine Taylor-Entwicklung mit Abbruch nach dem ersten Glied linearisiert:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!} \Delta x + \dots$$

$$\Rightarrow \sin(\vartheta) = \sin(\vartheta_0 + \Delta\vartheta) \approx \sin(\vartheta_0) + \Delta\vartheta \cos(\vartheta_0)$$

Außerdem gilt:

¹⁷ Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass sich die Statorkreisfrequenz ω_1 immer an die aktuelle Drehzahl der Maschine anpasst. Ansonsten wäre die Frequenzbedingung zur Erzeugung eines zeitlich konstanten Drehmomentes (siehe Kapitel „Drehfeldtheorie“) nicht mehr erfüllt und man erhielte ein reines Pendelmoment. Der Einfluss dieser Frequenzänderung auf andere Daten (z.B. auf das Kippmoment) wird vernachlässigt; ebenso wird die Reibung vernachlässigt.

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \frac{d^2(\vartheta_0 + \Delta\vartheta)}{dt^2} = \frac{d^2\Delta\vartheta}{dt^2}$$

Die Differentialgleichung wird dann zu:

$$T_{\text{kippl}} \sin(\vartheta_0) - T_{\text{kippl}} (\sin(\vartheta_0) + \Delta\vartheta \cos(\vartheta_0)) = \frac{\Theta}{p} \frac{d^2\Delta\vartheta}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\Theta}{p} \frac{d^2\Delta\vartheta}{dt^2} + T_{\text{kippl}} \Delta\vartheta \cos(\vartheta_0) = 0$$

Mit dem synchronisierenden Moment im Arbeitspunkt $T_{\text{syn},0} = T_{\text{kippl}} \cos(\vartheta_0)$ erhält man:

$$\frac{d^2\Delta\vartheta}{dt^2} + \frac{T_{\text{syn},0}}{\Theta/p} \Delta\vartheta = 0$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist eine ungedämpfte, harmonische Schwingung:

$$\Delta\vartheta = \sin(\Omega_{e,0} t)$$

mit der mechanischen Eigenfrequenz¹⁸

$$\Omega_{e,0} = 2\pi f_{e,0} = \sqrt{\frac{T_{\text{syn},0}}{\Theta/p}}$$

Die Frequenz dieser mechanischen Schwingung der Synchronmaschine liegt häufig im Bereich $f_{e,0} = 1 \dots 2 \text{ Hz}$.

Im Betrieb können bei der Synchronmaschine durch elektrische oder mechanische Laständerungen Pendelschwingungen auftreten, die mit Stromschwankungen verbunden sind. Insbesondere bei Antrieben mit ungleichförmigem Moment (z.B. Dieselmotor oder Kolbenverdichter) können diese Schwingungen gefährlich hohe Werte annehmen, wenn die Anregung in der Nähe der Eigenfrequenz erfolgt. Es können sich auch mehrere Generatoren gegenseitig bis zum Außertrittfallen anregen.

Zur Dämpfung dieser Schwingungen werden alle Synchronmaschinen mit einer Dämpferwicklung versehen. Die Wirkung einer solchen Dämpferwicklung ist vergleichbar mit dem Kurzschlussläufer der Asynchronmaschine.

Bei Turbogeneratoren werden in die Nuten des Rotors zusätzlich zur Erregerwicklung Dämpferstäbe eingelegt, die an den Enden kurzgeschlossen sind (man kann auch leitfähige Nutverschlusskeile als Dämpferstäbe verwenden). Massive Rotoren wirken, da sich Wirbelströme ausbreiten können, ebenfalls dämpfend. Bei Schenkelpolmaschinen werden in die Pole zusätzliche Nuten mit Stäben eingelassen, die wiederum an den Enden kurzgeschlossen sind.

Zur Berechnung der Dämpferwicklung kann man von den Gleichungen der Asynchronmaschine ausgehen (das Drehmoment ist negativ, weil es bremsend wirkt):

¹⁸ Im mechanischen Analogon entspricht das synchronisierende Moment der Federsteifigkeit, das durch die Polpaarzahl dividierte Trägheitsmoment entspricht der Masse.

$$\frac{T_D}{T_{\text{kipp,Asyn}}} = \frac{-2}{\frac{s}{s_{\text{kipp}}} + \frac{s_{\text{kipp}}}{s}}, \quad T_{\text{kipp,Asyn}} = \frac{3p}{\omega_1} \frac{U_1^2}{2X_1} \frac{\sigma}{1-\sigma}$$

$$s_{\text{kipp}} = \frac{R'_2 (1+\sigma_1)^2}{X_1} \frac{\sigma}{1-\sigma}$$

In der Nähe der Synchrondrehzahl (es werden kleine Ausschläge $\Delta\vartheta$ betrachtet) gilt:

$$\frac{s}{s_{\text{kipp}}} \ll \frac{s_{\text{kipp}}}{s}$$

Damit gilt:

$$T_D \approx -T_{\text{kipp,Asyn}} \frac{2s}{s_{\text{kipp}}}$$

Den Schlupf kann man schreiben als:

$$s = \frac{\Omega_0 - \Omega}{\Omega_0} = \frac{\Omega_0 - \left(\Omega_0 + \frac{d\vartheta/p}{dt} \right)}{\Omega_0} = -\frac{1}{p\Omega_0} \frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{1}{p\Omega_0} \frac{d\Delta\vartheta}{dt}$$

Damit ergibt sich für das Dämpfungsmoment:

$$T_D = \frac{2T_{\text{kipp,Asyn}}}{s_{\text{kipp}} p\Omega_0} \frac{d\Delta\vartheta}{dt} = D \frac{d\Delta\vartheta}{dt}$$

Setzt man nun dieses Dämpfungsmoment in die Differentialgleichung ein, so erhält man:

$$\frac{d^2\Delta\vartheta}{dt^2} + \frac{D}{\Theta/p} \frac{d\Delta\vartheta}{dt} + \frac{T_{\text{syn},0}}{\Theta/p} \Delta\vartheta = 0$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist eine gedämpfte Schwingung der Form:

$$\Delta\vartheta = e^{-\frac{t}{\tau_D}} \sin(\Omega_e t)$$

mit der mechanischen Eigenfrequenz

$$\Omega_e = \sqrt{\Omega_{e,0}^2 - \frac{1}{\tau_D^2}},$$

der Dämpfung

$$D = \frac{2T_{\text{kipp,Asyn}}}{s_{\text{kipp}} p\Omega_0} = \frac{2 \frac{3p}{\omega_1} \frac{U_1^2}{2X_1} \frac{\sigma}{1-\sigma}}{\frac{R'_2 (1+\sigma_1)^2}{X_1} \frac{\sigma}{1-\sigma} p\Omega_0} = \frac{\frac{3p}{\omega_1} U_1^2}{R'_2 (1+\sigma_1)^2 p\Omega_0} = \frac{3p}{\omega_1^2} \frac{U_1^2}{R'_2 (1+\sigma_1)^2}$$

und der Zeitkonstanten

$$\tau_D = \frac{2\Theta}{pD}$$

Damit die Wirkung der Dämpferwicklung möglichst groß ist und durch Laständerungen angeregte Schwingungen möglichst schnell abklingen, muss die Zeitkonstante τ_D klein bzw. die Dämpfung D groß sein. Das bedeutet, dass R'_2 klein sein muss. Dies wiederum bedeutet einen hohen Kupferaufwand für den Dämpferkäfig.

Neben der Schwingungsdämpfung hat die Dämpferwicklung noch zwei weitere Aufgaben:

- Bei unsymmetrischer Belastung entsteht ein gegenläufiges Drehfeld mit Oberschwingungen in Statorspannung und –strom, was zusätzliche Eisen- und Stromwärmeverluste bewirkt. In der Dämpferwicklung können nun Ströme fließen, die nach der Lenz'schen Regel ihrer Ursache entgegenwirken, so dass diese Oberschwingungen und Verluste stark reduziert werden.
- Bei ausreichender Wärmekapazität der Dämpferwicklung kann die Synchronmaschine wie eine Asynchronmaschine mit dem Dämpferkäfig anlaufen. Da das Statorfeld während des Hochlaufes wegen des großen Schlupfes hohe Spannungen in der offenen Erregerwicklung induzieren würde, schließt man die Erregerwicklung zunächst kurz. Bei Erreichen der Leerlaufdrehzahl wird die Erregerspannung aufgeschaltet und die Maschine wird ruckartig in den Synchronismus gezogen. Dies ist mit Stromstößen und Pendelmomenten verbunden, sodass dieser Hochlauf nur für kleine Leistungen angewendet werden kann.

5.2 Stationärer Betrieb der Vollpol-Synchronmaschine in Raumzeigerdarstellung

Ausgehend von den Gleichungen in Raumzeigerdarstellung (die ja auch für den dynamischen Betrieb elektrischer Maschinen gelten) soll zunächst der stationäre Betrieb der symmetrischen Vollpolmaschine berechnet werden.

Der Luftspalt wird konstant angenommen; der Rotor sei symmetrisch aufgebaut, d.h. er trägt zwei gleiche Wicklungen, die um 90° elektrisch versetzt sind. Die Erregerwicklung wird über Schleifringe mit Gleichstrom versorgt, die Dämpferwicklung ist kurzgeschlossen.

Nach Kapitel 3.6 und 3.9 gilt in Raumzeigerdarstellung:

$$\underline{u}_I(t) = R_I \cdot \underline{i}_I(t) + \frac{d\underline{\psi}_I(t)}{dt} + j \cdot \frac{d\alpha}{dt} \cdot \underline{\psi}_I(t)$$

$$\underline{u}_{II}(t) = R_{II} \cdot \underline{i}_{II}(t) + \frac{d\underline{\psi}_{II}(t)}{dt} + j \cdot \frac{d(\alpha - \gamma)}{dt} \cdot \underline{\psi}_{II}(t)$$

$$T(t) = \frac{3}{2} p \cdot \text{Im}\{\underline{i}_I(t) \cdot \underline{\psi}_I^*(t)\}$$

Im Folgenden wird ein mit dem Rotor synchron rotierendes Koordinatensystem gewählt: $\omega_K = d\alpha/dt = d\gamma/dt = \omega_m$. Dieses Koordinatensystem wird, da es läuferflussorientiert ist, mit den Achsenbezeichnungen „d“ und „q“ versehen (statt „y“ und „x“). Dem Stator wird dann das System I,d und I,q zugeordnet, dem Rotor das System II,d und II,q. Die Aufspaltung der oben stehenden komplexen Gleichungen in ihre Komponenten ergibt dann (analog zu Kapitel 4.3):

$$\underline{u}_{I,q}(t) = R_1 \cdot \underline{i}_{I,q}(t) + \frac{d\underline{\psi}_{I,q}(t)}{dt} + \omega_K \cdot \underline{\psi}_{I,d}(t)$$

$$\underline{u}_{I,d}(t) = R_1 \cdot \underline{i}_{I,d}(t) + \frac{d\underline{\psi}_{I,d}(t)}{dt} - \omega_K \cdot \underline{\psi}_{I,q}(t)$$

$$\underline{u}_{II,q}(t) = R_2' \cdot \underline{i}_{II,q}(t) + \frac{d\underline{\psi}_{II,q}(t)}{dt} + (\omega_K - \omega_m) \cdot \underline{\psi}_{II,d}(t)$$

$$\underline{u}_{II,d}(t) = R_2' \cdot \underline{i}_{II,d}(t) + \frac{d\underline{\psi}_{II,d}(t)}{dt} - (\omega_K - \omega_m) \cdot \underline{\psi}_{II,q}(t)$$

$$T(t) = \frac{3}{2} p \cdot \text{Im}\{\underline{i}_I(t) \cdot \underline{\psi}_I^*(t)\}$$

$$= \frac{3}{2} p \cdot \text{Im}\left\{\left[\underline{i}_{I,q}(t) - j \cdot \underline{i}_{I,d}(t)\right] \cdot \left[\underline{\psi}_{I,q}(t) + j \cdot \underline{\psi}_{I,d}(t)\right]\right\}$$

$$= \frac{3}{2} p \cdot \left[\underline{\psi}_{I,d}(t) \cdot \underline{i}_{I,q}(t) - \underline{\psi}_{I,q}(t) \cdot \underline{i}_{I,d}(t)\right]$$

Im stationären Betrieb treten keine Änderungen der Flussverkettung auf ($d\Psi/dt = 0$) und die Drehzahl ist konstant ($\omega_m = d\gamma/dt = \text{const.}$). Nun wird die Erregerwicklung in die Π, d -Achse gelegt und die (kurzgeschlossene) Dämpferwicklung in die Π, q -Achse. Bei den meisten Synchronmaschinen (insbesondere bei großen Generatoren) kann, wie im Folgenden durchgeführt, der Ohmsche Widerstand der Statorwicklung vernachlässigt werden.

Das obige Gleichungssystem wird dann zu ($\omega_1 = \omega_k = d\alpha/dt = \text{const.}$):

$$u_{I,q}(t) = \omega_1 \cdot \Psi_{I,d}(t)$$

$$u_{I,d}(t) = -\omega_1 \cdot \Psi_{I,q}(t)$$

$$0 = R'_2 \cdot i_{II,q}(t)$$

$$u_{II,d}(t) = R'_2 \cdot i_{II,d}(t)$$

$$T(t) = \frac{3}{2} p \cdot [\Psi_{I,d}(t) \cdot i_{I,q}(t) - \Psi_{I,q}(t) \cdot i_{I,d}(t)]$$

Für die Statorflussverkettungen gilt:

$$\Psi_{I,d}(t) = L_1 \cdot i_{I,d}(t) + L_{1h} \cdot i_{II,d}(t)$$

$$\Psi_{I,q}(t) = L_1 \cdot i_{I,q}(t) + L_{1h} \cdot i_{II,q}(t)$$

Da die Raumzeigertheorie für Drehfeldmaschinen im Verbraucherzählpeilsystem (VZS) abgeleitet wurde, ist dies das Gleichungssystem der Synchronmaschine im VZS. Wie üblich, soll im Folgenden die Synchronmaschine im Erzeugerzählpeilsystem (EZS) beschrieben werden. Hierzu werden die Spannungspfeile von $u_{I,d}$ und $u_{I,q}$ herumgedreht (bzw. im Gleichungssystem mit negativem Vorzeichen versehen). Auch die Drehmomentengleichung muss dann mit negativem Vorzeichen versehen werden, siehe unten. Die beiden Statorspannungsgleichungen werden dann zu:

$$\begin{aligned} u_{I,q}(t) &= -\omega_1 \cdot \Psi_{I,d}(t) \\ &= -\omega_1 \cdot L_1 \cdot i_{I,d}(t) - \omega_1 \cdot L_{1h} \cdot i_{II,d}(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{I,d}(t) &= \omega_1 \cdot \Psi_{I,q}(t) \\ &= \omega_1 \cdot L_1 \cdot i_{I,q}(t) + \omega_1 \cdot L_{1h} \cdot i_{II,q}(t) \end{aligned}$$

Dem rotierenden Koordinatensystem wird nun folgende Anfangsbedingung zugeordnet:

$$\alpha(t) = \omega_1 t + \alpha_0, \text{ mit } \alpha_0 = \vartheta$$

Die Rücktransformation der Spannungsgleichungen

$$\begin{bmatrix} u_{I,u}(t) \\ u_{I,v}(t) \end{bmatrix} = [T_{xy}]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} u_{I,q}(t) \\ u_{I,d}(t) \end{bmatrix}, \quad [T_{xy}]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \cos\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix}$$

ergibt dann:

$$\begin{aligned} u_{1,u}(t) &= u_{1,q}(t) \cdot \cos(\alpha) + u_{1,d}(t) \cdot \sin(\alpha) \\ &= u_{1,q}(t) \cdot \cos(\omega_1 t + \vartheta) + u_{1,d}(t) \cdot \sin(\omega_1 t + \vartheta) \end{aligned}$$

Berücksichtigt man nun noch

$$\begin{aligned} u_{1,u}(t) &= \operatorname{Re}\{\sqrt{2}\underline{U}_1 e^{j\omega_1 t}\} \\ \cos(\omega_1 t + \vartheta) &= \operatorname{Re}\{e^{j\omega_1 t} e^{j\vartheta}\} \\ \sin(\omega_1 t + \vartheta) &= \operatorname{Im}\{e^{j\omega_1 t} e^{j\vartheta}\} = \operatorname{Re}\{-je^{j\omega_1 t} e^{j\vartheta}\} \end{aligned}$$

so gilt:

$$\operatorname{Re}\{\sqrt{2}\underline{U}_1 e^{j\omega_1 t}\} = u_{1,q} \operatorname{Re}\{e^{j\omega_1 t} e^{j\vartheta}\} + u_{1,d} \operatorname{Re}\{-je^{j\omega_1 t} e^{j\vartheta}\}$$

Da im stationären Betrieb keine Ströme in der Dämpferwicklung induziert werden, gilt $i_{1l,q} = 0$. Damit folgt:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{\sqrt{2}\underline{U}_1 e^{j\omega_1 t}\} &= -\omega_1 \Psi_{1,d} \operatorname{Re}\{e^{j\omega_1 t} e^{j\vartheta}\} + \omega_1 \Psi_{1,q} \operatorname{Re}\{-je^{j\omega_1 t} e^{j\vartheta}\} \\ &= -\omega_1 (L_1 i_{1,d} + L_{1h} i_{1l,d}) \operatorname{Re}\{e^{j\omega_1 t} e^{j\vartheta}\} + \omega_1 L_1 i_{1,q} \operatorname{Re}\{-je^{j\omega_1 t} e^{j\vartheta}\} \end{aligned}$$

Die linke Seite dieser Gleichung beschreibt eine harmonische Schwingung einer einzelnen Frequenz. Dies muss dann auch für die rechte Seite gelten. Dann ändert sich aber die Gleichheit beider Seiten nicht, wenn auf beiden Seiten jeweils die entsprechenden Imaginärteile hinzuaddiert werden. Man erhält:

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\underline{U}_1 e^{j\omega_1 t} &= -\omega_1 (L_1 i_{1,d} + L_{1h} i_{1l,d}) \cdot \{e^{j\omega_1 t} e^{j\vartheta}\} + \omega_1 L_1 i_{1,q} \cdot \{-je^{j\omega_1 t} e^{j\vartheta}\} \\ \Rightarrow \underline{U}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[j\omega_1 L_1 (j \cdot i_{1,d} - i_{1,q}) \cdot e^{j\vartheta} + j\omega_1 L_{1h} (j \cdot i_{1l,d}) \cdot e^{j\vartheta} \right] \end{aligned}$$

Nun werden folgende Ströme definiert:

$$\begin{aligned} \underline{I}_{1,q} &= \frac{i_{1,q}}{\sqrt{2}} e^{j\vartheta} \\ \underline{I}_{1,d} &= -j \frac{i_{1,d}}{\sqrt{2}} e^{j\vartheta} \\ \underline{I}'_2 &= -j \frac{i_{1l,d}}{\sqrt{2}} e^{j\vartheta} \end{aligned}$$

Die obige Spannungsgleichung wird dann zu:

$$\underline{U}_1 = j\omega_1 L_1 (-\underline{I}_{1,d} - \underline{I}_{1,q}) - j\omega_1 L_{1h} \underline{I}'_2$$

Mit

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{1,q} + \underline{I}_{1,d}$$

und

$$\underline{U}_P = -j\omega_1 L_{1h} \underline{I}'_2$$

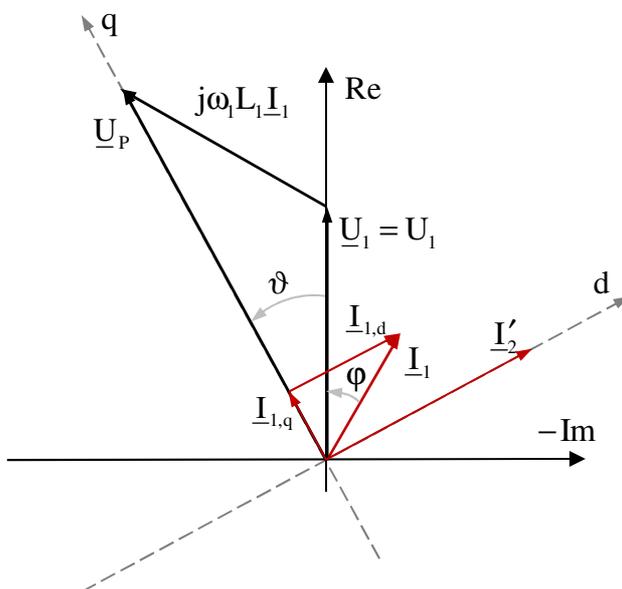
folgt weiter:

$$\underline{U}_P = \underline{U}_1 + j\omega_1 L_1 \underline{I}_1$$

Man erhält also die bekannte Spannungsgleichung der Vollpolysynchronmaschine. Wählt man nun noch die Klemmenspannung reell

$$\underline{U}_1 = U_1$$

so folgt hieraus das zugehörige Zeigerbild in der bekannten Form:



Die Zerlegung der Statorströme in Längs- und Querkomponente ergibt die fluss- und drehmomentbildenden Anteile. Dies zeigt sich auch in der Drehmomentengleichung:

$$\begin{aligned}
 T &= -\frac{3}{2}p \cdot [\psi_{I,d}(t) \cdot i_{I,q}(t) - \psi_{I,q}(t) \cdot i_{I,d}(t)] \\
 &= -\frac{3}{2}p \cdot \left[[L_1 \cdot i_{I,d}(t) + L_{1h} \cdot i_{II,d}(t)] \cdot i_{I,q}(t) - [L_1 \cdot i_{I,q}(t) + L_{1h} \cdot i_{II,q}(t)] \cdot i_{I,d}(t) \right] \\
 &= -\frac{3}{2}p \cdot \left[[L_1 \cdot i_{I,d}(t) \cdot i_{I,q}(t) + L_{1h} \cdot i_{II,d}(t) \cdot i_{I,q}(t)] - [L_1 \cdot i_{I,q}(t) \cdot i_{I,d}(t) + L_{1h} \cdot 0 \cdot i_{I,d}(t)] \right] \\
 &= -\frac{3}{2}p \cdot L_{1h} \cdot i_{II,d}(t) \cdot i_{I,q}(t) \\
 &= -\frac{3}{2}p \cdot L_{1h} \cdot \left[\frac{\sqrt{2}}{-j} \underline{I}'_2 \cdot e^{-j\vartheta} \right] \cdot \left[\sqrt{2} \cdot \underline{I}_{1,q} \cdot e^{-j\vartheta} \right] \\
 &= -j \cdot 3 \frac{p}{\omega_1} X_{1h} \cdot \underline{I}'_2 \cdot \underline{I}_{1,q} \cdot e^{-j2\vartheta} \\
 &= 3 \frac{p}{\omega_1} \underline{U}_P \cdot \underline{I}_{1,q} \cdot e^{-j2\vartheta} \\
 &= 3 \frac{p}{\omega_1} U_P \cdot e^{j\vartheta} \cdot I_{1,q} \cdot e^{j\vartheta} \cdot e^{-j2\vartheta} \\
 &= 3 \frac{p}{\omega_1} U_P \cdot I_{1,q} \\
 &= 3 \frac{p}{\omega_1} U_P \cdot I_1 \cdot \cos(\vartheta + \varphi) \\
 &= 3 \frac{p}{\omega_1} U_P \cdot I_1 \cdot \cos(\delta)
 \end{aligned}$$

Hierbei ist δ der Lastwinkel (Winkel zwischen Statorstrom und Polradspannung).

Mit den Beziehungen

$$U_P \cos(\vartheta + \varphi) = U_1 \cos(\varphi) \quad \text{und} \quad U_P \sin(\vartheta) = X_1 I_1 \cos(\varphi)$$

folgt dann weiter:

$$\begin{aligned}
 T &= 3 \frac{p}{\omega_1} U_1 I_1 \cos(\varphi) \\
 &= 3 \frac{p}{\omega_1} \frac{U_P U_1}{X_1} \sin(\vartheta)
 \end{aligned}$$

Man erhält also die schon aus der Vorlesung „Elektrische Maschinen und Antriebe“ bekannten Gleichungen zur Berechnung des Drehmomentes der Vollpolmaschine:

- Drehmoment aus Polradspannung, Klemmenspannung und Polradwinkel

$$T = 3 \frac{p}{\omega_1} \frac{U_P U_1}{X_1} \sin(\vartheta)$$

- Drehmoment aus Klemmenspannung, Klemmenstrom und Phasenwinkel

$$T = 3 \frac{P}{\omega_1} U_1 I_1 \cos(\varphi)$$

- Drehmoment aus Polradspannung, Klemmenstrom und Lastwinkel

$$T = 3 \frac{P}{\omega_1} U_p I_1 \cos(\delta)$$

5.3 Stoßkurzschluss der Vollpol-Synchronmaschine

1. Allgemeines:

Als Beispiel für den dynamischen Betrieb der Synchronmaschine soll nun der dreiphasige Stoßkurzschluss eines Vollpol-Synchrongenerators im Leerlauf bei Nennerregung berechnet werden (Leerlauf bedeutet: offene Stator клемmen und Rotor mechanisch mit Synchrodrehzahl angetrieben). Unter Stoßkurzschluss versteht man den dynamischen Ausgleichsvorgang, der sich unmittelbar nach dem Kurzschließen der Stator клемmen abspielt (im Gegensatz zum Dauerkurzschluss, der sich dann einstellt, wenn alle Ausgleichsvorgänge abgeschlossen sind); d.h. es ist die Übergangsphase vom stationären Leerlauf zum stationären Kurzschluss.

Zur einfacheren Berechnung werden nun die folgenden Näherungen eingeführt:

- Die Drehzahl des Rotors bleibe während des Ausgleichsvorganges konstant gleich der Synchrodrehzahl (der Generator soll weiterhin mit der Synchrodrehzahl mechanisch angetrieben werden).
- Die Vollpolmaschine sei symmetrisch mit zwei um 90° elektrisch versetzten, gleichen Läuferwicklungen. Die Erregerwicklung wird über zwei Schleifringe mit Gleichstrom versorgt; die Dämpferwicklung (die in der Querachse liegen soll) ist kurzgeschlossen.
- Es wird ein rotierendes Koordinatensystem gewählt mit $d\alpha/dt = \omega_k = \omega_l = \omega_m = d\gamma/dt$ (wie in Kapitel 5.2). Dem Stator wird das System I,d und I,q zugeordnet, dem Rotor das System II,d (Erregerwicklung) und II,q (Dämpferwicklung).
- Die Anfangsbedingung wird durch den Schalt Augenblick festgelegt: $\alpha(t) = \omega_l t + \varepsilon$. Hierbei ist ε ein zunächst freier Phasenwinkel.

2. Anfangsbedingungen für $t=0$:

Der Ausgangszustand vor dem Stoßkurzschluss ist der Leerlauf mit Nennerregung. In diesem stationären Zustand können i.a. die Ohmschen Widerstände der Statorwicklung vernachlässigt werden: $R_1 = 0$ (diese Voraussetzung wird später wieder aufgehoben).

Die Größen vor dem Schalt Augenblick erhalten im Folgenden den zusätzlichen Index „0“. Für die Anfangsbedingungen gilt dann:

- Die Statorströme sind gleich null, weil die Klemmen offen sind; der Dämpferstrom ist gleich null, weil ein stationärer Zustand mit Synchrodrehzahl vorliegt.

$$\dot{i}_{I,d,0} = \dot{i}_{I,q,0} = \dot{i}_{II,q,0} = 0$$

$$i_{II,d,0} = \frac{u_{II,d,0}}{R'_2}$$

- Für die Flussverkettungen gilt:

$$\psi_{I,d,0} = L_1 \cdot i_{I,d,0} + L_{1h} \cdot i_{II,d,0} = L_{1h} \cdot i_{II,d,0}$$

$$\psi_{I,q,0} = L_1 \cdot i_{I,q,0} + L_{1h} \cdot i_{II,q,0} = 0$$

$$\begin{aligned}\psi_{II,d,0} &= L'_2 \cdot i_{II,d,0} + L_{1h} \cdot i_{I,d,0} = L'_2 \cdot i_{II,d,0} \\ \psi_{II,q,0} &= L'_2 \cdot i_{II,q,0} + L_{1h} \cdot i_{I,q,0} = 0\end{aligned}$$

- und für die Statorspannungen (Rechnung im EZS):

$$\begin{aligned}-u_{I,q,0} &= R_1 \cdot i_{I,q,0} + \frac{d\psi_{I,q,0}}{dt} + \omega_1 \cdot \psi_{I,d,0} = \omega_1 \cdot \psi_{I,d,0} \\ -u_{I,d,0} &= R_1 \cdot i_{I,d,0} + \frac{d\psi_{I,d,0}}{dt} - \omega_1 \cdot \psi_{I,q,0} = -\omega_1 \cdot \psi_{I,q,0}\end{aligned}$$

Setzt man nun die Flussverkettungen in die Statorspannungsgleichungen ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}u_{I,q,0} &= -\omega_1 \cdot L_{1h} \cdot i_{II,d,0} \\ u_{I,d,0} &= 0\end{aligned}$$

und weiter:

$$u_{I,q,0} = -\omega_1 \cdot L_{1h} \frac{i_{II,d,0}}{\sqrt{2}} \sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot U_{P,0} = \sqrt{2} \cdot U_{1,N} = \sqrt{2} \cdot \omega_1 \cdot L_{1h} \cdot I_{F,0}$$

Aus der letzten Gleichung folgt dann auch:

$$i_{II,d,0} = \frac{-U_{1,N} \sqrt{2}}{\omega_1 L_{1h}}$$

Nun soll die Spannung des Stranges U durch Rücktransformation berechnet werden. Da vor dem Schalt Augenblick ein symmetrischer Betrieb vorliegt, verlaufen die übrigen beiden Spannungen symmetrisch hierzu und müssen nicht extra ermittelt werden.

$$\begin{aligned}u_{1,u,0} &= u_{I,q,0} \cos(\alpha) + u_{I,d,0} \sin(\alpha) \\ &= \sqrt{2} \cdot U_{1,N} \cos(\alpha) + 0 \\ &= \sqrt{2} \cdot U_{1,N} \cos(\omega_1 t + \varepsilon)\end{aligned}$$

Der oben eingeführte Phasenwinkel ε gibt also den Schalt Augenblick an:

- Für $\varepsilon = 0$ ist zur Zeit $t=0$ im Strang U die Flussverkettung null, und es wird gerade der Scheitelwert der Spannung induziert.
- Für $\varepsilon = \pi/2$ ist zur Zeit $t=0$ im Strang U die Flussverkettung maximal und die induzierte Spannung ist gleich null.

3. Gleichungssystem für $t > 0$:

Im Folgenden wird die oben eingeführte Näherung der Vernachlässigung der Ohmschen Widerstände der Statorwicklung wieder aufgehoben ($R_1 \neq 0$), weil diese Widerstände für das Abklingen der Statorströme verantwortlich sind (Dämpfungseigenschaft).

Die Statorspannungsgleichungen lauten nun in Matrixschreibweise (wegen des Kurzschlusses an des Klemmen identisch im EZS und im VZS):

$$\begin{bmatrix} u_{I,d} \\ u_{I,q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = R_1 \begin{bmatrix} i_{I,d} \\ i_{I,q} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Psi_{I,d} \\ \Psi_{I,q} \end{bmatrix} + \omega_1 \begin{bmatrix} -\Psi_{I,q} \\ \Psi_{I,d} \end{bmatrix}$$

Die Rotorspannungsgleichungen werden zu (da die Erregung zeitlich unverändert bestehen bleibt und weiterhin $d\alpha/dt = \omega_K = \omega_1 = \omega_m = d\gamma/dt$ gilt):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_{II,d} \\ u_{II,q} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R'_2 i_{II,d,0} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R'_2 \frac{U_{1,N} \sqrt{2}}{\omega_1 L_{1h}} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= R'_2 \begin{bmatrix} i_{II,d} \\ i_{II,q} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Psi_{II,d} \\ \Psi_{II,q} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Das Drehmoment berechnet sich laut der Raumzeigertheorie zu (hier im VZS):

$$T = \frac{3}{2} p \cdot [\Psi_{I,d} \cdot i_{I,q} - \Psi_{I,q} \cdot i_{I,d}]$$

Nun werden noch die Flussverkettungen benötigt. Diese betragen:

$$\begin{bmatrix} \Psi_{I,d} \\ \Psi_{I,q} \end{bmatrix} = L_1 \begin{bmatrix} i_{I,d} \\ i_{I,q} \end{bmatrix} + L_{1h} \begin{bmatrix} i_{II,d} \\ i_{II,q} \end{bmatrix}$$

und

$$\begin{bmatrix} \Psi_{II,d} \\ \Psi_{II,q} \end{bmatrix} = L'_2 \begin{bmatrix} i_{II,d} \\ i_{II,q} \end{bmatrix} + L_{1h} \begin{bmatrix} i_{I,d} \\ i_{I,q} \end{bmatrix}$$

oder, in zusammengefasster Schreibweise:

$$\begin{bmatrix} \Psi_{I,d} \\ \Psi_{I,q} \\ \Psi_{II,d} \\ \Psi_{II,q} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1+\sigma_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1+\sigma_1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1+\sigma_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1+\sigma_2 \end{bmatrix}}_{[L]} \begin{bmatrix} i_{I,d} \\ i_{I,q} \\ i_{II,d} \\ i_{II,q} \end{bmatrix}$$

Die Ströme erhält man nun mit Hilfe der invertierten Matrix $[L]^{-1}$ (siehe Anhang 9.3):

$$\begin{bmatrix} i_{I,d} \\ i_{I,q} \\ i_{II,d} \\ i_{II,q} \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1-\sigma}{\sigma L_{1h}} \begin{bmatrix} 1+\sigma_2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1+\sigma_2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1+\sigma_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1+\sigma_1 \end{bmatrix}}_{[L]^{-1}} \begin{bmatrix} \Psi_{I,d} \\ \Psi_{I,q} \\ \Psi_{II,d} \\ \Psi_{II,q} \end{bmatrix}$$

Dieses Gleichungssystem kann nun zusammen mit den Flussgleichungen, die im Folgenden für die Programmierung noch umgestellt werden, und der Drehmomentgleichung numerisch gelöst werden:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Psi_{I,d} &= -R_1 i_{I,d} + \omega_1 \Psi_{I,q} \\ \frac{d}{dt}\Psi_{I,q} &= -R_1 i_{I,q} - \omega_1 \Psi_{I,d} \\ \frac{d}{dt}\Psi_{II,d} &= -R'_2 \frac{U_{I,N} \sqrt{2}}{\omega_1 L_{1h}} - R'_2 i_{II,d} \\ \frac{d}{dt}\Psi_{II,q} &= -R'_2 i_{II,q}\end{aligned}$$

Die Ströme erhält man nun durch Rücktransformation. Da laut Voraussetzung der Felderregenerstrom in der II, d -Achse und der Dämpferstrom in der II, q -Achse liegen soll, ergibt sich für die auf die Ständerwindungszahl umgerechneten Rotorströme:

$$\begin{bmatrix} i_F \\ i_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{II,d} \\ i_{II,q} \end{bmatrix}$$

Die Statorstrangströme werden wie folgt berechnet (siehe Kapitel 3.3):

$$\begin{bmatrix} i_{I,u} \\ i_{I,v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{xy} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} i_{I,q} \\ i_{I,d} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} T_{xy} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \cos\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix}$$

$$i_{I,w} = -i_{I,u} - i_{I,v}$$

Mit $\alpha(t) = \omega_1 t + \varepsilon$ folgt dann weiter:

$$\begin{aligned}i_{I,u} &= i_{I,q} \cos(\omega_1 t + \varepsilon) + i_{I,d} \sin(\omega_1 t + \varepsilon) \\ i_{I,v} &= i_{I,q} \cos\left(\omega_1 t + \varepsilon - \frac{2\pi}{3}\right) + i_{I,d} \sin\left(\omega_1 t + \varepsilon - \frac{2\pi}{3}\right) \\ i_{I,w} &= -i_{I,u} - i_{I,v}\end{aligned}$$

Mit Hilfe einiger Näherungen (die aber i.A. erfüllt werden), kann das Gleichungssystem auch analytisch gelöst werden. Dies hat den großen Vorteil, dass auch qualitative Vorhersagen möglich sind und der prinzipielle Einfluss der verschiedenen Parameter untersucht werden kann. Im Folgenden soll diese analytische Lösung nicht im Detail hergeleitet werden, es werden nur die Ergebnisse angegeben.

Die Einhüllenden der verschiedenen Zeitfunktionen sind:

- Strom im Strang U

$$i_{1,u,\min}(t) = -\sqrt{2} \cdot U_1 \left[\frac{1}{X_1} + \left(\frac{1}{X_{1K}} - \frac{1}{X_1} \right) e^{-\frac{t}{\tau_{FK}}} + \frac{1}{X_{1K}} \sin(\epsilon) e^{-\frac{t}{\tau_{1K}}} \right]$$

$$i_{1,u,\max}(t) = -\sqrt{2} \cdot U_1 \left[-\frac{1}{X_1} - \left(\frac{1}{X_{1K}} - \frac{1}{X_1} \right) e^{-\frac{t}{\tau_{FK}}} + \frac{1}{X_{1K}} \sin(\epsilon) e^{-\frac{t}{\tau_{1K}}} \right]$$

$$i_{1,u,\min}(t) \leq i_{1,u}(t) \leq i_{1,u,\max}(t)$$

- Dauerkurzschlussstrom (d.h. Kurzschlussstrom nach Abklingen der Einschwingvorgänge) im Strang U

$$i_{1,u,d,\min} = -\frac{\sqrt{2} \cdot U_1}{X_1}$$

$$i_{1,u,d,\max} = \frac{\sqrt{2} \cdot U_1}{X_1}$$

$$i_{1,u,d,\min} \leq i_{1,u,d} \leq i_{1,u,d,\max}$$

- Für $t \rightarrow \infty$ gilt:

$$i_{1,u,\min}(t \rightarrow \infty) \rightarrow i_{1,u,d,\min}$$

$$i_{1,u,\max}(t \rightarrow \infty) \rightarrow i_{1,u,d,\max}$$

- Für $t=0$ gilt:

$$i_{1,u,\min}(t=0) = -\frac{\sqrt{2} \cdot U_1}{X_{1K}} [1 + \sin(\epsilon)]$$

$$i_{1,u,\max}(t=0) = -\frac{\sqrt{2} \cdot U_1}{X_{1K}} [-1 + \sin(\epsilon)]$$

- Felderregenerstrom

$$i_{F,\min}(t) = i_{F,0} \left[1 + \frac{1-\sigma}{\sigma} e^{-\frac{t}{\tau_{FK}}} - \frac{1-\sigma}{\sigma} e^{-\frac{t}{\tau_{1K}}} \right]$$

$$i_{F,\max}(t) = i_{F,0} \left[1 + \frac{1-\sigma}{\sigma} e^{-\frac{t}{\tau_{FK}}} + \frac{1-\sigma}{\sigma} e^{-\frac{t}{\tau_{1K}}} \right]$$

$$i_{F,\min}(t) \leq i_F(t) \leq i_{F,\max}(t)$$

- Dämpferstrom

$$i_{D,\min}(t) = -i_{F,0} \frac{1-\sigma}{\sigma} e^{-\frac{t}{\tau_{1K}}}$$

$$i_{D,\max}(t) = i_{F,0} \frac{1-\sigma}{\sigma} e^{-\frac{t}{\tau_{1K}}}$$

$$i_{D,\min}(t) \leq i_D(t) \leq i_{D,\max}(t)$$

• Drehmoment

$$T_{el,\min}(t) = -\frac{3p}{\omega_1} \frac{U_1^2}{\sigma X_1} e^{-\frac{t}{\tau_{FK}}} e^{-\frac{t}{\tau_{1K}}}$$

$$T_{el,\max}(t) = \frac{3p}{\omega_1} \frac{U_1^2}{\sigma X_1} e^{-\frac{t}{\tau_{FK}}} e^{-\frac{t}{\tau_{1K}}}$$

$$T_{el,\min}(t) \leq T_{el}(t) \leq T_{el,\max}(t)$$

Die Zeitkonstanten und Reaktanzen in diesen Gleichungen berechnen sich wie folgt:

- $\tau_F = \frac{(1+\sigma_2)L_{1h}}{R'_2}$ Leerlaufzeitkonstante der Läuferwicklung
- $\tau_{FK} = \sigma\tau_F$ Kurzschlusszeitkonstante der Läuferwicklung
- $\tau_{1K} = \sigma \frac{L_1}{R_1}$ Kurzschlusszeitkonstante der Ständerwicklung
- $X_1 = \omega_1 L_1$ Synchronreaktanzen
- $X_{1K} = \sigma X_1$ Kurzschlussreaktanzen

Man erkennt an den obigen Gleichungen, dass die Kurzschlussgrößen τ_{FK} , τ_{1K} und X_{1K} den transienten Übergang zwischen Stoßkurzschluss und Dauerkurzschluss bestimmen.

Bei Turbogeneratoren findet man in der Praxis häufig folgende Größenordnungen:

$$x_{1K} = \sigma x_1 = \sigma \frac{X_1}{U_N/I_N} = 0,15 \dots 0,25$$

$$\tau_{FK} = 0,5 \dots 2s$$

$$\tau_{1K} = 60 \dots 250ms$$

Nun sollen die Zeitfunktionen von Statorstrom (in Strang U), Felderregnerstrom, Dämpferstrom und Drehmoment bei einem Stoßkurzschluss dargestellt werden. Hierzu wird ein Turbogenerator mit den folgenden Daten berechnet:

$U_{1,N} = 11kV$	$I_{1,N} = 758A$	$P_N = 20MW$
$X_1 = 21,77\Omega$	$\tau_{FK} = 0,2s$	$\tau_{1K} = 104ms$
$T_N = 127kNm$		

4. Schalten im Spannungsmaximum:

Wie man den oben angegebenen Gleichungen der Einhüllenden entnehmen kann, hat der Schalt Augenblick (für Schalten im Spannungsmaximum gilt: $\epsilon = 0$) keinen Einfluss auf die Maximalwerte von Drehmoment, Erregerstrom und Dämpferstrom, wohl aber auf den Statorstrom. In den folgenden Bildern sind alle Ströme in kA, das Drehmoment in kNm und die Zeit in s angegeben.

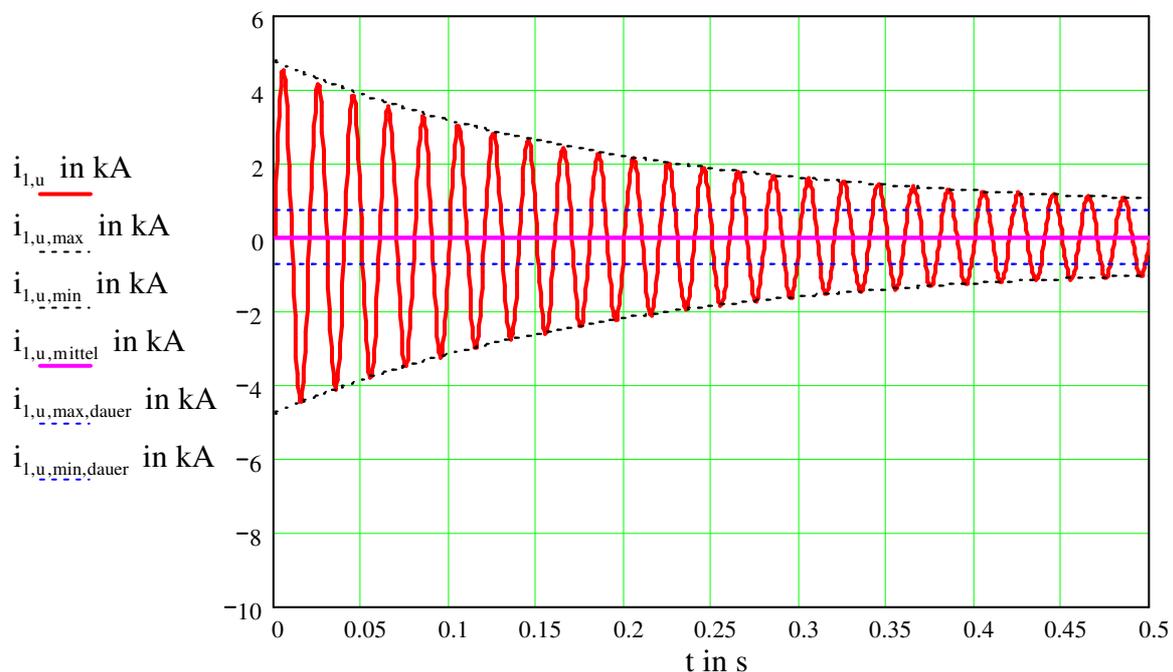
Das erste Bild zeigt den Verlauf des Statorstromes in Strang U (rot) zusammen mit seinem Mittelwert (magenta), der Einhüllenden des Stoßkurzschlussstromes (schwarz gestrichelt) und der Einhüllenden des Dauerkurzschlussstromes (blau gestrichelt). Der Maximalwert des Dauerkurzschlussstromes berechnet sich zu

$$i_{1,u,d,max} = \frac{\sqrt{2} \cdot U_1}{X_1}$$

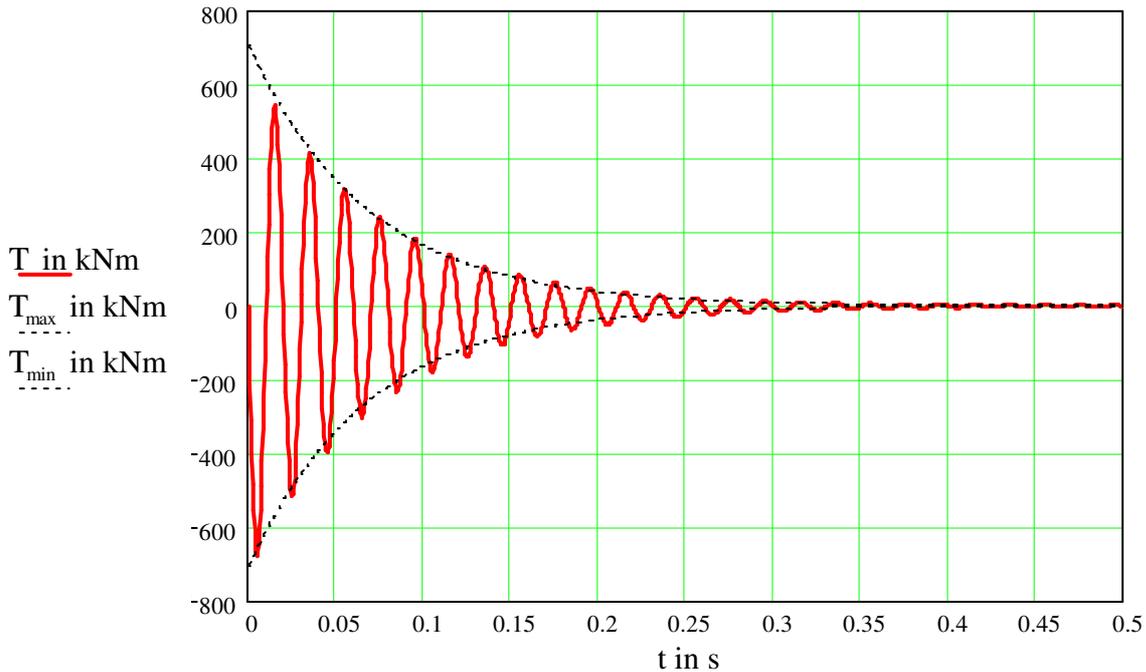
und beträgt für die betrachtete Maschine 715A (bei einem Nennstrom von 758A). Der Stoßkurzschlussstrom ist

$$i_{1,u,max}(t=0) = -\frac{\sqrt{2} \cdot U_1}{X_{IK}} [-1 + \sin(\epsilon)]$$

und beträgt für die betrachtete Maschine bei Schalten im Spannungsmaximum ($\epsilon = 0$) 4764A (Faktor $1/\sigma$ größer als der Dauerkurzschlussstrom). Der Stoßkurzschlussstrom überschreitet den Nennstrom also um ein Mehrfaches. Der Mittelwert des Stromes bei Schalten im Spannungsmaximum ist null.



Die Zeitfunktionen von Drehmoment, Erregerstrom und Dämpferstrom sind in den folgenden Bildern dargestellt (jeweils in rot); die jeweiligen Einhüllenden sind schwarz gestrichelt gezeichnet:

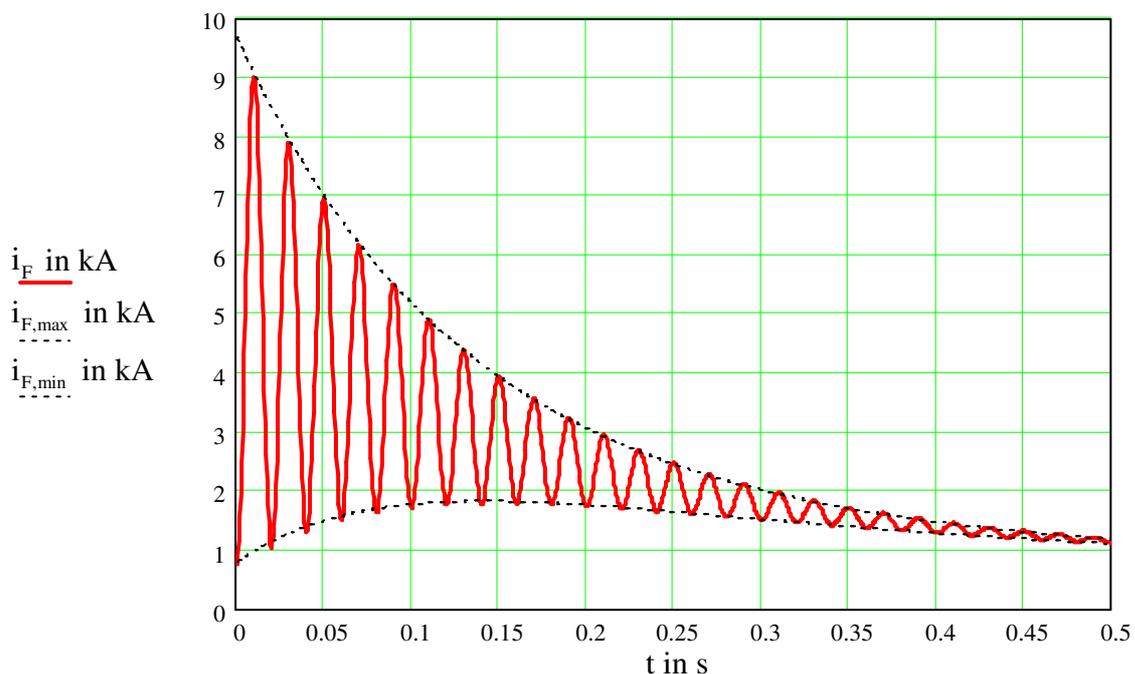


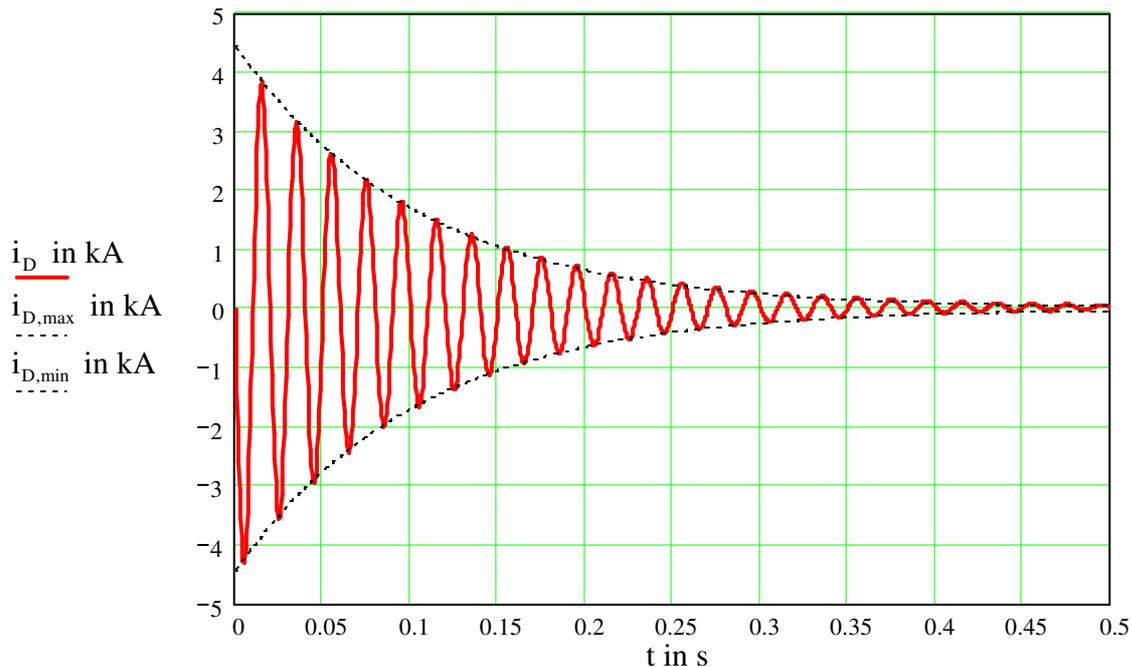
Es entsteht ein mit Netzfrequenz pulsierendes Moment, das auf null abklingt. Der Maximalwert berechnet sich zu

$$T_{\max}(t=0) = \frac{3p}{\omega_1} \frac{U_1^2}{\sigma X_1}$$

und beträgt für den betrachteten Generator 707,7kNm (bei einem Nennmoment von 127kNm; d.h. etwa um den Faktor 5,6 höher als das Nennmoment). Bei der Konstruktion einer Synchronmaschine müssen diese hohen mechanischen Beanspruchungen berücksichtigt werden.

Die Ströme $i_{I,d}$, $i_{I,q}$, $i_{II,d}$ und $i_{II,q}$ sind unabhängig vom Schalt Augenblick ϵ . Deshalb sind auch der oben dargestellte Zeitverlauf des Drehmomentes und die unten dargestellten Zeitverläufe der Rotorströme (Erregerstrom und Dämpferstrom) unabhängig vom Schalt Augenblick.





Sowohl der Erregerstrom, als auch der Dämpferstrom erreichen beim Stoßkurzschluss ein Mehrfaches ihres Nennwertes (ähnlich dem Strangstrom).

5. Schalten im Spannungsnulldurchgang:

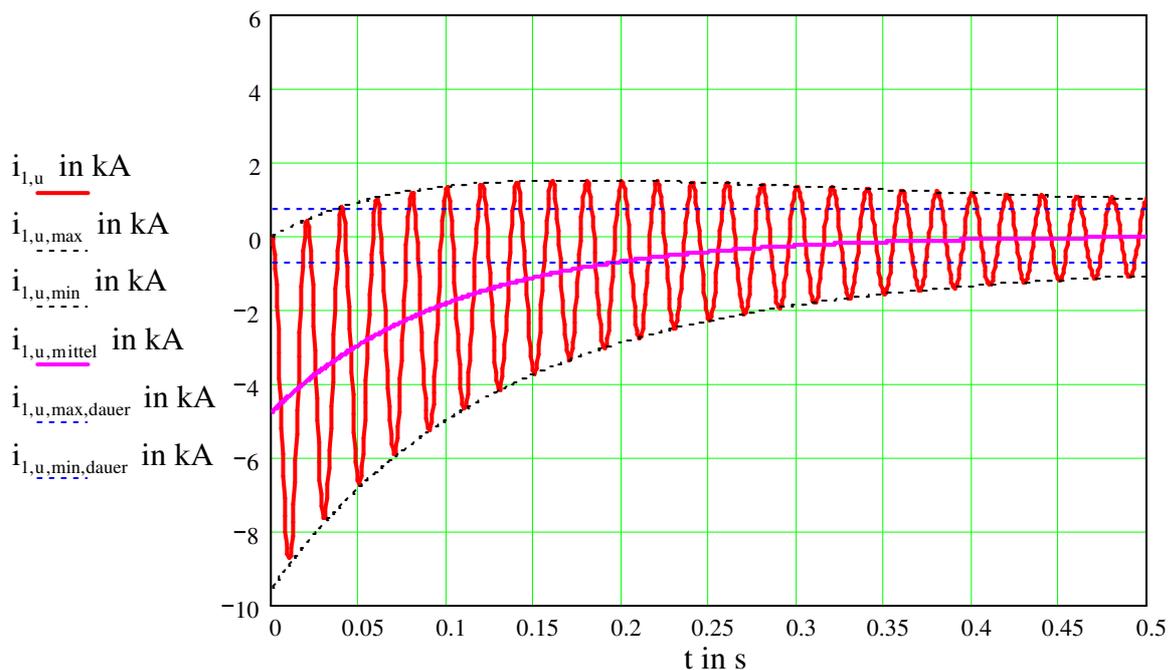
Im Gegensatz zu den Rotorströmen und dem Drehmoment ist der Statorstrangstrom vom Schalt Augenblick ε abhängig. Schaltet man im Spannungsnulldurchgang ($\varepsilon = \pi/2$), so beträgt das Minimum bzw. das Maximum des Stoßkurzschlussstromes

$$i_{1,u,\min}(t=0) = -\frac{\sqrt{2} \cdot U_1}{X_{1K}} [1 + \sin(\varepsilon)] = -2 \frac{\sqrt{2} \cdot U_1}{X_{1K}}$$

$$i_{1,u,\max}(t=0) = -\frac{\sqrt{2} \cdot U_1}{X_{1K}} [-1 + \sin(\varepsilon)] = 0$$

Vergleicht man die Extremwerte des Statorstrangstromes für $t=0$ betragsmäßig, so erhält man für $\varepsilon = \pi/2$ das Doppelte des Falles für $\varepsilon = 0$: 9528A (Faktor $2/\sigma$ größer als der Dauerkurzschlussstrom). Der Stoßkurzschlussstrom für $\varepsilon = \pi/2$ überschreitet den Nennstrom (758A) in diesem Fall um mehr als den Faktor 12.

Der Mittelwert des Strangstromes für $t=0$ beträgt $\frac{-\sqrt{2} \cdot U_1}{X_{1K}}$ und klingt mit der Kurzschlusszeitkonstanten der Ständerwicklung τ_{1K} auf null ab.



6. Stoßkurzschluss mit veränderlicher Drehzahl, Grobsynchronisation:

Bisher war der Stoßkurzschluss der Vollpolmaschine unter der Voraussetzung konstanter Drehzahl berechnet worden. Diese Annahme soll nun fallengelassen werden. Es gilt für die folgende Berechnung:

- Zum Zeitpunkt $t = 0s$ besitze die Maschine synchrone Drehzahl.
- Die Maschine wird zum Zeitpunkt $t = 0s$ im Spannungsnulldurchgang des Stranges U ($\varepsilon = \pi/2$) kurzgeschlossen, siehe vorangegangenen Abschnitt.
- Das Antriebsmoment T_A ist für den gesamten betrachteten Zeitraum gleich null.
- Die Drehzahl sinkt nach dem Kurzschließen, weil durch die Kurzschlussströme Wirkverluste in den Ohmschen Widerständen entstehen.
- In die Steigung des Drehzahlabfalles geht das Massenträgheitsmoment ein, das hier zu $\Theta = 2.5 \cdot 10^3 \text{ kgm}^2$ angenommen wird.
- Zum Zeitpunkt $t = 0.2s$ wird die Maschine wieder an das Netz geschaltet (weiterhin mit $T_A = 0$). Da i.A. nicht alle Synchronisierbedingungen erfüllt sind, spricht man hierbei von „Grobsynchronisation“.

Für die Statorspannungsgleichungen gilt nach der Grobsynchronisation (auch hier erfolgt die Rechnung im EZS, vergleiche die Abschnitte 2 und 3):

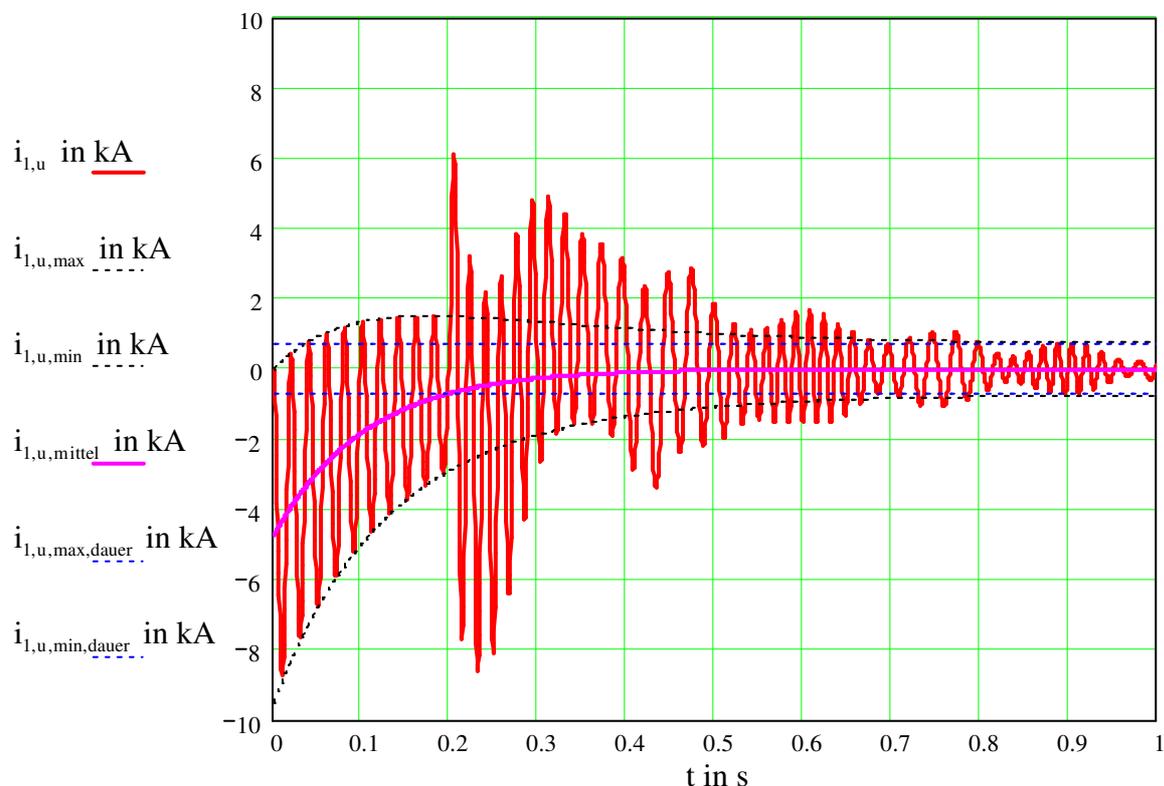
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -u_{l,d} \\ -u_{l,q} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} U_{l,N} \sqrt{2} \sin(\zeta + \varepsilon) \\ -U_{l,N} \sqrt{2} \cos(\zeta + \varepsilon) \end{bmatrix} = R_1 \begin{bmatrix} i_{l,d} \\ i_{l,q} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_{l,d} \\ \psi_{l,q} \end{bmatrix} + \frac{d\gamma}{dt} \begin{bmatrix} -\psi_{l,q} \\ \psi_{l,d} \end{bmatrix} \\ &= R_1 \begin{bmatrix} i_{l,d} \\ i_{l,q} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_{l,d} \\ \psi_{l,q} \end{bmatrix} + \omega_m \begin{bmatrix} -\psi_{l,q} \\ \psi_{l,d} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Hierbei ist ζ der aktuelle Winkel zwischen der q -Achse (rotiert mit $\omega_m = d\gamma/dt$) und der Lage von \underline{U}_1 (rotiert mit ω_1): $\zeta(t = t_{k+1}) = \zeta(t = t_k) + (\omega_1 - \omega_m)(t_{k+1} - t_k)$. Es folgt:

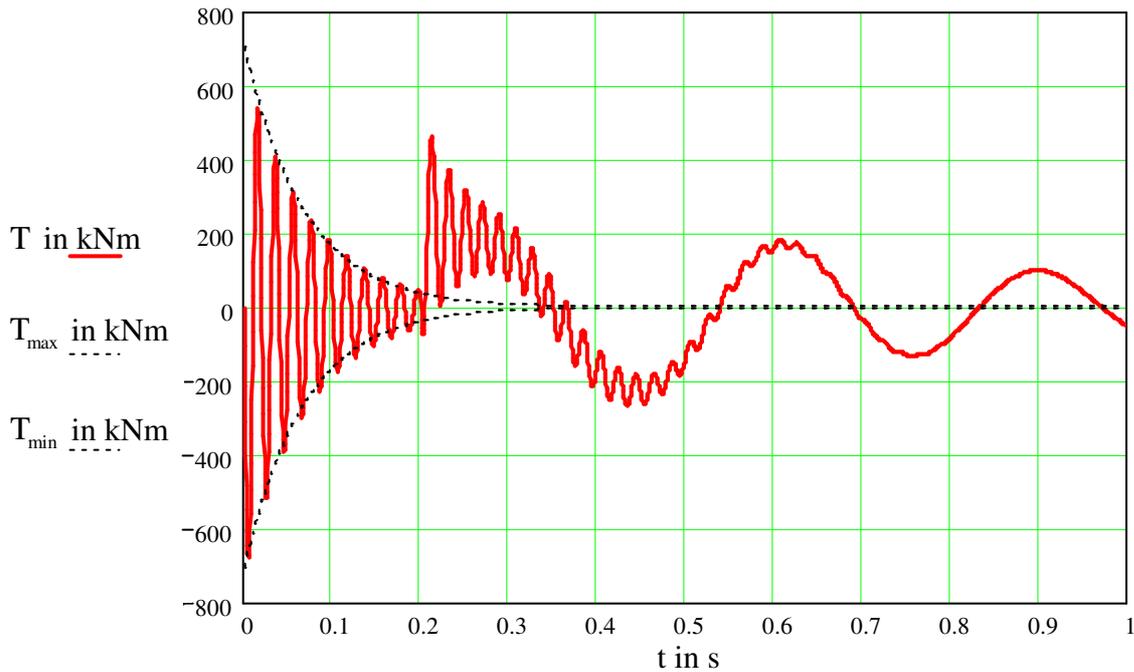
$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Psi_{1,d} \\ \Psi_{1,q} \end{bmatrix} = -R_1 \begin{bmatrix} i_{1,d} \\ i_{1,q} \end{bmatrix} + \omega_m \begin{bmatrix} \Psi_{1,q} \\ -\Psi_{1,d} \end{bmatrix} + U_{1,N} \sqrt{2} \begin{bmatrix} \sin(\zeta + \varepsilon) \\ -\cos(\zeta + \varepsilon) \end{bmatrix}$$

Die folgenden Bilder zeigen einerseits den Einfluss der nun veränderlichen Drehzahl, andererseits die Auswirkungen der Grobsynchronisation ab dem Zeitpunkt $t = 0.2s$ (wie vorher gilt auch hier, dass die Ströme in kA angegeben sind, das Drehmoment in kNm; die Drehzahl ist in min^{-1} dargestellt).

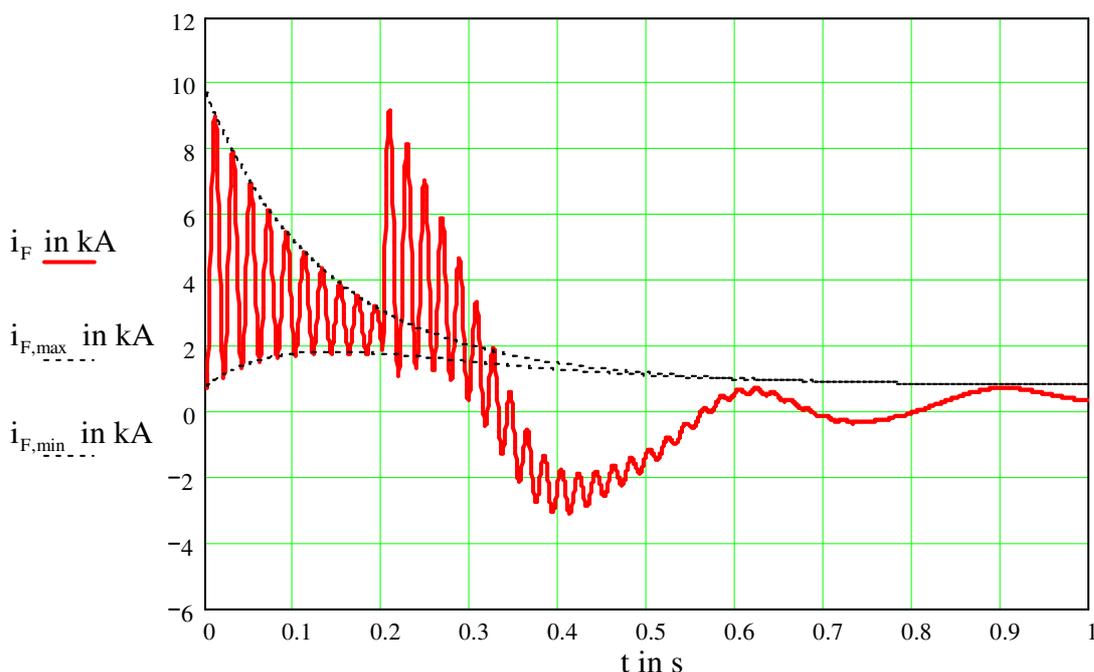
Das erste der folgenden Bilder zeigt die Zeitfunktion des Strangstromes. Die geringfügigen Abweichungen gegenüber dem Bild aus Abschnitt 5 in den ersten 0.2s, die durch die leicht abfallende Drehzahl (Zeitfunktion der Drehzahl siehe weiter unten) hervorgerufen werden, sind nur bei genauer Analyse zu erkennen. Die Grobsynchronisation hat wieder einen dynamischen Ausgleichvorgang mit erheblichen Strompulsationen zur Folge. Da nach der Grobsynchronisation die Maschine wieder an Netzspannung liegt, ist der stationäre Endwert des Strangstromes nicht mehr der Dauerkurzschlussstrom, sondern er ist gleich null (da für diese Berechnungen die Maschine unbelastet läuft).



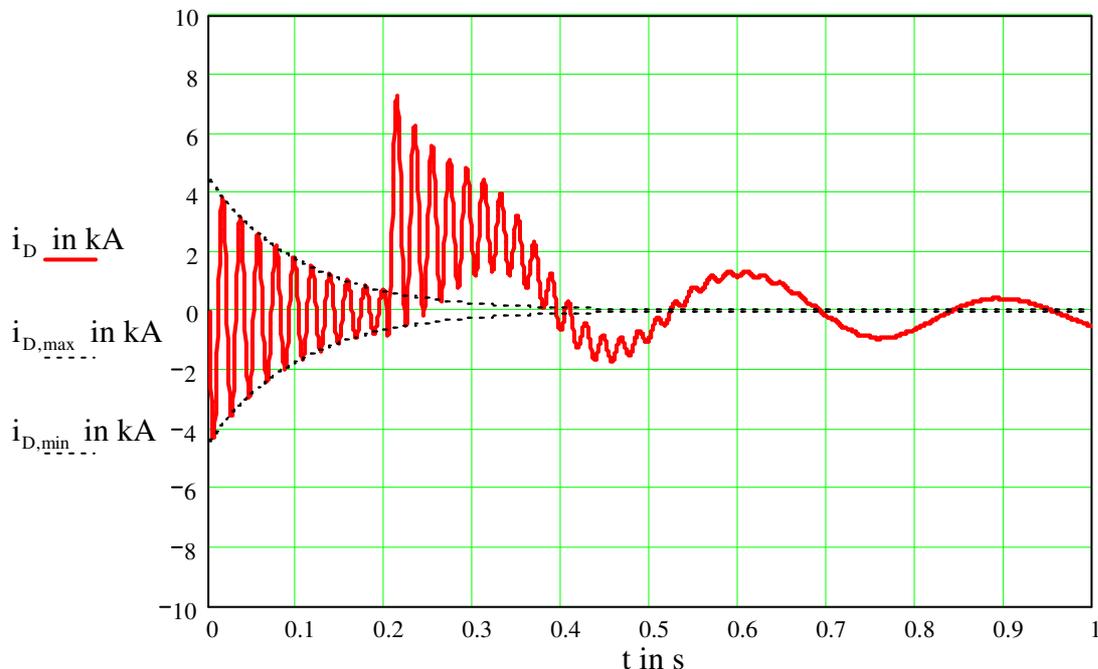
Auch im Drehmoment zeigt sich zum Zeitpunkt $t = 0.2\text{s}$ ein dynamischer Ausgleichsvorgang, hervorgerufen durch die Grobsynchronisation. Es ist zu beachten, dass das Drehmoment direkt nach dem Kurzschluss ($t = 0\text{s}$) negativ wird, direkt nach der Grobsynchronisation ($t = 0.2\text{s}$) dagegen positiv (dies hängt natürlich von der augenblicklichen relativen Lage zwischen Statorfeld und Rotor zum Zeitpunkt der Grobsynchronisation ab). Die Drehmoment-Zeit-Funktion korreliert mit der weiter unten gezeigten Drehzahl-Zeit-Funktion: Nach dem Kurzschließen wirkt das Drehmoment abbremmend, nach der Grobsynchronisation beschleunigend. Die Amplitude des Drehmomentes nach der Grobsynchronisation besitzt die gleiche Größenordnung wie nach dem Kurzschließen.



Auch im Erregerstrom zeigt sich der dynamische Ausgleichsvorgang nach der Grobsynchronisation; der stationäre Endwert des Erregerstromes ist sein Nennwert.



Der Maximalwert des Erregerstromes nach der Grobsynchronisation ist etwa so groß wie nach dem Kurzschließen. Die Amplitude des Dämpferstromes ist nach der Grobsynchronisation sogar um etwa den Faktor 1,5 größer als nach dem Kurzschluss; der stationäre Endwert ist bei jedem dynamischen Vorgang gleich null.

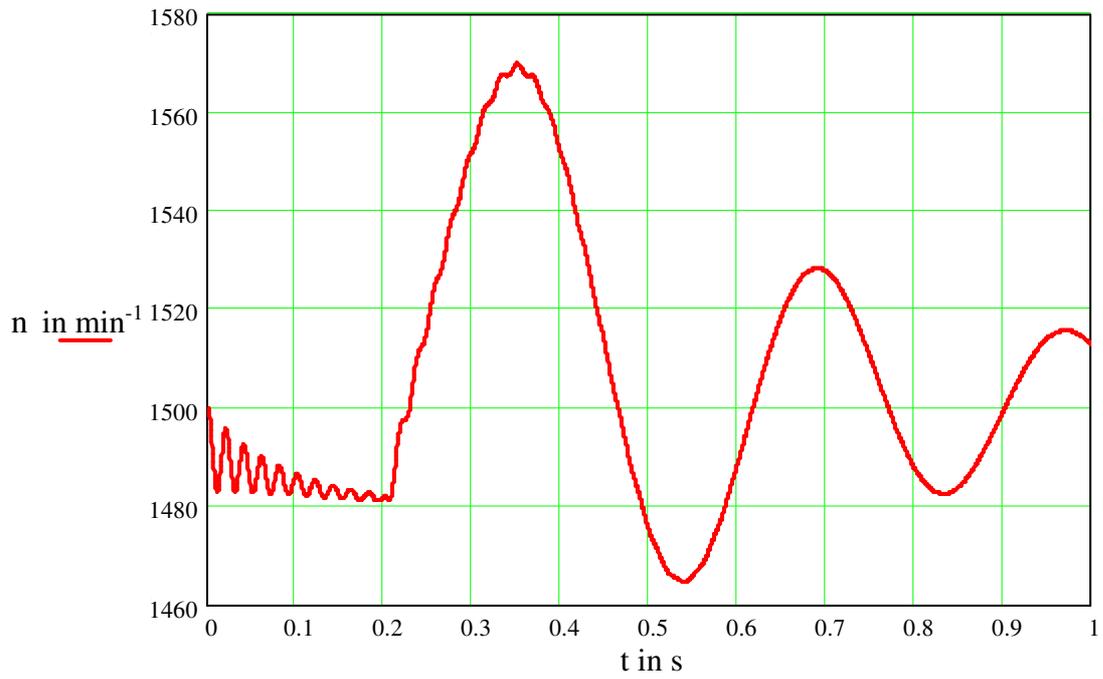


Abschließend ist im folgenden Bild die Drehzahl-Zeit-Funktion dargestellt (die synchrone Drehzahl beträgt bei dieser Maschine 1500min^{-1}). Wie bereits vorher erläutert, wirkt das Drehmoment im ersten Augenblick nach dem Kurzschließen abbremmend, im ersten Augenblick nach der Grobsynchronisation beschleunigend.

Im Mittel fällt die Drehzahl während des Kurzschlusses (0s bis 0.2s), weil durch die Strangströme Wirkverluste in den Ohmschen Widerständen entstehen; diese Energie wird durch die Reduzierung der Rotationsenergie aufgebracht (Reibung war vernachlässigt).

Nach der Grobsynchronisation wird die Maschine wieder beschleunigt und schwingt auf die synchrone Drehzahl ein; dies geschieht mit Hilfe des Dämpferkäfigs analog zur Betriebsweise einer Asynchronmaschine. Da in dieser Simulation das gesamte Gegenmoment zu null angenommen war (somit die Reibung vernachlässigt war), erreicht die Maschine die synchrone Drehzahl.

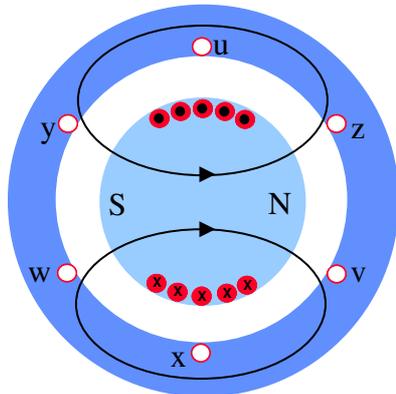
In der Realität muss die synchrone Drehzahl durch eine Steigerung des Antriebsmomentes eingestellt werden (Kompensation der Reibung und sonstiger Gegenmomente) und durch eine Regelung stabilisiert werden (Vermeidung des Überschwingens).



7. Physikalische Erklärung des Stoßkurzschlusses:

In diesem Abschnitt werden die prinzipiellen physikalischen Zusammenhänge bei einem Stoßkurzschluss der Synchronmaschine erläutert:

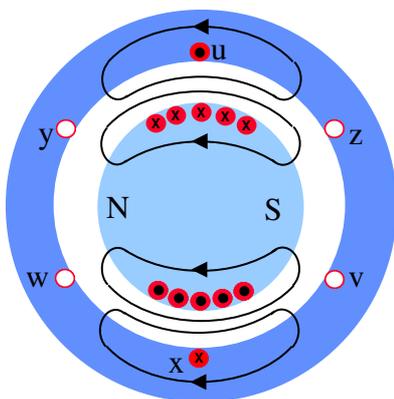
- Im Leerlauf erzeugt das rotierende und erregte Polrad eine rotierende Flussverteilung und damit sinusförmige Klemmenspannungen ($u_{1,u} = \sqrt{2} \cdot U \cdot \sin(\omega t)$)



- Werden nun die Klemmen kurzgeschlossen, so gilt $u \equiv 0$. Unter Vernachlässigung des Ohmschen Widerstandes ($R_1 = 0$) erhält man für die Statorflussverketung:

$$\frac{d\Psi}{dt} = 0 \Rightarrow \Psi = \text{const.}$$

- Da die Statorflussverketung aufgrund des Klemmenkurzschlusses erhalten bleibt, ergibt sich nach einer halben Periode folgendes Bild:

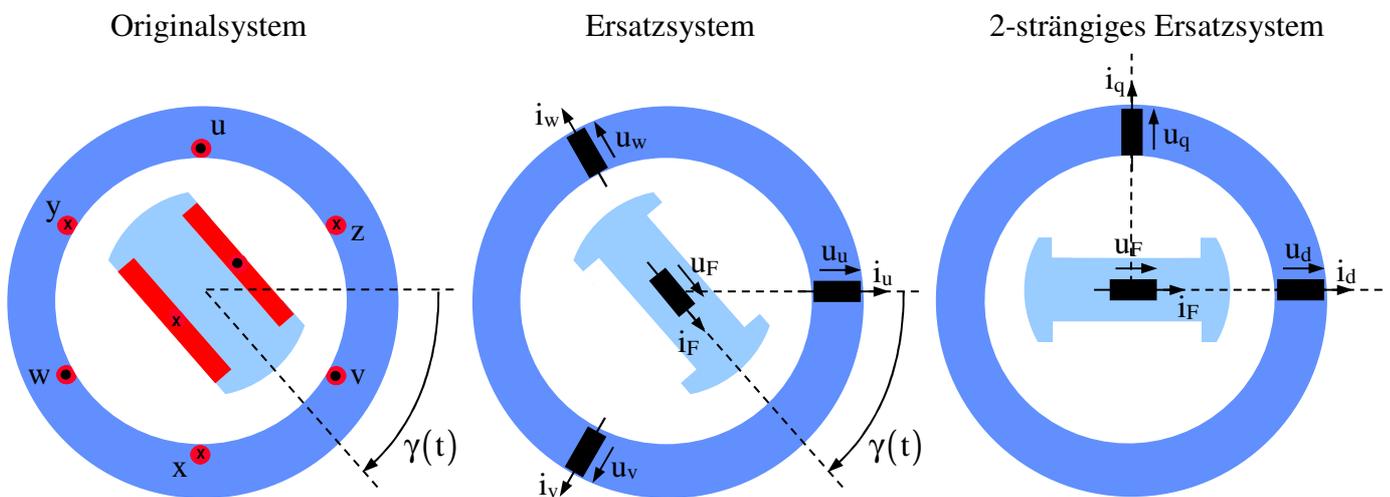


Der Fluss wird auf den magnetisch schlecht leitenden Streupfad gedrängt, d.h. die Statorwicklung muss eine Durchflutung aufbringen (d.h. einen Strom führen), die den Fluss auch über den Streuweg treiben kann. Dies erklärt, warum der Strom etwa um den Faktor $1/\sigma$ größer sein muss als beim Dauerkurzschluss (beim Dauerkurzschluss wird der Fluss wieder über Stator und Rotor geführt und nicht mehr über die Streuwege, d.h. L_1 ist relevant und nicht mehr σL_1).

5.4 Stationärer Betrieb der Schenkelpol-Synchronmaschine in Raumzeigerdarstellung

Im Gegensatz zur Vollpolmaschine ist die Schenkelpol-Synchronmaschine nicht symmetrisch aufgebaut, sondern der magnetische Leitwert ist in Längs- und Querachse unterschiedlich (es gilt $X_d > X_q$). Deshalb kann die Transformation nicht mehr beliebig durchgeführt werden, sondern sie muss sich an dem unsymmetrischen Teil (Läufer) orientieren: Nur dann ergeben sich konstante Gegeninduktivitäten.

Das folgende Bild ist der Vorlesung „Elektrische Maschinen und Antriebe“ entnommen. Hierbei ist das Ersatzwicklungssystem der Schenkelpolsynchronmaschine so aufgebaut, dass alle Wicklungen in der d-Achse (direct axis, Achse der Erregerwicklung) oder senkrecht hierzu (q-Achse, quadrature axis) liegen. Die Zuordnung von Spannungen und Strömen ist hier für das Verbraucherzählpfeilsystem (VZS) dargestellt.



Zusätzlich soll nun noch berücksichtigt werden, dass auch eine eventuell vorhandene Dämpferwicklung im Rotor in einen Längsanteil mit Strom i_d und einen Queranteil mit Strom i_q zerlegt wird.

Analog zu Kapitel 5.2 „Stationärer Betrieb der Vollpol-Synchronmaschine in Raumzeigerdarstellung“ folgt für das Gleichungssystem, hier im Erzeugerzählpfeilsystem (EZS) und mit $\omega_k = \omega_m$:

$$-u_{I,q}(t) = R_1 \cdot i_{I,q}(t) + \frac{d\psi_{I,q}(t)}{dt} + \omega_k \cdot \psi_{I,d}(t)$$

$$-u_{I,d}(t) = R_1 \cdot i_{I,d}(t) + \frac{d\psi_{I,d}(t)}{dt} - \omega_k \cdot \psi_{I,q}(t)$$

$$\begin{aligned}
 0 &= R_D \cdot i_D(t) + \frac{d\psi_D(t)}{dt} \\
 0 &= R_Q \cdot i_Q(t) + \frac{d\psi_Q(t)}{dt} \\
 -u_F(t) &= R_F \cdot i_F(t) + \frac{d\psi_F(t)}{dt} \\
 T(t) &= -\frac{3}{2} p \cdot [\psi_{I,d}(t) \cdot i_{I,q}(t) - \psi_{I,q}(t) \cdot i_{I,d}(t)]
 \end{aligned}$$

Bei der Aufstellung des Gleichungssystems für die Flussverkettungen muss auf die Vorzeichen geachtet werden. In der Längsachse magnetisieren Ständer- und Erregerwicklung, wenn sie positiven Strom führen, gleichsinnig; die Dämpferwicklung gegensinnig. In der Querachse magnetisieren Ständer- und Dämpferwicklung gegensinnig. Zwischen Längs- und Querachse besteht keine magnetische Kopplung. Man erhält die folgende Matrixgleichung für die Flussverkettungen:

$$\begin{bmatrix} \psi_{I,d}(t) \\ \psi_F(t) \\ \psi_D(t) \\ \psi_{I,q}(t) \\ \psi_Q(t) \end{bmatrix} = [L] \begin{bmatrix} i_{I,d}(t) \\ i_F(t) \\ i_D(t) \\ i_{I,q}(t) \\ i_Q(t) \end{bmatrix}, \quad [L] = \begin{bmatrix} L_d & L_{dF} & -L_{dD} & 0 & 0 \\ L_{dF} & L_F & -L_{DF} & 0 & 0 \\ -L_{dD} & -L_{DF} & L_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_q & -L_{qQ} \\ 0 & 0 & 0 & -L_{qQ} & L_Q \end{bmatrix}$$

Das mechanische Antriebsmoment T_A muss nun sowohl das elektrodynamische Moment T , als auch das Beschleunigungsmoment T_{acc} überwinden:

$$\begin{aligned}
 T_A(t) &= T(t) + T_{acc}(t) \\
 &= -\frac{3}{2} p [\psi_{I,d}(t) \cdot i_{I,q}(t) - \psi_{I,q}(t) \cdot i_{I,d}(t)] + \frac{\Theta}{p} \frac{d^2 \gamma}{dt^2}
 \end{aligned}$$

Mit den Gleichungen für die Flussverkettungen, den Spannungsgleichungen und der Drehmomentengleichung ist die Schenkelpol-Synchronmaschine in einem mit synchroner Winkelgeschwindigkeit rotierenden Koordinatensystem vollständig beschrieben.

Ausgehend von diesen Gleichungen der Raumzeigertheorie zur Berechnung des dynamischen Betriebs soll zunächst als Sonderfall der stationäre Betrieb der Schenkelpol-Synchronmaschine betrachtet werden.

Im stationären Betrieb ist die Drehzahl konstant ($d\gamma/dt = \omega_m = \text{const.}$) und es treten keine zeitlichen Änderungen der Flussverkettung auf ($d\psi/dt = 0$). Außerdem soll im Folgenden der Statorwiderstand vernachlässigt werden ($R_1 = 0$). Das Gleichungssystem wird dann zu:

$$u_{1,q}(t) = -\omega_K \cdot \psi_{1,d}(t)$$

$$u_{1,d}(t) = \omega_K \cdot \psi_{1,q}(t)$$

$$0 = i_D(t)$$

$$0 = i_Q(t)$$

$$u_F(t) = -R_F \cdot i_F(t)$$

$$T_A(t) = -\frac{3}{2} p \cdot [\psi_{1,d}(t) \cdot i_{1,q}(t) - \psi_{1,q}(t) \cdot i_{1,d}(t)]$$

$$\psi_{1,d}(t) = L_d i_{1,d}(t) + L_{dF} i_F(t)$$

$$\psi_{1,q}(t) = L_q i_{1,q}(t)$$

Alle Ströme und Spannungen sind nun Gleichwerte; deshalb wird im Folgenden eine explizite Zeitabhängigkeit nicht mehr angegeben. Die übrigen Flussverkettungen sind hier nicht von Interesse. Das Einsetzen der Flussverkettungen ergibt (mit $\omega_K = \omega_m$):

$$u_{1,d} = \omega_m L_q i_{1,q}$$

$$u_{1,q} = -\omega_m (L_d i_{1,d} + L_{dF} i_F)$$

$$u_F = -i_F R_F$$

$$T_A = \frac{3}{2} \frac{p}{\omega_m} (i_{1,d} u_{1,d} + i_{1,q} u_{1,q})$$

Mit einer analogen Rechnung wie in Kapitel 5.2 wird nun die Rücktransformation durchgeführt. Für das rotierende Koordinatensystem wird hier ebenfalls

$$\alpha(t) = \omega_1 t + \alpha_0, \text{ mit } \alpha_0 = \vartheta$$

gewählt. Man erhält

$$\begin{aligned} u_{1,u}(t) &= u_{1,q}(t) \cdot \cos(\alpha) + u_{1,d}(t) \cdot \sin(\alpha) \\ &= u_{1,q}(t) \cdot \cos(\omega_1 t + \vartheta) + u_{1,d}(t) \cdot \sin(\omega_1 t + \vartheta) \end{aligned}$$

und weiter (analog zur Rechnung in Kapitel 5.2):

$$\underline{U}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[j\omega_1 (j \cdot L_d i_{1,d} - L_q i_{1,q}) \cdot e^{j\vartheta} + j\omega_1 L_{dF} (j \cdot i_F) \cdot e^{j\vartheta} \right]$$

Mit den Definitionen aus Kapitel 5.2

$$\underline{I}_{1,q} = \frac{i_{1,q}}{\sqrt{2}} e^{j\vartheta}$$

$$\underline{I}_{1,d} = -j \frac{i_{1,d}}{\sqrt{2}} e^{j\vartheta}$$

$$\underline{U}_P = -j\omega_1 L_{dF} \left(-j \frac{\underline{i}_F}{\sqrt{2}} e^{j\vartheta} \right)$$

$$= -\omega_1 L_{dF} \frac{\underline{i}_F}{\sqrt{2}} e^{j\vartheta}$$

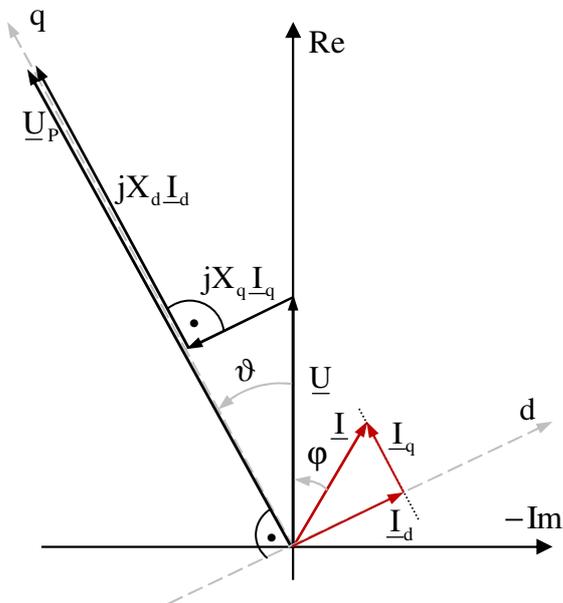
wird die Ständerspannungsgleichung zu:

$$\underline{U}_1 = -j\omega_1 L_d \underline{I}_{1,d} - j\omega_1 L_q \underline{I}_{1,q} + \underline{U}_P$$

Lässt man nun jeweils den Index „1“ fallen, so folgt mit den Reaktanzen der Längsachse $X_d = \omega L_d$ und der Querachse $X_q = \omega L_q$ weiter:

$$\underline{U} + jX_q \underline{I}_q + jX_d \underline{I}_d = \underline{U}_P$$

Hiermit kann nun das Zeigerdiagramm der Schenkelpol-Synchronmaschine aufgestellt werden (siehe auch Vorlesung „Elektrische Maschinen und Antriebe“):

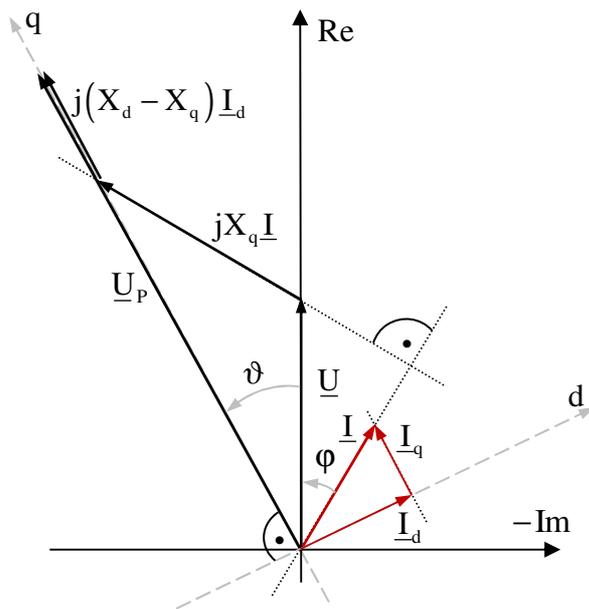


Eine Umformung der Spannungsgleichung ergibt:

$$\underline{U} + jX_q \underline{I}_q + jX_d \underline{I}_d = \underline{U}_P, \quad \underline{I} = \underline{I}_d + \underline{I}_q$$

$$\Rightarrow \underline{U} + jX_q \underline{I} + j(X_d - X_q) \underline{I}_d = \underline{U}_P$$

Hieraus kann das folgende, häufig in der Praxis verwendete Zeigerdiagramm abgeleitet werden:



Dieses Zeigerdiagramm kann wie folgt aus den Daten der Maschine entwickelt werden:

- Gegeben sind U , I und φ , z.B. als Messwerte.
- Die Spannung $\underline{U} = U$ wird reell gewählt. Der Strom \underline{I} wird unter dem Phasenwinkel φ eingezeichnet. Senkrecht zu diesem Vektor \underline{I} wird der Vektor $jX_q \underline{I}$ mit seinem Fußpunkt an der Spitze des Vektors $\underline{U} = U$ abgetragen. Durch den Ursprung und die Spitze des Vektors $jX_q \underline{I}$ ist die Richtung der Polradspannung \underline{U}_p (d.h. der Winkel ϑ) und damit auch die q-Achse festgelegt. Senkrecht hierzu liegt dann die d-Achse. Nun kann der Strom \underline{I} in \underline{I}_d und \underline{I}_q zerlegt werden. An die Spitze des Vektors $jX_q \underline{I}$ wird jetzt der Fußpunkt des Vektors $j(X_d - X_q) \underline{I}_d$ gelegt; dadurch ist die Polradspannung \underline{U}_p bekannt (Fußpunkt im Ursprung, Spitze an der Spitze des Vektors $j(X_d - X_q) \underline{I}_d$).

Die Schenkelpol-Synchronmaschine unterscheidet sich von der Vollpol-Synchronmaschine durch die unterschiedlichen Reaktanzen in d- und q-Achse. Für $X_d = X_q = X$ folgen aus den oben angegebenen Gleichungen und Zeigerdiagrammen die entsprechenden Darstellungen für die Vollpol-Synchronmaschine.

Für das Drehmoment war die Beziehung

$$T_A = \frac{3}{2} \frac{p}{\omega} (i_d u_d + i_q u_q)$$

hergeleitet worden. Setzt man nun statt der Gleichwerte die Effektivwerte I_d , U_d , I_q und U_q ein, so erhält man:

$$T_A = \frac{3p}{\omega} (I_d U_d + I_q U_q)$$

Die Wirkleistungen der Längs- und Querachse addieren sich also.

Aus dem obigen Zeigerdiagramm kann man nun die folgenden Beziehungen ableiten (U_d und U_q ergeben sich aus der Zerlegung von U nach d- und q-Achse):

$$I_d = \frac{U_p - U \cos(\vartheta)}{X_d} \quad U_d = U \sin(\vartheta)$$

$$I_q = \frac{U \sin(\vartheta)}{X_q} \quad U_q = U \cos(\vartheta)$$

Durch Einsetzen erhält man für das Drehmoment:

$$T_A = \frac{3p}{\omega} (I_d U_d + I_q U_q)$$

$$= \frac{3p}{\omega} \left(\frac{U_p - U \cos(\vartheta)}{X_d} U \sin(\vartheta) + \frac{U \sin(\vartheta)}{X_q} U \cos(\vartheta) \right)$$

$$= \frac{3p}{\omega} \left(\frac{U_p U}{X_d} \sin(\vartheta) + U^2 \left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right) \cos(\vartheta) \sin(\vartheta) \right)$$

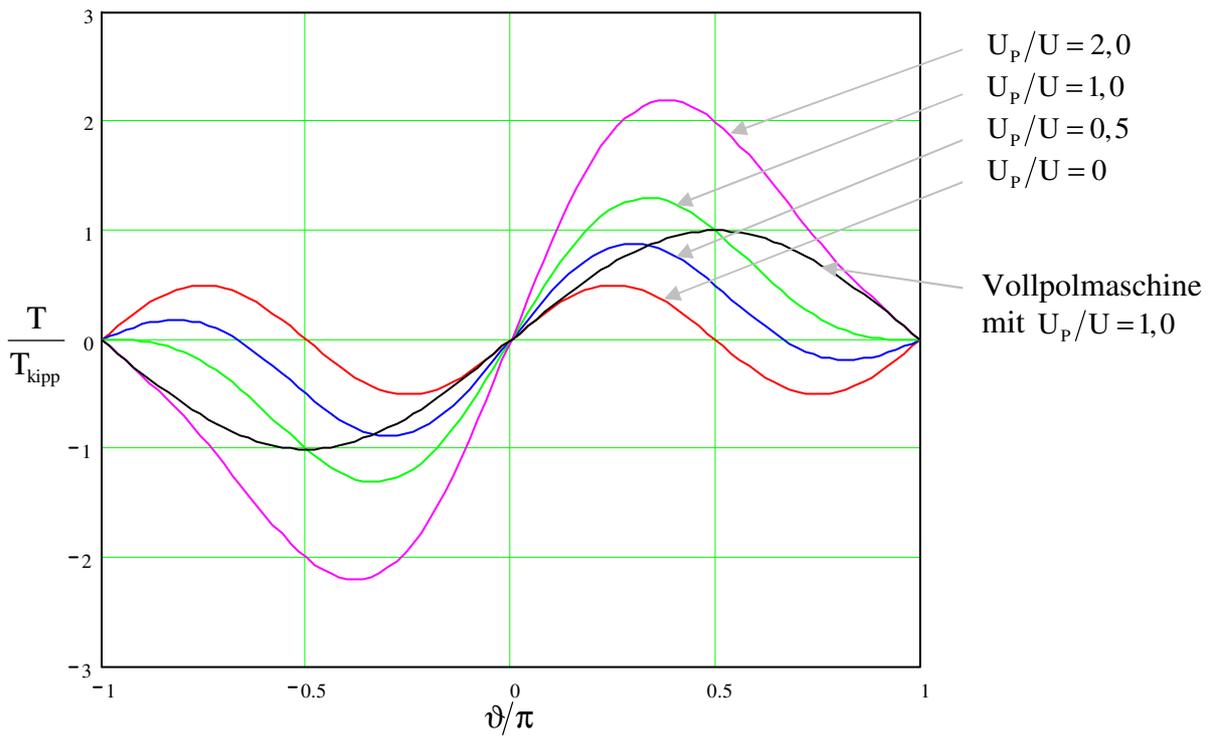
$$= \frac{3p}{\omega} \left(\frac{U U_p}{X_d} \sin(\vartheta) + \frac{U^2}{2} \left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right) \sin(2\vartheta) \right)$$

Dieses Ergebnis ist bereits aus der Vorlesung „Elektrische Maschinen und Antriebe“ bekannt: Der erste Summand entspricht dem Drehmoment der Vollpol-Synchronmaschine und ist erregungsabhängig, der zweite Summand ist das sogenannte Reaktionsmoment und ist erregungsunabhängig (hervorgerufen durch den Unterschied der magnetischen Leitwerte in d- und q-Achse). Durch dieses Reaktionsmoment tritt das Kippmoment bereits bei kleineren Polradwinkeln als $\pi/2$ auf, siehe die folgende Grafik.

Dargestellt ist das Verhältnis von Drehmoment zu Kippmoment über dem Polradwinkel ϑ für verschiedene Erregungen U_p/U :

- Rot: $U_p/U = 0$
- Blau: $U_p/U = 0,5$
- Grün: $U_p/U = 1,0$
- Magenta: $U_p/U = 2,0$
- Schwarz: Drehmoment der Vollpol-Synchronmaschine für $U_p/U = 1,0$
(zum Vergleich)

Neben der Verschiebung des Kippmomentes zu kleineren Polradwinkeln erkennt man auch, dass die Schenkelpolmaschine aufgrund des zusätzlichen Reaktionsmomentes bei gleicher Erregung ein höheres Kippmoment liefert (angenommen war $X_{d,\text{Schenkelpol}} = X_{\text{Vollpol}}$). Ebenso wird deutlich, dass bei dem angenommenen Verhältnis $X_d = 2X_q$ das Kippmoment ohne Erregung (d.h. das Reaktions-Kippmoment) nur halb so groß ist wie das Kippmoment der Vollpol-Synchronmaschine.



5.5 Stoßkurzschluss der Schenkelpol-Synchronmaschine

1. Anfangsbedingungen für $t=0$:

Mit einigen Näherungen kann der Stoßkurzschluss der Schenkelpolmaschine analytisch berechnet werden. Da der Rechenaufwand aber erheblich ist, soll im Folgenden nur die numerische Lösung betrachtet werden.

Zunächst müssen die Anfangsbedingungen festgelegt werden. Der Ausgangszustand vor dem Stoßkurzschluss soll der Leerlauf mit Nennerregung sein (dies bedeutet, dass Nennspannung anliegt und der Rotor mit Synchrondrehzahl dreht). Die Größen vor dem Schaltaugenblick erhalten im Folgenden den zusätzlichen Index „0“. Für die Anfangsbedingungen gilt dann:

- Die Statorströme sind gleich null, weil die Klemmen offen sind; der Dämpferstrom ist gleich null, weil ein stationärer Zustand mit Synchrondrehzahl vorliegt.

$$\dot{i}_{d,0} = \dot{i}_{q,0} = \dot{i}_{D,0} = \dot{i}_{Q,0} = 0$$

- Für die Spannungen gilt:

$$u_{d,0} = \omega \Psi_{q,0} = \omega L_q \dot{i}_{q,0} = 0$$

$$u_{q,0} = -\omega \Psi_{d,0} = -\omega (L_d \dot{i}_{d,0} + L_{dF} \dot{i}_{F,0}) = -\omega L_{dF} \dot{i}_{F,0} = \sqrt{2} U_{1,N}$$

- Aus der letzten Gleichung folgt dann auch:

$$\dot{i}_{F,0} = -\frac{\sqrt{2} U_{1,N}}{\omega L_{dF}}$$

- Außerdem gilt:

$$u_{F,0} = R_F \dot{i}_{F,0}$$

$$T_{A,0} = \frac{3}{2} \frac{p}{\omega_m} (\dot{i}_{d,0} u_{d,0} + \dot{i}_{q,0} u_{q,0}) = 0$$

Wie bei der Berechnung der Vollpolmaschine wird nun $\alpha(t) = \omega_1 t + \varepsilon$ gesetzt. Dann folgt mit Hilfe der Rücktransformation:

$$\begin{aligned} u_{1,u,0} &= u_{1,q,0} \cos(\alpha) + u_{1,d,0} \sin(\alpha) \\ &= \sqrt{2} \cdot U_{1,N} \cos(\alpha) + 0 \\ &= \sqrt{2} \cdot U_{1,N} \cos(\omega_1 t + \varepsilon) \end{aligned}$$

Der Winkel ε gibt also (wie bei der Betrachtung des Stoßkurzschlusses der Vollpolmaschine) den Schaltaugenblick an:

- Für $\varepsilon = 0$ liegt zur Zeit $t = 0$ gerade der Scheitelwert der Spannung an, d.h. es wird im Spannungsmaximum geschaltet.

- Für $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$ ist zur Zeit $t=0$ die Spannung ist gleich null (Schalten im Spannungsnulldurchgang).

2. Gleichungssystem für $t>0$:

Bringt man das Gleichungssystem der Schenkelpolmaschine (siehe Kapitel 5.4) in die Zustandsdarstellung, so lässt es sich mit Hilfe numerischer Verfahren auf dem Digitalrechner lösen. Das Gleichungssystem lautet im Erzeugerzählfeilsystem und mit $\omega_k = \omega_m$ (wobei die explizite Zeitabhängigkeit und der Index „I“ aus Gründen der Schreibvereinfachung weggelassen werden):

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi_d}{dt} &= -u_d - i_d R_1 + \omega \Psi_q \\ \frac{d\Psi_q}{dt} &= -u_q - i_q R_1 - \omega \Psi_d \\ \frac{d\Psi_F}{dt} &= -u_F - i_F R_F \\ \frac{d\Psi_D}{dt} &= -i_D R_D \\ \frac{d\Psi_Q}{dt} &= -i_Q R_Q \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{p}{\Theta} \left[T_A - \frac{3}{2} p (i_d \Psi_q - i_q \Psi_d) \right] \end{aligned}$$

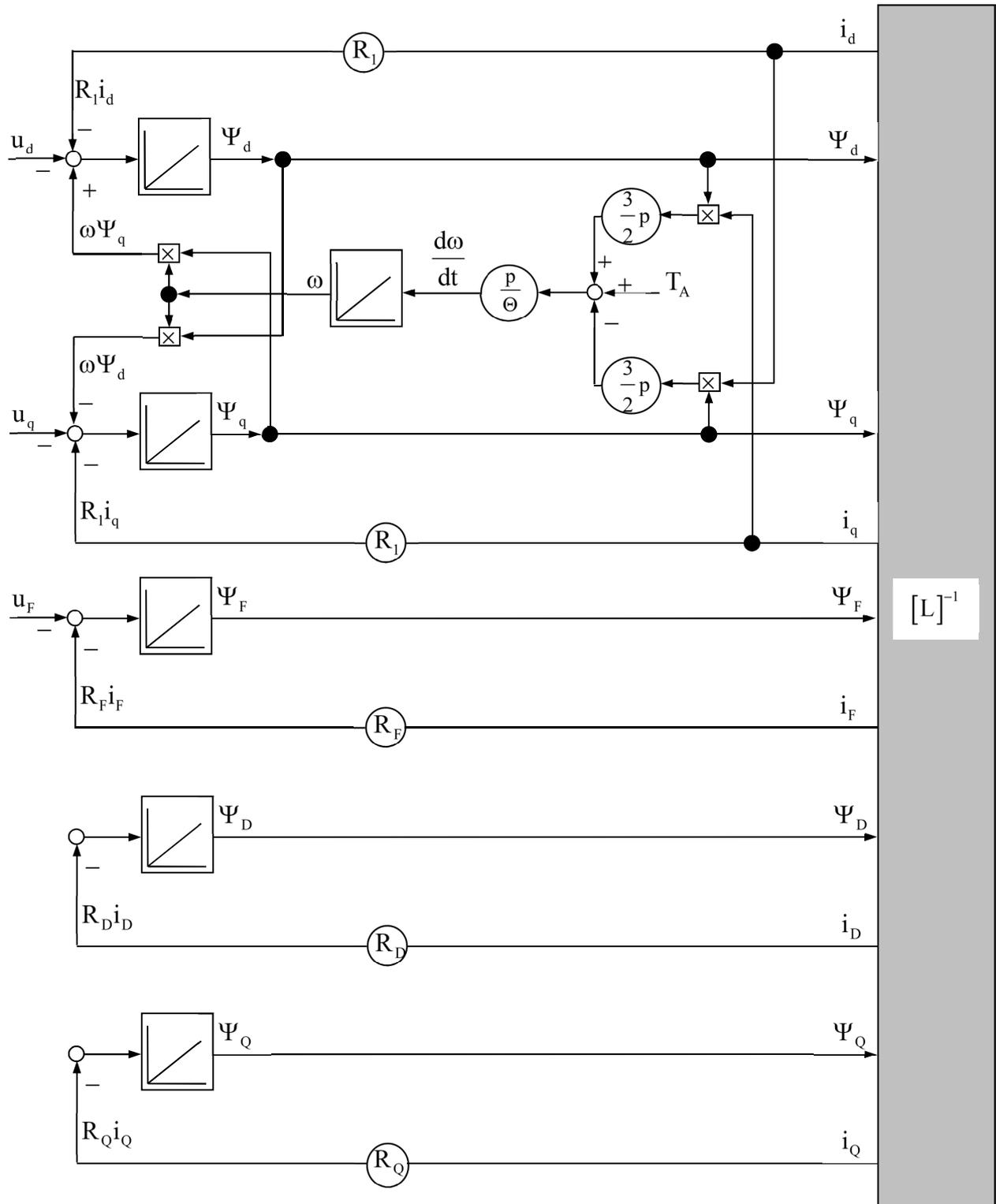
Der Zusammenhang zwischen den Strömen und den Flussverkettungen ist durch die Induktivitätsmatrix $[L]$ gegeben.

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_F \\ i_D \\ i_q \\ i_Q \end{bmatrix} = [L]^{-1} \begin{bmatrix} \Psi_d \\ \Psi_F \\ \Psi_D \\ \Psi_q \\ \Psi_Q \end{bmatrix}, \quad [L] = \begin{bmatrix} L_d & L_{dF} & -L_{dD} & 0 & 0 \\ L_{dF} & L_F & -L_{DF} & 0 & 0 \\ -L_{dD} & -L_{DF} & L_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_q & -L_{qQ} \\ 0 & 0 & 0 & -L_{qQ} & L_Q \end{bmatrix}$$

Zur Berechnung des Stoßkurzschlusses werden für $t > 0$ die Ständerspannungen zu null gesetzt:

$$u_d = u_q = 0$$

Das folgende Strukturbild veranschaulicht das obige Gleichungssystem:



Führt man eine entsprechende Simulation zur Berechnung des Stoßkurzschlusses der Schenkelpolmaschine durch (hierfür müssen die Maschinendaten bekannt sein), so erhält man

Zeitfunktionen, die ähnlich zum Stoßkurzschluss der Vollpolmaschine sind (aber nicht identisch!):

- Der Statorstrom erreicht im Stoßkurzschlussfall einen sehr hohen Wert, der dann auf den Dauerkurzschlusswert abklingt.
- Der Erregerstrom steigt ebenfalls sehr schnell auf einen sehr hohen Wert, der analog zum Ständerstrom abklingt.
- Die transformierten Ständerströme i_d und i_q sind im stationären Betrieb Gleichströme; i_d ist der Blindanteil (Magnetisierung), i_q ist der Wirkanteil (Drehmoment).
- Die Dämpferströme (bei der hier betrachteten Schenkelpolmaschine sind das i_D und i_Q) sind nur im ersten Zeitraum nach dem Schalten wirksam, sonst sind sie gleich null.

Hält man statt der Drehzahl das Antriebsmoment T_A konstant, so fällt (wie bei der Vollpolmaschine) die Drehzahl nach dem Kurzschließen ab, weil durch die Kurzschlussströme in den Ohmschen Widerständen Wirkverluste entstehen, die aus der kinetischen Energie des Systems gedeckt werden.

Die Berechnung bei der Schenkelpolmaschine ist insgesamt aufwändiger als bei der Vollpolmaschine, weil hier für die Dämpferwicklung eine zusätzliche Differentialgleichung auftritt.

5.6 Transienter Betrieb der Schenkelpol-Synchronmaschine

Dynamische Ausgleichsvorgänge können ähnlich wie stationäre Vorgänge berechnet werden, wenn einige vereinfachende Voraussetzungen angenommen werden. Man erspart sich die Integration des nichtlinearen Gleichungssystems; allerdings muss immer überprüft werden, ob beim betrachteten Vorgang diese Voraussetzungen auch erfüllt sind:

- Die Drehzahl der Schenkelpolmaschine wird als konstant angenommen. Je größer das Trägheitsmoment der rotierenden Massen ist, desto besser ist diese Annahme erfüllt.
- Die Wirkung der Dämpferwicklung bleibt unberücksichtigt: Der Ausgleichsvorgang der Dämpferströme klingt entweder sehr schnell ab (deutlich schneller als der Ausgleichsvorgang der Statorströme), oder es ist keine Dämpferwicklung vorhanden.
- Die transformatorischen Glieder der Spannungsgleichung sind gegenüber den rotatorischen vernachlässigbar (z.B. $\frac{d\Psi_d}{dt} \ll \omega\Psi_q$).
- Die Erregerflussverkettung Ψ_F ist während des Ausgleichsvorganges konstant. Dies kann z.B. dann vorausgesetzt werden, wenn die Maschine mit einem Spannungsregler ausgerüstet ist, der den Ohmschen Spannungsabfall am Widerstand des Erregerkreises kompensiert, wenn der Strom sich ändert: $-u_F - R_F i_F = 0 = \frac{d\Psi_F}{dt}$.

Sind diese Bedingungen erfüllt, spricht man vom „transienten Betrieb“ der Synchronmaschine. Aus dem allgemeinen Gleichungssystem für die Schenkelpolmaschine kann dann das folgende Gleichungssystem für diesen transienten Betrieb hergeleitet werden:

$$\begin{aligned} 0 &= -u_d - i_d R_l + \omega \Psi_q \\ 0 &= -u_q - i_q R_l - \omega \Psi_d \\ 0 &= -u_F - i_F R_F \\ 0 &= -i_D R_D \\ 0 &= -i_Q R_Q \\ 0 &= \frac{p}{\Theta} \left[T_A - \frac{3}{2} p (i_d \Psi_q - i_q \Psi_d) \right] \end{aligned}$$

Vernachlässigt man nun noch den Ohmschen Spannungsabfall am Ständerwiderstand, so folgt:

$$\begin{aligned} u_d &= +\omega\Psi_q \\ u_q &= -\omega\Psi_d \\ u_F &= -i_F R_F \\ i_D &= 0 \\ i_Q &= 0 \\ T_A &= \frac{3}{2} p (i_d \Psi_q - i_q \Psi_d) \end{aligned}$$

Für die Flussverkettungen gilt:

$$\begin{bmatrix} \Psi_d \\ \Psi_F \\ \Psi_D \\ \Psi_q \\ \Psi_Q \end{bmatrix} = [L] \begin{bmatrix} i_d \\ i_F \\ i_D \\ i_q \\ i_Q \end{bmatrix}, \quad [L] = \begin{bmatrix} L_d & L_{dF} & -L_{dD} & 0 & 0 \\ L_{dF} & L_F & -L_{DF} & 0 & 0 \\ -L_{dD} & -L_{DF} & L_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_q & -L_{qQ} \\ 0 & 0 & 0 & -L_{qQ} & L_Q \end{bmatrix}$$

Also gilt (mit $i_D = i_Q = 0$):

$$\begin{aligned} \Psi_F &= L_F i_F + L_{dF} i_d \\ \Psi_d &= L_d i_d + L_{dF} i_F \\ \Psi_q &= L_q i_q \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem für diesen transienten Betrieb besitzt die gleiche Form wie das Gleichungssystem für den stationären Betrieb, allerdings gibt es einen wesentlichen Unterschied:

- stationärer Betrieb: Erregerstrom $i_F = \text{const.}$
- transienter Betrieb: Erregerfluss $\Psi_F = \text{const.}$

Aufgrund der Konstanz des Erregerflusses ergibt sich (der Index „0“ bezeichnet den stationären Zustand kurz vor dem Schalten):

$$\begin{aligned} \Psi_F &= L_F i_F + L_{dF} i_d \\ &= \Psi_{F,0} = L_F i_{F,0} + L_{dF} i_{d,0} \\ \Rightarrow i_F + \frac{L_{dF}}{L_F} i_d &= i_{F,0} + \frac{L_{dF}}{L_F} i_{d,0} \\ \Rightarrow i_F &= i_{F,0} + \frac{L_{dF}}{L_F} (i_{d,0} - i_d) \end{aligned}$$

Der Erregerstrom i_F ändert sich also mit dem Statorstrom i_d . Für die Polradspannung gilt ja:

$$u_p = -\omega L_{dF} i_F$$

Hiermit wird ein weiterer Unterschied zwischen stationärem und transientem Betrieb deutlich:

- stationärer Betrieb: Polradspannung $u_p = \text{const.}$
- transienter Betrieb: Polradspannung $u_p \neq \text{const.}$

Weiter folgt:

$$\begin{aligned} u_p &= -\omega L_{dF} i_F \\ &= -\omega L_{dF} \left[i_{F,0} + \frac{L_{dF}}{L_F} (i_{d,0} - i_d) \right] \\ &= -\omega L_{dF} i_{F,0} - \omega L_{dF} \frac{L_{dF}}{L_F} (i_{d,0} - i_d) \\ &= u_{p,0} + \omega L_{dF} \frac{L_{dF}}{L_F} (i_d - i_{d,0}) \end{aligned}$$

Mit

$$\sigma_{dF} = 1 - \frac{L_{dF}^2}{L_d L_F}$$

folgt weiter:

$$\begin{aligned} u_p &= u_{p,0} + \omega L_{dF} \frac{L_{dF}}{L_F} (i_d - i_{d,0}) \\ &= u_{p,0} + (1 - \sigma_{dF}) \omega L_d (i_d - i_{d,0}) \end{aligned}$$

Die Flussverkettung in der d-Achse wird zu:

$$\begin{aligned} \Psi_d &= L_d i_d + L_{dF} i_F \\ &= L_d i_d + L_{dF} \left[i_{F,0} + \frac{L_{dF}}{L_F} (i_{d,0} - i_d) \right] \\ &= L_{dF} i_{F,0} + L_d i_d \left(1 - \frac{L_{dF}^2}{L_d L_F} \right) + \frac{L_{dF}^2}{L_d L_F} L_d i_{d,0} \\ &= L_{dF} i_{F,0} + \sigma_{dF} L_d i_d + (1 - \sigma_{dF}) L_d i_{d,0} \end{aligned}$$

Die Spannungsgleichung der Querachse wird damit zu:

$$\begin{aligned} u_q &= -\omega \Psi_d \\ &= -\omega \left[L_{dF} i_{F,0} + \sigma_{dF} L_d i_d + (1 - \sigma_{dF}) L_d i_{d,0} \right] \\ &= -\omega L_{dF} i_{F,0} - \omega \sigma_{dF} L_d i_d - \omega (1 - \sigma_{dF}) L_d i_{d,0} \end{aligned}$$

Mit der Polradspannung vor dem Schalt Augenblick $u_{p,0} = -\omega L_{dF} i_{F,0}$ und der Transientreaktanz $X'_d = \sigma_{dF} \omega L_d$ folgt dann für die Spannung in der Querachse:

$$\begin{aligned} u_q &= -\omega L_{dF} i_{F,0} - \omega \sigma_{dF} L_d i_d - \omega (1 - \sigma_{dF}) L_d i_{d,0} \\ &= u_{p,0} - X'_d i_d - (1 - \sigma_{dF}) X_d i_{d,0} \quad , \quad X_d = \omega L_d \end{aligned}$$

Eine Umformung (alle konstanten Größen vor dem Schalten werden auf die linke Seite gebracht) ergibt:

$$u_{p,0} - (1 - \sigma_{dF}) X_d i_{d,0} = u_q + X'_d i_d = u'_p$$

Die Größe $u'_p = u_q + X'_d i_d$ ist also eine Konstante im transienten Betrieb (analog zur Größe $u_p = u_q + X_d i_d$, die im stationären Betrieb eine Konstante ist).

Für die Polradspannung gilt dann:

$$\begin{aligned} u_p &= u_{p,0} + (1 - \sigma_{dF}) \omega L_d (i_d - i_{d,0}) \\ &= u'_p + (1 - \sigma_{dF}) X_d i_d \end{aligned}$$

Die Spannung in der Längsachse bleibt unverändert:

$$u_d = +\omega \Psi_q = X_q i_q$$

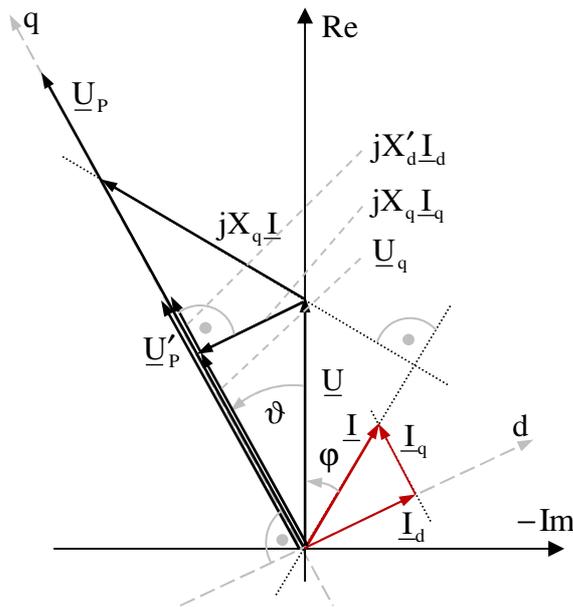
Nun kann von der Beschreibung in Raumzeigern auf die Effektivwerte übergegangen werden, indem die entsprechenden Gleichungen aus den vorangegangenen Kapiteln genutzt werden. Die Spannungsgleichungen des transienten Betriebs sind dann:

$$\begin{aligned} U'_p &= U_{p,0} - (1 - \sigma_{dF}) X_d I_{d,0} \\ &= U_q + X'_d I_d = \text{const.} \end{aligned}$$

$$U_p = U'_p + (1 - \sigma_{dF}) X_d I_d$$

$$U_d = X_q I_q$$

Für die Effektivwerte (und für das aus den obigen Gleichungen abgeleitete Zeigerdiagramm, siehe unten) gilt: Im transienten Betrieb ist nicht mehr U_p konstant (wie im stationären Betrieb), sondern es ist U'_p konstant. Die Größe von U'_p kann aus den Bedingungen kurz vor dem Schalten abgeleitet werden.



Für das Drehmoment gilt im transienten Betrieb:

$$T_A = \frac{3p}{\omega} (I_d U_d + I_q U_q)$$

Aus dem Zeigerdiagramm lassen sich folgende Beziehungen ablesen:

$$I_d = \frac{U'_p - U_q}{X'_d}, \quad I_q = \frac{U_d}{X_q}$$

$$U_d = U \sin(\vartheta) \quad U_q = U \cos(\vartheta)$$

Durch Einsetzen erhält man:

$$T_A = \frac{3p}{\omega} \left[\frac{U'_p - U \cos(\vartheta)}{X'_d} U \sin(\vartheta) + \frac{U \sin(\vartheta)}{X_q} U \cos(\vartheta) \right]$$

$$= \frac{3p}{\omega} \left[\frac{U'_p U}{X'_d} \sin(\vartheta) + \left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X'_d} \right) U^2 \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \right]$$

$$= \frac{3p}{\omega} \left[\frac{U'_p U}{X'_d} \sin(\vartheta) + \left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X'_d} \right) \frac{U^2}{2} \sin(2\vartheta) \right]$$

Mit dem Nennmoment der Synchronmaschine (siehe Vorlesung „Elektrische Maschinen und Antriebe“)

$$T_N = \frac{3U_N I_N \cos(\varphi_N)}{\omega/p}$$

folgt für das Verhältnis von transientem Drehmoment zu Nennmoment der Synchronmaschine:

$$\frac{T_A}{T_N} = \frac{3p \left[\frac{U'_p U}{X'_d} \sin(\vartheta) + \left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X'_d} \right) \frac{U^2}{2} \sin(2\vartheta) \right]}{\frac{3U_N I_N \cos(\varphi_N)}{\omega/p}}, \quad U = U_N$$

$$= \frac{\frac{U'_p}{X'_d} \sin(\vartheta) + \left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X'_d} \right) \frac{U_N}{2} \sin(2\vartheta)}{I_N \cos(\varphi_N)}$$

Mit

$$\frac{U_N}{I_N} = X_N \qquad \frac{U'_p}{U_N} = u'_p$$

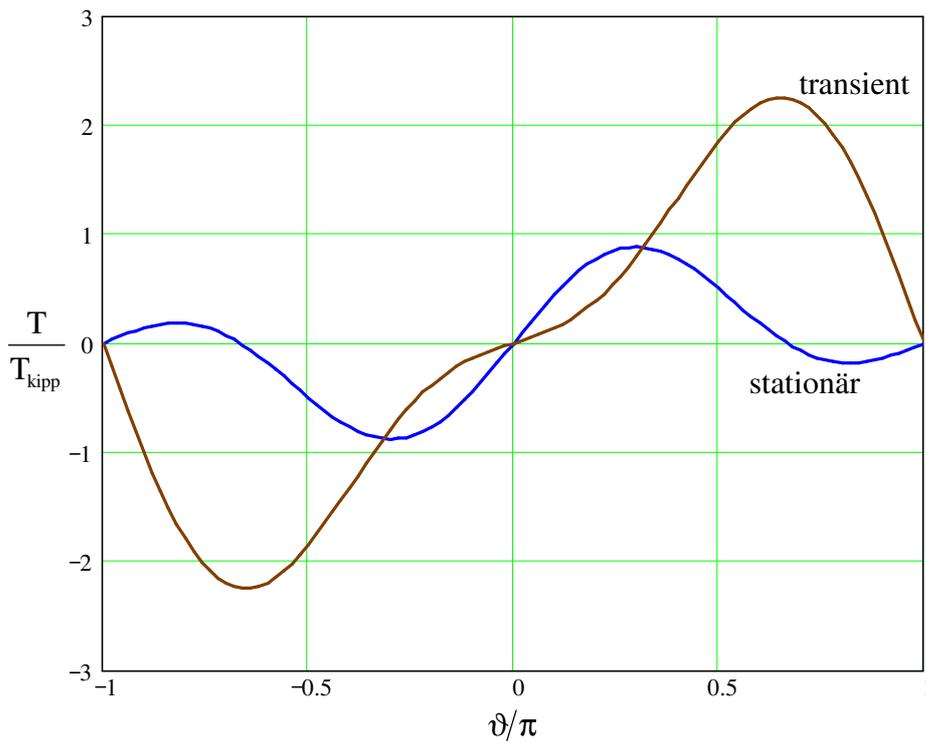
$$\frac{X'_d}{X_N} = x'_d \qquad \frac{X_q}{X_N} = x_q$$

folgt weiter (in normierter Darstellung):

$$\frac{T_A}{T_N} = \frac{1}{\cos(\varphi_N)} \left[\frac{u'_p}{x'_d} \sin(\vartheta) + \left(\frac{1}{x_q} - \frac{1}{x'_d} \right) \frac{1}{2} \sin(2\vartheta) \right]$$

Bezieht man das Drehmoment nicht auf das Nennmoment, sondern auf das Kippmoment einer entsprechenden Vollpol-Synchronmaschine, so erhält man die unten gezeigte Darstellung (diese Grafik ist direkt mit den bereits in Kapitel 5.4 und in der Vorlesung „Elektrische Maschinen und Antriebe“ gezeigten Darstellungen vergleichbar; gewählt wurde $\frac{U_p}{U} = 0.5$).

Man erkennt, dass im transienten Betrieb ein wesentlich höheres Kippmoment als im stationären Betrieb erreicht wird; außerdem liegt dieses Kippmoment bei einem Polradwinkel $\vartheta > \frac{\pi}{2}$, während für das Kippmoment im stationären Betrieb $\vartheta < \frac{\pi}{2}$ gilt. Dieser Effekt kommt dadurch zustande, dass während des transienten Vorganges der Erregerfluss konstant bleibt, indem sich der Erregerstrom (und damit das Drehmoment) auf einen sehr viel größeren Wert erhöht. Nach dem Abklingen des transienten Vorganges stellt sich der neue stationäre Zustand allmählich ein.



Der transiente Ausgleichsvorgang kann im Netzbetrieb von zwei unterschiedlichen Belastungsstößen hervorgerufen werden:

- **Elektrischer Laststoß:** Durch eine Schalthandlung im vorgeschalteten Netz ändern sich Netzspannung und Netzreaktanz plötzlich. Zur Ermittlung von U'_p müssen die Werte des stationären Betriebes vor dem Schalten genommen werden, für die Zeit nach dem Schalten sind die neuen Werte von Netzspannung und Netzreaktanz einzusetzen. Aufgrund der Konstanz von U'_p ergibt sich eine sprunghafte Änderung der Ströme I_d und I_q ; deshalb entwickelt die Maschine ein anderes Drehmoment als vor dem Schalten. Da sich der Läufer aufgrund der Massenträgheit zunächst mit konstanter Drehzahl weiterbewegt, ergibt sich eine Drehmomentendifferenz, die zu einer Bewegung $\vartheta(t)$ des Polrades führt.
- **Mechanischer Laststoß:** Bei einer sprunghaften Änderung des Antriebsmomentes ändern sich Netzspannung und Netzreaktanz nicht. Direkt nach der Störung fließen dann auch die gleichen Ströme wie vorher, wodurch auch das von der Synchronmaschine entwickelte Drehmoment konstant ist. Aufgrund der Änderung des Antriebsmomentes ergibt sich aber eine Drehmomentendifferenz, die zu einer Bewegung $\vartheta(t)$ des Polrades führt. Dadurch ändern sich dann auch nachfolgend die Ströme und das Drehmoment der Synchronmaschine.

6 Dynamisches Verhalten der permanentmagneterregten Synchronmaschine mit Polradlagegeber

6.1 Prinzipielle Wirkungsweise

Wie bereits in der Vorlesung „Elektrische Maschinen und Antriebe“ beschrieben, ist die prinzipielle Wirkungsweise der permanentmagneterregten Synchronmaschine mit Polradlagegeber wie folgt:

Die Synchronmaschine wird mit Permanentmagneten zur Erzeugung des Erregerfeldes ausgestattet, jetzt aber ohne Anlauf- oder Dämpferkäfig. Der Stator besitzt eine Drehstromwicklung und wird von einem Wechselrichter gespeist, der ein Drehstromsystem zur Verfügung stellt (meistens in Form von block- oder sinusförmigen Strömen). Die Grundfrequenz dieses Drehstromsystems bestimmt die Frequenz der Drehdurchflutung und damit die Rotordrehzahl. Die Drehdurchflutung bildet zusammen mit dem Feld des permanentmagneterregten Rotors ein zeitlich möglichst konstantes Drehmoment. Die Weiterschaltung des Statorfeldes erfolgt nun mit Hilfe des Wechselrichters rotorstellungsabhängig (polradlageabhängig) so, dass sich zwischen Statorfeld durchflutung und Rotorfeld ein konstanter Winkel von $\pi/2$ elektrisch einstellt (es wird noch gezeigt, dass dies dann $\vartheta = -\varphi$ bedeutet). Die Polradlage kann hierbei entweder über Sensoren (Polradlagegeber) gemessen oder aus den Klemmenspannungen und/oder -strömen abgeleitet werden.

Es ergibt sich eine Betriebsweise, die nicht mehr der Synchronmaschine, sondern genau der Gleichstrommaschine entspricht:

- Gleichstrommaschine: Ankerdurchflutung und Erregerfeld bilden einen Winkel von $\pi/2$ elektrisch; diese Einstellung geschieht mechanisch mit Hilfe des Kommutators.
- Synchronmaschine: Der Polradwinkel ϑ und der Phasenwinkel φ stellen sich betriebspunktabhängig ein; es wird nicht aktiv die Phasenlage von Rotordurchflutung zu Erregerfeld beeinflusst.
- Elektronisch kommutierte Gleichstrommaschine: Statordurchflutung und Rotorfeld bilden einen Winkel von $\pi/2$ elektrisch; diese Einstellung geschieht elektronisch mit Hilfe des speisenden Wechselrichters (dies gilt, solange kein Feldschwächbetrieb eingestellt wird; zum Feldschwächbetrieb siehe Abschnitt 6.3.3).

Die Maschine in der beschriebenen Betriebsweise kann nicht mehr kippen und verhält sich wie eine Gleichstrommaschine. Daher kommen auch die Namen:

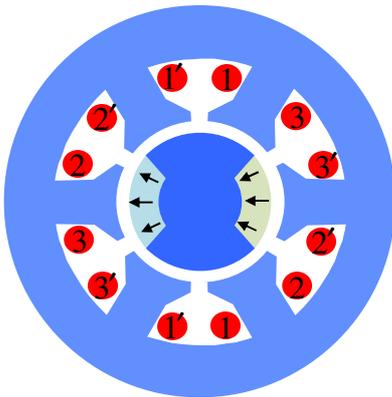
- Elektronisch kommutierter Gleichstrommotor (electronically commutated DC-motor, EC-motor)
- Bürstenloser Gleichstrommotor (brushless DC-motor, BLDC-motor).

Bürstenlose Gleichstrommaschinen haben eine sehr gute Dynamik und können einfach geregelt werden. Die bürstenlose Technik ist verschleiß- und wartungsfrei. Diese Art Motoren werden häufig in Werkzeugmaschinen und als Roboterantriebe eingesetzt.

Um ein gutes Motorbetriebsverhalten zu erzielen (i.a. möchte man ein möglichst konstantes Drehmoment erzeugen), müssen das Permanentmagneterregerfeld, die Statorwicklung und die Motorspeisung sorgfältig aufeinander abgestimmt werden.

6.2 Gleichungssystem für den dynamischen Betrieb

Im folgenden Bild ist eine zweipolige Maschine dargestellt, wobei der „Polbedeckungsfaktor“ $\alpha_i < 1$ ist. Außerdem soll eine magnetische Unsymmetrie mit $X_d \neq X_q$ bestehen. Diese wird dadurch hervorgerufen, dass der geometrische Luftspalt am Umfang konstant ist, der magnetisch wirksame Luftspalt aber nicht konstant ist (Magnetmaterial hat näherungsweise eine relative Permeabilität von $\mu_{r,PM} \approx 1$, Eisen dagegen eine sehr große relative Permeabilität von $\mu_{r,Fe} \gg 1$). Der Fall, dass die Magnete auf der Oberfläche eines zylinderförmigen Eisen-Rotors aufgebracht werden, ist mit $X_d = X_q = X$ als Sonderfall in der folgenden Betrachtung enthalten.



Es war vorausgesetzt worden, dass keine Dämpferwicklung vorhanden sein soll. Dies bedeutet dann auch, dass der Rotor aus geblechtem Eisen bestehen muss (massives Eisen ist leitfähig und stellt auch einen Dämpferkäfig dar), und dass Seltenerd-magnete (SmCo oder NdFeB) unterteilt werden müssen, weil auch diese leitfähig sind (dies gilt nicht für die preiswerteren Ferrit-Magnete).

Bei einer solchen permanentmagneterregten Synchronmaschine ist also nur ein System aus drei Wicklungen zu berücksichtigen (da das Koordinatensystem läuferflussorientiert ist, werden dessen Achsen mit „d“ und „q“ bezeichnet):

- I, d: Ständerlängsachse (Blindstrom, flussbildend)
- I, q: Ständerquerachse (Wirkstrom, drehmomentbildend)
- II, d: Läuferlängsachse (Permanentmagnete)
- II, q: Läuferquerachse (ohne Wicklung)

Da die Permanentmagnete in der Längsachse (d-Achse) magnetisieren, d.h. in der d-Achse also der größere Eisen-Eisen-Abstand vorherrscht, gilt: $X_d < X_q$.

Die elektrische Winkelgeschwindigkeit des Rotors ist:

$$\omega = \frac{d\gamma}{dt} = 2\pi n$$

Es wird nun folgendes Koordinatensystem gewählt

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\gamma}{dt} \quad \text{und} \quad \alpha(t) = \omega t$$

Wie bereits in der Vorlesung „Elektrische Maschinen und Antriebe“ wird das Verbraucherzählpfeilsystem (VZS) gewählt, da dieser Maschinentyp hauptsächlich als Motor eingesetzt wird.

Mit Hilfe der Raumzeigertheorie für Drehfeldmaschinen erhält man folgendes Gleichungssystem (für die Permanentmagnete existiert keine Spannungsgleichung; der von den Magneten erzeugte konstante Rotorfluss wird durch einen konstanten Ersatzerregerstrom $i_{II,d,0}$ in der Gleichung für die Statorflussverkettung berücksichtigt):

$$u_{I,d} = R_1 i_{I,d} + \frac{d\Psi_{I,d}}{dt} - \omega \Psi_{I,q}$$

$$u_{I,q} = R_1 i_{I,q} + \frac{d\Psi_{I,q}}{dt} + \omega \Psi_{I,d}$$

$$\Psi_{I,d} = (1 + \sigma_1) L_{hd} i_{I,d} + L_{hd} i_{II,d,0}$$

$$\Psi_{I,q} = (1 + \sigma_1) L_{hq} i_{I,q}$$

$$T = \frac{3}{2} p (i_{I,q} \Psi_{I,d} - i_{I,d} \Psi_{I,q}) = T_g + \frac{\Theta}{p} \frac{d\omega}{dt}$$

Im Leerlauf gilt bei Betrieb mit Nennspannung und Nennfrequenz:

$$i_{I,d} = i_{I,q} = 0$$

Damit folgt für die Flussverkettungen

$$\Psi_{I,d} = L_{hd} i_{II,d,0}$$

$$\Psi_{I,q} = 0$$

und für die Spannungen

$$u_{I,d} = 0$$

$$u_{I,q} = \omega \Psi_{I,d} = \omega L_{hd} i_{II,d,0}$$

Mit

$$U_{I,N} = \frac{u_{I,q}}{\sqrt{2}}$$

folgt für den Ersatzerregerstrom

$$u_{I,q} = \sqrt{2} U_{I,N} = \omega L_{hd} i_{II,d,0}$$

$$\Rightarrow i_{II,d,0} = \frac{\sqrt{2} U_{I,N}}{\omega L_{hd}}$$

Mit der Ersatzpolradspannung

$$u_p = \omega L_{hd} i_{II,d,0}$$

folgt dann

$$u_p = \sqrt{2} U_{1,N}$$

Nun werden die Flussverkettungsgleichungen in die Spannungsgleichungen und die Drehmomentengleichung eingesetzt; man erhält:

$$u_{1,d} = R_1 i_{1,d} + \frac{d}{dt} \left[(1 + \sigma_1) L_{hd} i_{1,d} + L_{hd} i_{II,d,0} \right] - \omega (1 + \sigma_1) L_{hq} i_{1,q}$$

$$u_{1,q} = R_1 i_{1,q} + \frac{d}{dt} \left[(1 + \sigma_1) L_{hq} i_{1,q} \right] + \omega \left[(1 + \sigma_1) L_{hd} i_{1,d} + L_{hd} i_{II,d,0} \right]$$

$$T = \frac{3}{2} p \left(i_{1,q} \left[(1 + \sigma_1) L_{hd} i_{1,d} + L_{hd} i_{II,d,0} \right] - i_{1,d} (1 + \sigma_1) L_{hq} i_{1,q} \right) = T_g + \frac{\Theta}{p} \frac{d\omega}{dt}$$

und weiter

$$u_{1,d} = R_1 i_{1,d} + (1 + \sigma_1) L_{hd} \frac{d}{dt} i_{1,d} - \omega (1 + \sigma_1) L_{hq} i_{1,q}$$

$$u_{1,q} = R_1 i_{1,q} + (1 + \sigma_1) L_{hq} \frac{d}{dt} i_{1,q} + \omega \left[(1 + \sigma_1) L_{hd} i_{1,d} + L_{hd} i_{II,d,0} \right]$$

$$T = \frac{3}{2} p \cdot i_{1,q} \left[\left((1 + \sigma_1) L_{hd} - (1 + \sigma_1) L_{hq} \right) i_{1,d} + L_{hd} i_{II,d,0} \right] = T_g + \frac{\Theta}{p} \frac{d\omega}{dt}$$

Mit

$$L_d = (1 + \sigma_1) L_{hd} \quad \text{und} \quad L_q = (1 + \sigma_1) L_{hq}$$

folgt dann

$$u_{1,d} = R_1 i_{1,d} + L_d \frac{d}{dt} i_{1,d} - \omega L_q i_{1,q}$$

$$u_{1,q} = R_1 i_{1,q} + L_q \frac{d}{dt} i_{1,q} + \omega \left[L_d i_{1,d} + L_{hd} i_{II,d,0} \right]$$

$$T = \frac{3}{2} p \cdot i_{1,q} \left[L_{hd} i_{II,d,0} - (L_q - L_d) i_{1,d} \right] = T_g + \frac{\Theta}{p} \frac{d\omega}{dt}$$

Führt man nun noch die Zeitkonstanten

$$\tau_d = \frac{L_d}{R_1} \quad \text{und} \quad \tau_q = \frac{L_q}{R_1}$$

ein, so erhält man folgendes Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned}\tau_d \frac{d}{dt} i_{1,d} + i_{1,d} &= \frac{u_{1,d}}{R_1} + \omega \tau_q i_{1,q} \\ \tau_q \frac{d}{dt} i_{1,q} + i_{1,q} &= \frac{u_{1,q}}{R_1} - \omega \tau_d \left[i_{1,d} + \frac{i_{\Pi,d,0}}{1 + \sigma_1} \right] \\ \frac{\Theta}{p} \frac{d\omega}{dt} &= \frac{3}{2} p L_d \left[\frac{i_{\Pi,d,0}}{1 + \sigma_1} - \left(\frac{L_q}{L_d} - 1 \right) i_{1,d} \right] i_{1,q} - T_g\end{aligned}$$

wobei für Rotorposition und Drehzahl gilt:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} = \omega = 2\pi p n$$

Mit diesem Differentialgleichungssystem wird der permanentmagneterregte Synchronmotor mit Polradlagegeber vollständig beschrieben.

Die Maschine wird normalerweise so betrieben, dass Ankerdurchflutung und Erregerfeld ($L_{hd} i_{\Pi,d,0}$) senkrecht aufeinander stehen. Dann muss aber der Ständerlängsstrom gleich null sein ($i_{1,d} = 0$); die Querkomponente $i_{1,q}$ ist die drehmomentbildende Komponente. Die Spannungen in Längs- und Querachse ergeben sich aus den obigen Gleichungen.

Wird dagegen ein Steuerverfahren mit $i_{1,d} = i_{1,d,\infty} \neq 0$ genutzt (z.B. mit $i_{1,d} < 0$ zur Feldschwächung), so stehen Ankerdurchflutung und Erregerfeld nicht mehr senkrecht aufeinander (dieser Betrieb wird im folgenden Kapitel 6.3 näher beschrieben). Für die Spannungsgleichung der Ständerlängsachse ergibt sich dann im eingeschwungenen Zustand (d.h. keine zeitliche Änderung der Ströme mehr):

$$i_{1,d,\infty} = \frac{u_{1,d}}{R_1} + \omega \tau_q i_{1,q}$$

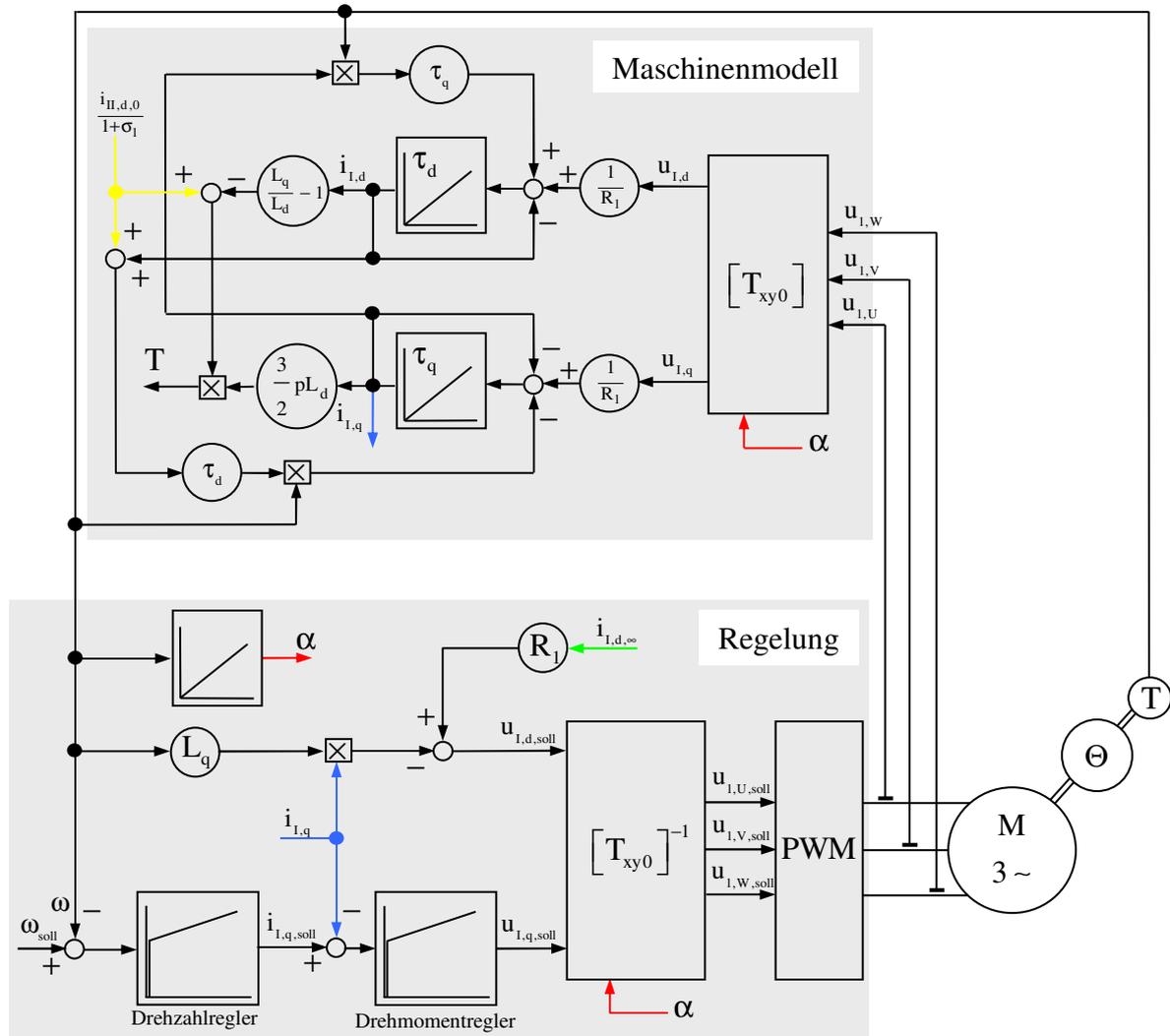
Für den dynamischen Übergangsvorgang gilt dann:

$$\tau_d \frac{d}{dt} i_{1,d} + i_{1,d} = i_{1,d,\infty}$$

Die Lösung dieses Differentialgleichungssystems ist bekannt; der Stromverlauf ist:

$$i_{1,d} = i_{1,d,\infty} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_d}} \right)$$

Das aus den hergeleiteten Gleichungen ableitbare Strukturbild der permanentmagneterregten Synchronmaschine mit Polradlagegeber ist wie folgt:



6.3 Stationärer Betrieb und Drehmomentregelung

1. Allgemeines

Im stationären Betrieb treten keine zeitlichen Änderungen von Strömen und Drehzahl auf. Das Gleichungssystem vereinfacht sich dann zu:

$$\begin{aligned} u_{1,d} &= R_1 i_{1,d} - \omega L_q i_{1,q} \\ u_{1,q} &= R_1 i_{1,q} + \omega [L_d i_{1,d} + L_{hd} i_{II,d,0}] \\ T &= \frac{3}{2} p \cdot i_{1,q} [L_{hd} i_{II,d,0} - (L_q - L_d) i_{1,d}] \end{aligned}$$

Mit $u_p = \omega L_{hd} i_{II,d,0}$ folgt dann weiter (die Berechnung des Drehmomentes aus Strombelag und Flussdichte ist im Anhang 9.2 angegeben):

$$\begin{aligned} u_{1,d} &= R_1 i_{1,d} - \omega L_q i_{1,q} \\ u_{1,q} &= R_1 i_{1,q} + \omega L_d i_{1,d} + u_p \\ T &= \frac{3}{2} \frac{p}{\omega} \cdot i_{1,q} [u_p - (\omega L_q - \omega L_d) i_{1,d}] \end{aligned}$$

Die Rücktransformation kann nun durchgeführt werden, indem (analog zum Vorgehen beim Synchrongenerator) aus den Gleichgrößen $u_{1,d}$, $u_{1,q}$, $i_{1,d}$, $i_{1,q}$ und u_p die komplexen Effektivwertzeiger \underline{U}_d , \underline{U}_q , \underline{I}_d , \underline{I}_q und \underline{U}_p definiert werden. Es gilt für

- die Querachse (reelle Achse)

$$\frac{u_p}{\sqrt{2}} = U_p e^{j0^\circ} = \underline{U}_p$$

$$\frac{u_{1,q}}{\sqrt{2}} = U_q e^{j0^\circ} = \underline{U}_q$$

$$\frac{i_{1,q}}{\sqrt{2}} = I_q e^{j0^\circ} = \underline{I}_q$$

- die Längsachse (negativ imaginäre Achse)

$$\frac{u_{1,d}}{\sqrt{2}} = U_d e^{-j\frac{\pi}{2}} = \underline{U}_d$$

$$\frac{i_{1,d}}{\sqrt{2}} = I_d e^{-j\frac{\pi}{2}} = \underline{I}_d$$

Mit den Reaktanzen $X_d = \omega L_d$ und $X_q = \omega L_q$ erhält man dann das Gleichungssystem:

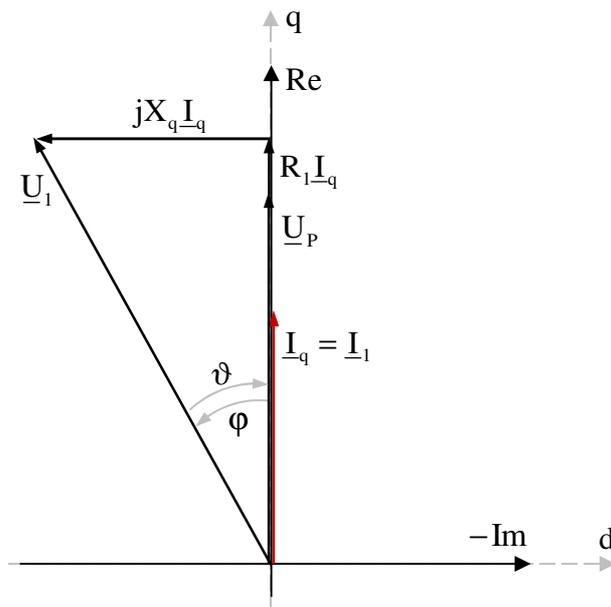
$$\begin{aligned} \underline{U}_d &= R_1 \underline{I}_d + jX_q \underline{I}_q \\ \underline{U}_q &= R_1 \underline{I}_q + jX_d \underline{I}_d + \underline{U}_p \\ T &= \frac{3p}{\omega} \cdot I_q [U_p - (X_q - X_d) I_d] \end{aligned}$$

Mit $\underline{U}_1 = \underline{U}_d + \underline{U}_q$ und $\underline{I}_1 = \underline{I}_d + \underline{I}_q$ folgt dann auch:

$$\underline{U}_1 = R_1 \underline{I}_1 + jX_d \underline{I}_d + jX_q \underline{I}_q + \underline{U}_p$$

2. Normalbetrieb

Im Normalbetrieb beträgt der Winkel zwischen Ständerdurchflutung und Läuferfeld 90° elektrisch. Das Läuferfeld wird in der Längsachse (negativ imaginäre Achse) aufgetragen, siehe Kapitel 6.2; die Ständerdurchflutung besteht nur aus dem Strom $I_1 = I_q = I_N$ (Querachse, reelle Achse), der Strom in der Längsachse ist $I_d = 0$. Dann gilt für den Lastwinkel: $\delta = \vartheta + \varphi = 0$.



Die dargestellte Betriebsweise wird üblicherweise bei einem Leistungsfaktor von etwa $\cos \varphi \approx 0.8$ und ohne magnetische Unsymmetrie ($X_d = X_q = X$) erreicht. Das Gleichungssystem wird dann zu

$$\underline{U}_d = R_1 \underline{I}_d + jX \underline{I}_q$$

$$\underline{U}_q = R_1 \underline{I}_q + jX \underline{I}_d + \underline{U}_p$$

$$T = \frac{3p}{\omega} \cdot I_q \cdot U_p$$

Die komplexe Spannungsgleichung wird:

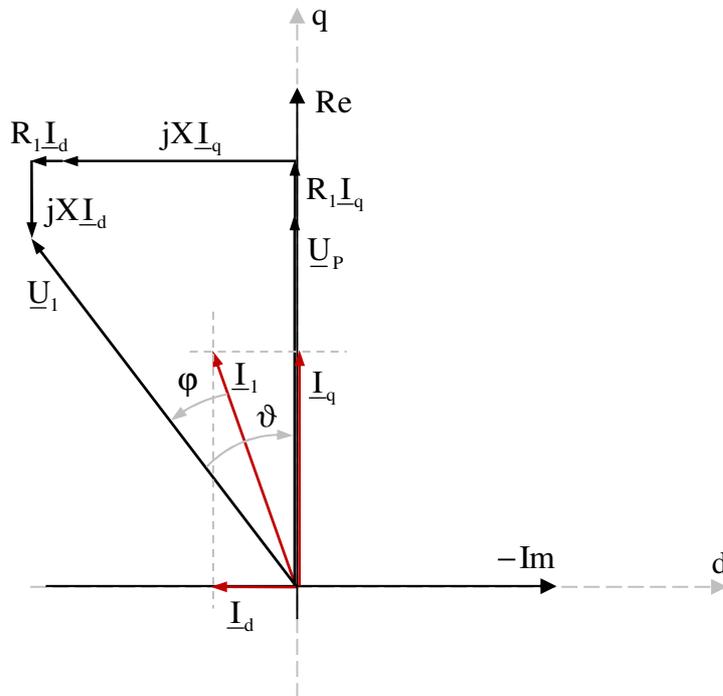
$$\underline{U}_1 = (R_1 + jX) \underline{I}_1 + \underline{U}_p$$

3. Betrieb mit Vorsteuerung ohne magnetische Unsymmetrie

Beim Betrieb mit Vorsteuerung ohne magnetische Unsymmetrie gilt also weiterhin $X_d = X_q = X$. Es wird nun aber zusätzlich zum drehmomentbildenden Strom I_q (Querachse)

eine negative Längsstromkomponente $I_d < 0$ eingespeist. Da diese zusätzliche negative Längsstromkomponente dem Läuferfeld (in der negativ imaginären Achse) entgegengesetzt ist, wirkt sie entmagnetisierend (man spricht dann auch von „Feldschwächung“). I_q muss nun abgesenkt werden, damit der Gesamtstrom I_1 den Nennwert nicht überschreitet (Erwärmung!). Es gilt also:

$$I_d < 0, \quad I_q < I_N \quad \text{und} \quad I_1 = I_N.$$



Durch die zusätzliche negative Längsstromkomponente I_d vergrößert sich der Winkel zwischen der Ständerdurchflutung (I_1) und dem Läuferfeld (in der negativ imaginären Achse) auf mehr als 90° elektrisch. Hierdurch wird der Winkel φ zwischen Spannung und Strom kleiner, d.h. der Leistungsfaktor ändert sich in Richtung $\cos \varphi \rightarrow 1$. Außerdem wird für $I_d \neq 0$ auch der Lastwinkel $\delta \neq 0$.

Vernachlässigt man die Ohmschen Anteile in den Spannungsgleichungen, so hat die negative Längsstromkomponente I_d folgende Auswirkungen:

- Der Strom I_q wird kleiner, da der Gesamtstrom begrenzt ist.
- Die Spannung $\underline{U}_d = jX I_q$ wird dann ebenfalls geringer.
- Dann kann die Spannung $\underline{U}_q = jX I_d + \underline{U}_p$ wegen $U = \sqrt{U_d^2 + U_q^2}$ ansteigen. Da außerdem $jX I_d$ und \underline{U}_p entgegengesetzt gerichtet sind, steigt die Spannung \underline{U}_p an. Da die Magnetisierung konstant ist, kann dies nur durch eine Erhöhung der Drehzahl erfolgen.

- An der Drehmomentgleichung $T = \frac{3p}{\omega} \cdot I_q \cdot U_p$ erkennt man das Absinken des Drehmomentes: $\frac{U_p}{\omega}$ beschreibt die Magnetisierung und ist konstant; der geringere Strom I_q führt zu einem geringeren Drehmoment.

Es ergibt sich also ein typischer Feldschwächbetrieb (geringeres Drehmoment bei größerer Drehzahl; vgl. z.B. mit dem Feldschwächbetrieb der Asynchronmaschine).

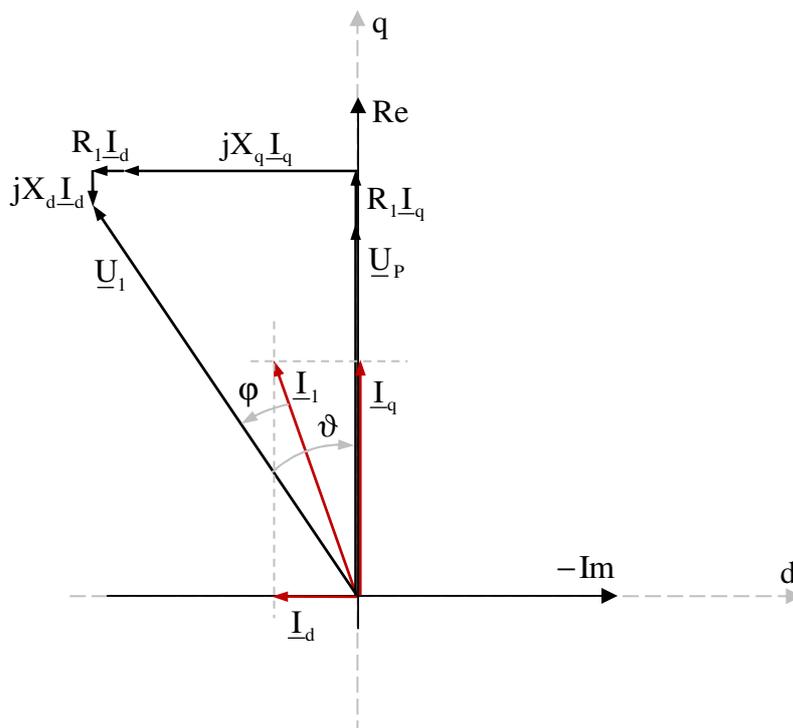
Möchte man nun dieses Absinken des Drehmomentes vermeiden, so muss zur Abhilfe eine zusätzliche Drehmomentkomponente generiert werden, die diesen Effekt ausgleicht. Dies wird durch ein zusätzliches Reluktanzmoment erreicht, indem eine magnetische Unsymmetrie eingeführt wird.

4. Betrieb mit Vorsteuerung mit magnetischer Unsymmetrie

Beim Betrieb mit Vorsteuerung mit magnetischer Unsymmetrie ist nun $X_d < X_q$. Wie im vorhergehenden Abschnitt gilt:

- Es wird zusätzlich zum drehmomentbildenden Strom I_q (Querachse) eine negative Längsstromkomponente $I_d < 0$ eingespeist; für den Lastwinkel gilt dann $\delta \neq 0$.
- Diese negative Längsstromkomponente wirkt entmagnetisierend.
- I_q muss abgesenkt werden, damit der Gesamtstrom I_1 den Nennwert nicht überschreitet (Erwärmung!).
- Es gilt also: $I_d < 0$, $I_q < I_N$ und $I_1 = I_N$.

Das Zeigerbild wird dann zu:



Für das Drehmoment gilt nun:

$$T = \frac{3p}{\omega} \cdot I_q \left[U_p - (X_q - X_d) I_d \right]$$

Bei konstanter Drehzahl lässt sich nun über das positive Reluktanzmoment $-\frac{3p}{\omega} (X_q - X_d) I_d I_q$ wieder das ursprüngliche Drehmoment erzielen. Je nach Auslegung des elektromagnetischen Kreises lässt sich das Drehmoment sogar steigern. Dies kann auf zweierlei Arten genutzt werden:

- Drehzahlerhöhung (selten)
- Stromreduktion (häufig)

Durch eine sorgfältige elektromagnetische Auslegung der Maschine kann also der Strom reduziert werden bei gleichzeitiger Verbesserung des Leistungsfaktors $\cos\phi$. Dies führt sowohl zu geringeren Verlusten in Maschine und Umrichter (aufgrund des geringeren Stromniveaus), als auch zu einer geringeren Umrichter-Scheinleistung (aufgrund des verbesserten Leistungsfaktors).

5. Grenzkennlinien

Aus den beiden Statorspannungsgleichungen

$$\underline{U}_d = R_1 \underline{I}_d + jX_q \underline{I}_q$$

$$\underline{U}_q = R_1 \underline{I}_q + jX_d \underline{I}_d + \underline{U}_p$$

folgt unter Vernachlässigung des Ohmschen Statorwiderstandes ($R_1 = 0$) und mit $\underline{U}_p = \omega \underline{\Psi}_p$

$$\underline{U}_d = j\omega L_q \underline{I}_q$$

$$\underline{U}_q = j\omega L_d \underline{I}_d + \omega \underline{\Psi}_p$$

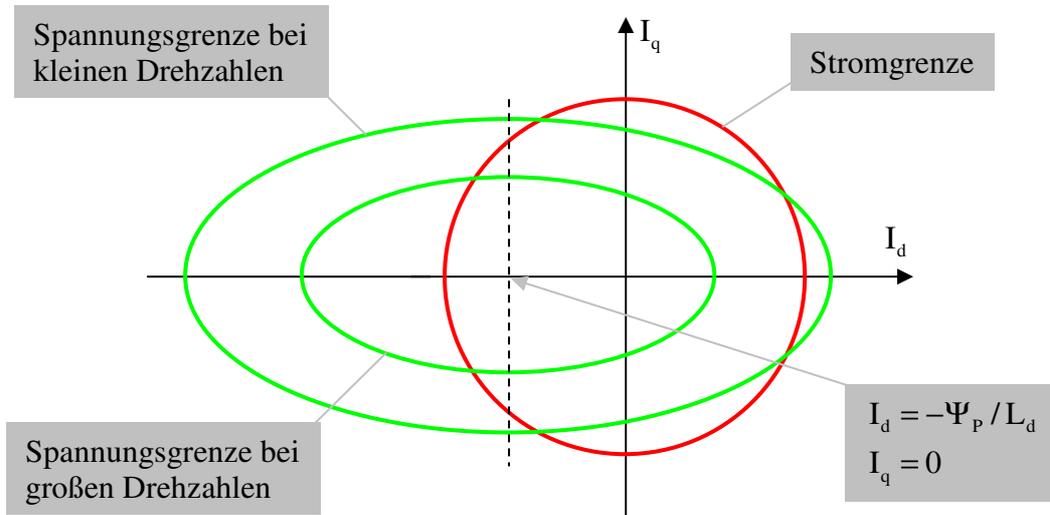
Nun sollen die Strom- und Spannungsgrenze in Abhängigkeit der beiden senkrecht aufeinander stehenden Stromkomponenten \underline{I}_d und \underline{I}_q berechnet werden. Es ergibt sich für die Stromgrenze eine Kreisgleichung

$$I_{\max}^2 \geq I^2 = I_d^2 + I_q^2$$

und für die Spannungsgrenze eine Ellipsengleichung

$$\begin{aligned} U_{\max}^2 &\geq U^2 = U_d^2 + U_q^2 \\ &= (\omega L_q I_q)^2 + (\omega L_d I_d + \omega \Psi_p)^2 \\ &= \omega^2 \left[(L_q I_q)^2 + (L_d I_d + \Psi_p)^2 \right] \\ \Rightarrow \frac{U_{\max}^2}{\omega^2} &\geq (L_q I_q)^2 + (L_d I_d + \Psi_p)^2 \end{aligned}$$

Die folgende Grafik zeigt diese Grenzen in der $I_d - I_q$ -Ebene.



Die Eigenschaften dieser Betriebsgrenzen sind:

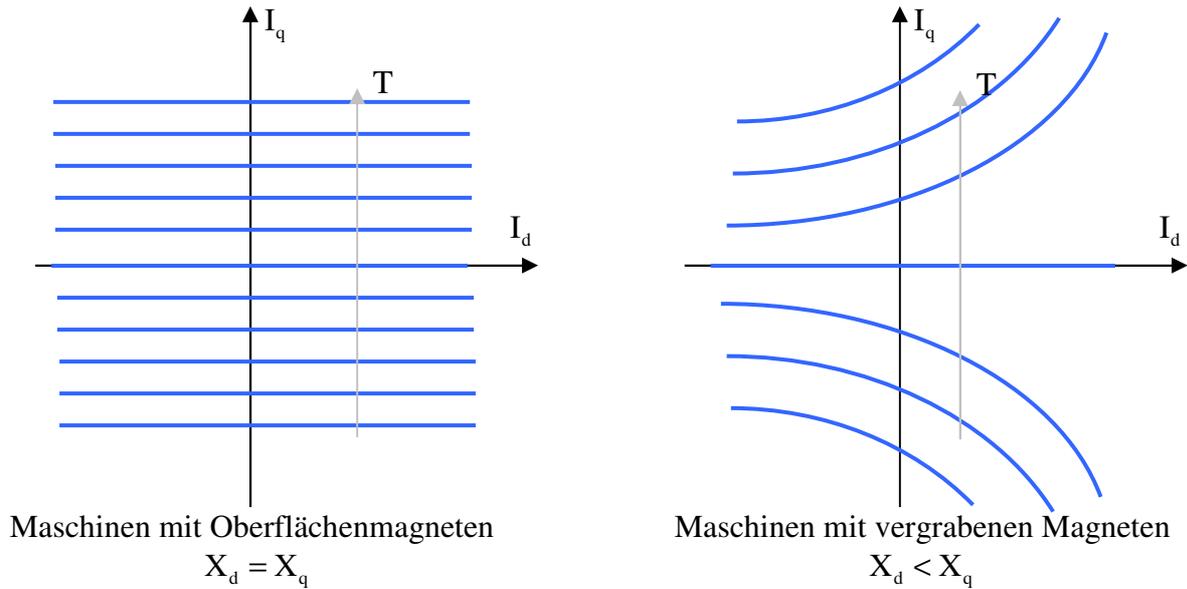
- Die Spannungsgrenze wird zu aus dem Ursprung nach links verschobenen Kreisen (statt Ellipsen), falls Oberflächenmagnete ($X_d = X_q$) benutzt werden.
- Die Spannungsgrenze ist drehzahlabhängig: mit zunehmender Drehzahl wird der mögliche Betriebsbereich immer weiter eingeschränkt.
- Die Stromgrenze ist unabhängig von Maschinenart und Drehzahl.

6. Drehmomentregelung

Die Drehmomentgleichung kann wie folgt umgeformt werden:

$$\begin{aligned} T &= \frac{3p}{\omega} \cdot I_q \left[U_p - (X_q - X_d) I_d \right] \\ &= \frac{3p}{\omega} \cdot I_q \left[\omega \Psi_p - (\omega L_q - \omega L_d) I_d \right] \\ &= 3p \cdot I_q \left[\Psi_p - (L_q - L_d) I_d \right] \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich die folgende Darstellung von Kurven gleichen Drehmomentes in der $I_d - I_q$ -Ebene:

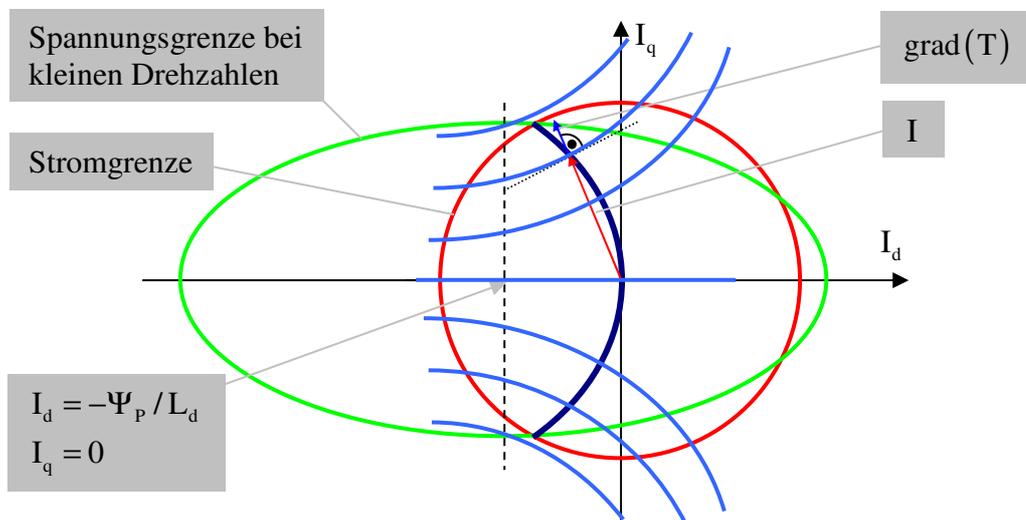


Diese Grafik macht deutlich, dass die Drehmomentregelung bei Maschinen mit Oberflächenmagneten deutlich einfacher zu realisieren ist (hier existiert ein linearer Zusammenhang zwischen I_q und dem Drehmoment), als bei Maschinen mit vergrabenen Magneten (I_d und I_q müssen gleichzeitig geregelt werden, außerdem ist der Zusammenhang nichtlinear).

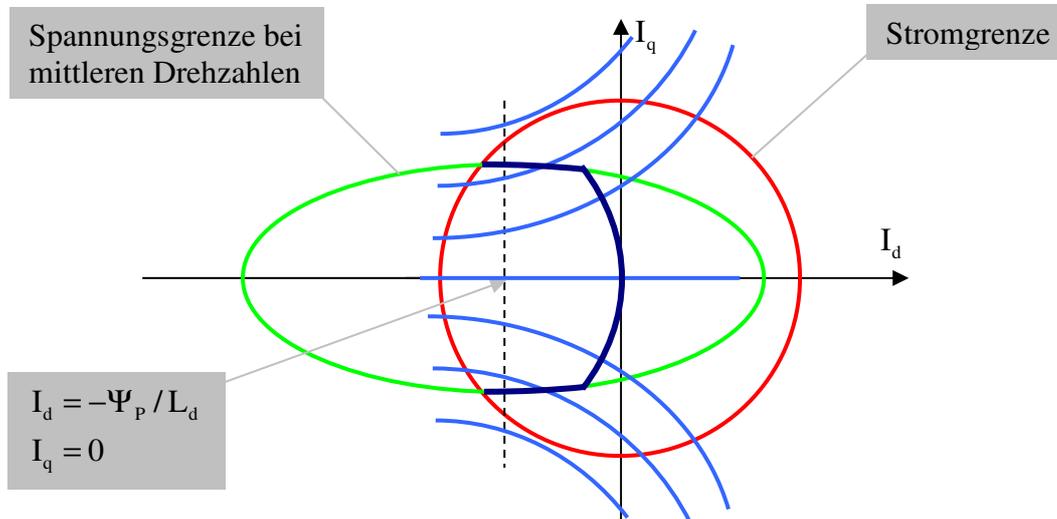
Nun soll die Frage beantwortet werden, wie die Stromkomponenten I_d und I_q gewählt werden müssen, damit das gewünschte Drehmoment bei minimalem Gesamtstrom (minimale Verluste, maximaler Wirkungsgrad) erreicht wird. Hierzu werden die folgenden drei Fälle unterschieden:

a) Kleine Drehzahl, d.h. Spannungsgrenze ist nicht relevant

Für ein bestimmtes Drehmoment ist der Gesamtstrom dann minimal, wenn der Stromvektor und der Vektor $\text{grad}(T)$ in die gleiche Richtung zeigen. Dies ist in dem folgenden Bild auf der dunkelblauen Linie gegeben. Diese Linie stellt also die optimalen Betriebspunkte der Maschine dar.

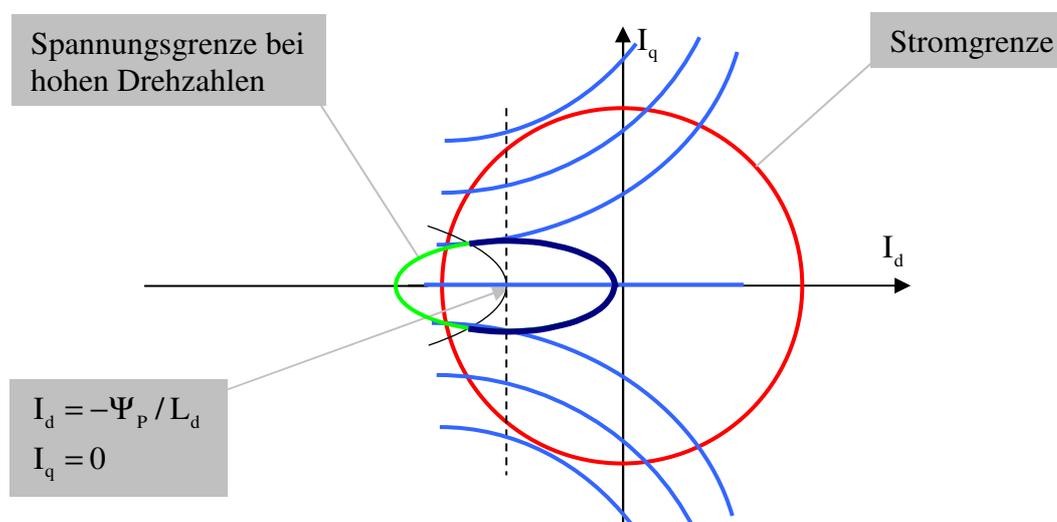


- b) Mittlere Drehzahl (geringe Feldschwächung); d.h. Spannungsgrenze wird relevant
 Aufgrund der Spannungsbegrenzung ist das maximale Drehmoment geringer als im Fall a); außerdem läuft die optimale Kennlinie zur Erreichung des gewünschten Drehmomentes (dunkelblaue Linie) teilweise auf der Linie der Spannungsgrenze.



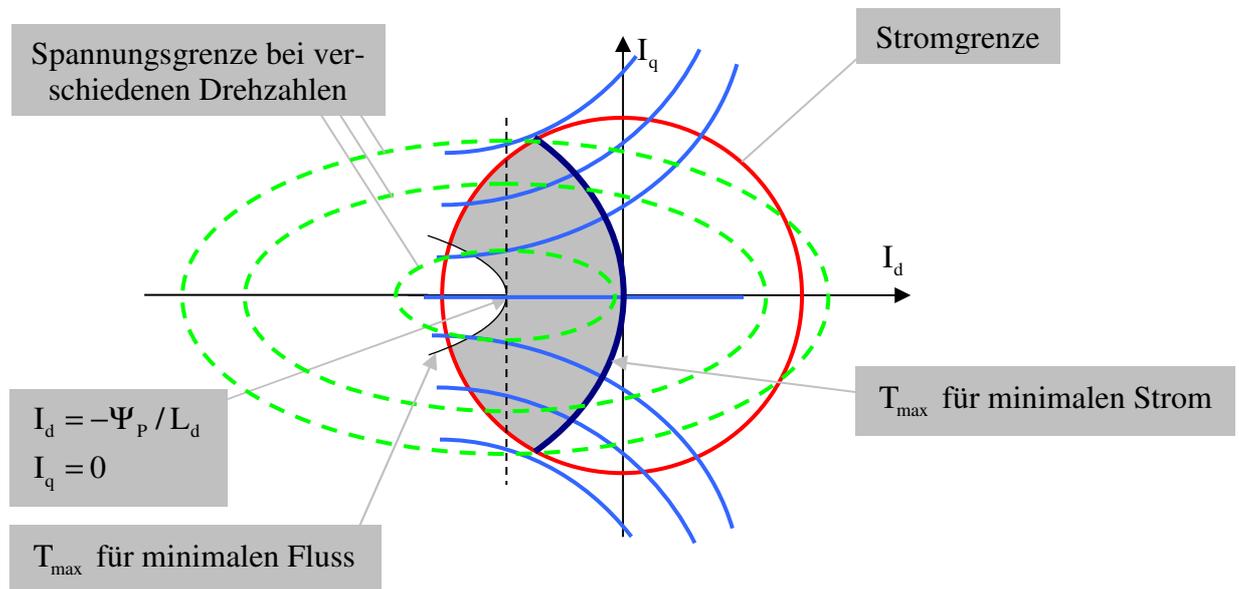
- c) Hohe Drehzahl (starke Feldschwächung); d.h. Stromgrenze wird irrelevant
 Bei starker Feldschwächung ist nur noch die Spannungsgrenze relevant; die Grenze des maximalen Gesamtstromes wird nicht mehr erreicht.

Die in dem nachfolgenden Bild zusätzlich eingezeichnete schwarze Kennlinie stellt die Begrenzung dar, ab der auf der Spannungsgrenze bei weiter steigendem Gesamtstrom das Drehmoment wieder absinkt. Mit anderen Worten stellt die schwarze Kennlinie die Betriebspunkte dar, bei denen das gewünschte Drehmoment mit minimalem Fluss erreicht wird (wie man auch an der Ellipsengleichung für die Spannungsgrenze erkennen kann, stellen die Ellipsen die Betriebspunkte konstanten Flusses dar). Da dieses kleinere Drehmoment aber auch mit kleinerem Strom erreicht werden kann, macht ein solcher Betrieb der Maschine keinen Sinn. Deshalb wird dieser Betriebsbereich ausgeschlossen.



d) Zusammenfassung

Der sinnvolle Betriebsbereich der Maschine ist im folgenden Bild grau unterlegt.



7 Elektromechanische Aktoren

7.1 Allgemeines

Die Begriffe „elektromechanischer Aktor“ bzw. „elektromechanische Aktorik“ sind in der Fachliteratur nicht eindeutig definiert; sie werden von unterschiedlichen Autoren in unterschiedlicher Art und Weise verwendet. In manchen Fällen wird jegliche Bewegung elektromechanischer Energiewandler so bezeichnet (dann fallen auch alle rotierenden elektrischen Maschinen unter diesen Begriff), manchmal werden nur Ausführungsformen mit einer (bauartbedingt) begrenzten Stellbewegung unter diesen Begriffen zusammengefasst.

Um eine eindeutige Unterscheidung zu den bisher behandelten elektrischen Maschinen auch in der Begriffswahl herzustellen, sollen im Folgenden nur elektromechanische Energiewandler mit einer bauartbedingt begrenzten Stellbewegung als elektromechanische Aktoren bezeichnet werden. Es wird also die weniger umfassende Definition gewählt, allerdings soll diese begrenzte Stellbewegung als geradlinige oder rotierende Bewegung möglich sein.

Der elektromechanische Aktor wird sehr häufig in eine gewünschte Applikation integriert, wodurch spezielle Ausführungsformen entstehen. Dies macht eine allgemeingültige Behandlung schwierig. Außerdem gibt es bei den elektromechanischen Aktoren noch eine große Variationsbreite an verschiedenen Wirkprinzipien, z.B.:

- Elektromagnetische Aktoren
- Elektrochemische Aktoren
- Elektrorheologische Aktoren
- Piezoelektrische Aktoren
- Magnetostriktive Aktoren

Wesentliche Anwendungsfelder der elektromechanischen Aktoren (in der Definition mit bauartbedingt begrenzter Stellbewegung) sind

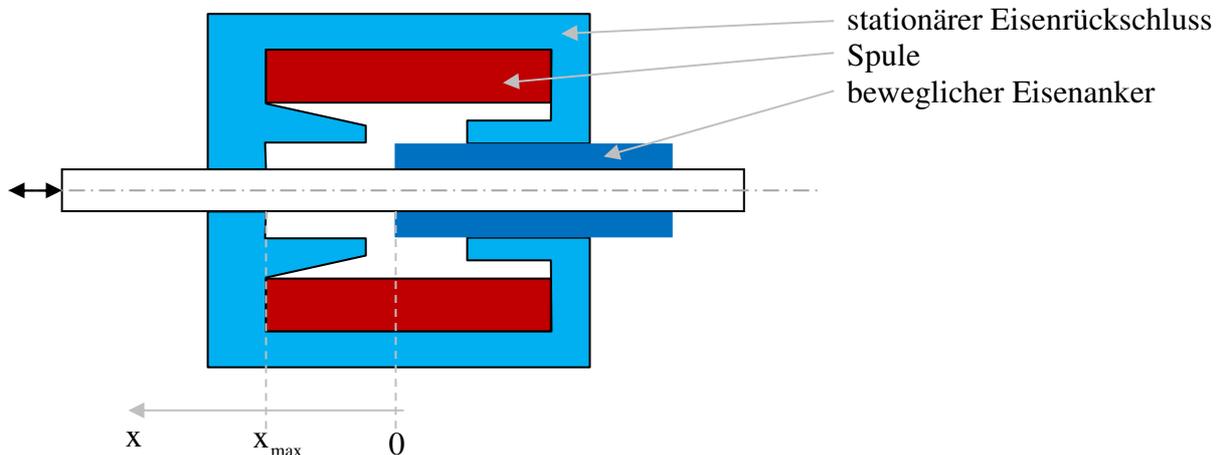
- Ventile
- Verriegelungen
- Greifer
- Pumpen (z.B. Membranpumpen)
- Koordinatentische
- Uhrwerke
- Schreib-Leseköpfe von Festplatten bzw. CD- und DVD-Geräten

Wegen dieser Vielzahl an Ausführungsformen, Wirkprinzipien und Anwendungsfeldern soll das Thema elektromechanischer Aktor im Folgenden an Hand von Beispielen elektromagnetischer Aktoren erläutert werden, und zwar jeweils zwei Aktoren mit geradliniger Bewegung und mit rotierender Bewegung.

7.2 Aktor mit geradliniger Bewegung

1. Aktor mit geradliniger Bewegung und beweglichem Eisenanker

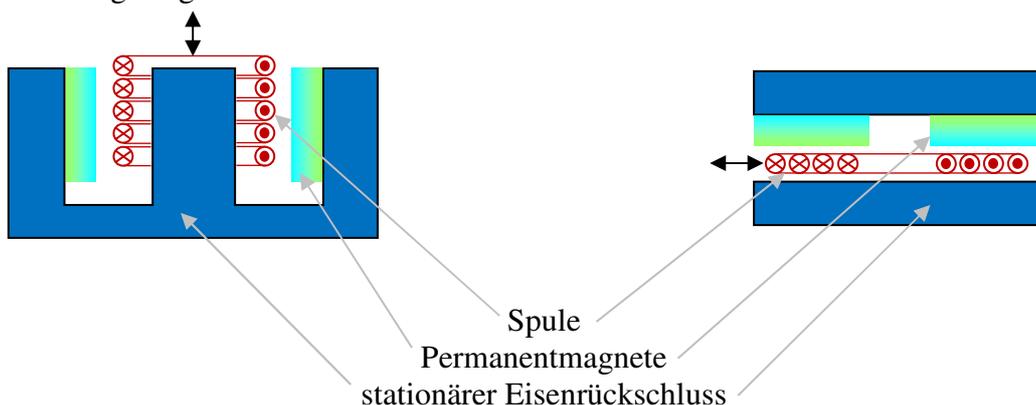
Der am weitesten verbreitete Aktor mit geradliniger Bewegung (z.B. für Ventilsteuerungen) ist der so genannte Solenoid-Aktor. Der Name dieses Aktors leitet sich aus der zylinder-förmigen Spule ab. Die Grundform eines solchen Aktors ist im folgenden Bild dargestellt.



Die technische Realisierung basiert meistens auf einer Gleitlagerung zwischen feststehendem und beweglichem Teil. Die Kraftwirkung dieses Aktors beruht auf dem Prinzip, dass sich bei Bestromung der Spule der Eisenanker so bewegt, dass im magnetischen Kreis ein minimaler magnetischer Widerstand wirksam wird. Insofern könnte man diesen Aktor auch als Reluktanz-Aktor bezeichnen. Die Kraftwirkung kann sich nur in positiver x-Richtung entfalten (unabhängig von der Stromrichtung); die Rückstellkraft wird i.a. durch eine mechanische Feder realisiert, die in der obigen Figur nicht eingezeichnet ist.

2. Aktor mit geradliniger Bewegung und beweglicher Spule

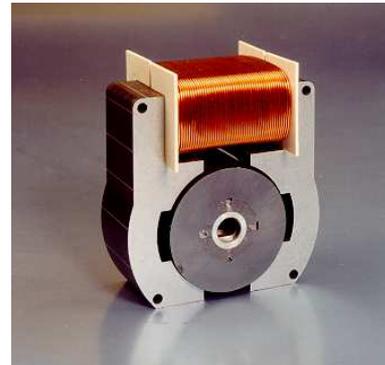
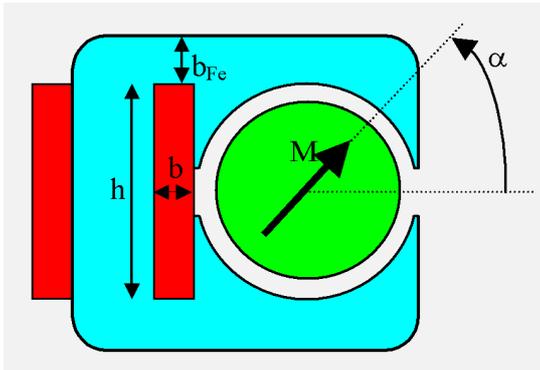
Ein ebenfalls weit verbreitetes Prinzip zur Realisierung geradliniger Bewegungen ist der Tauchspul-Aktor (englisch: „voice-coil actuator“). Hierbei handelt es sich um eine Spule, die in das Magnetfeld eines Permanentmagneten „eintaucht“, und über die Kraftwirkung auf stromdurchflossene Leiter die Bewegung erzeugt. Wesentliche Unterschiede zum oben gezeigten Aktor bestehen darin, dass beim Tauchspul-Aktor die Kraft- und Bewegungsrichtung mit Hilfe der Stromrichtung eingestellt werden kann und dass aufgrund der geringen bewegten Masse eine sehr gute Dynamik erreicht werden kann. Zwei mögliche Anordnungen sind im folgenden Bild gezeigt.



7.3 Aktor mit rotierender Bewegung

1. Aktor mit rotierender Bewegung und beweglichem Permanentmagneten

Der Aktor mit begrenzter rotierender Bewegung ist vor allem als Stellglied für Drosselklappen geeignet. Das Prinzipbild und ein Foto einer beispielhaften Ausführung sind in der folgenden Figur gezeigt, wobei ein zylinderförmiger Permanentmagnet mit diametraler Magnetisierung zum Einsatz kommt:



Bei vernachlässigbarer Sättigung kann das Drehmoment wie folgt berechnet werden

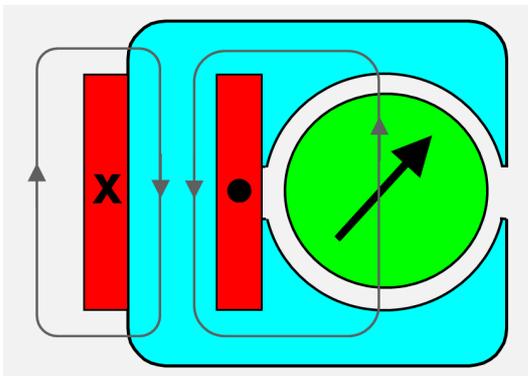
$$T(\alpha) = NI \left. \frac{\partial \Phi_{PM}(\alpha)}{\partial \alpha} \right|_{I=\text{const.}}$$

mit

$$\Phi_{PM}(\alpha) = \hat{\Phi}_{PM} \cdot \sin(\alpha)$$

Hierbei sind N die Windungszahl und I die Stromstärke der Spule. Es ergibt sich also ein cosinusförmiges Drehmoment. Benötigt man, wie bei Drosselklappen üblich, nur eine Drehbewegung über 90°, so kann die Drehmoment-Drehwinkel-Charakteristik zwischen -45° und +45° genutzt werden, um ein möglichst hohes Drehmoment zu erzeugen.

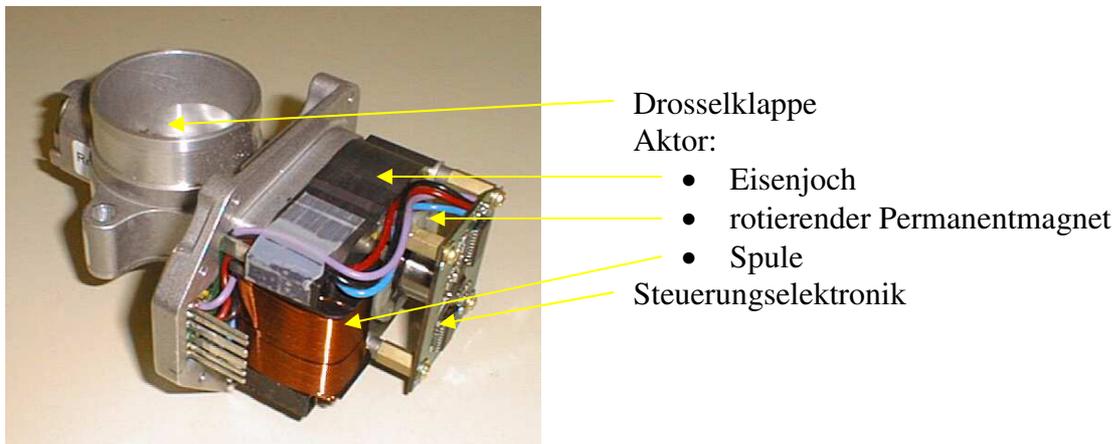
Ein wesentliches Problem dieses Aktors stellt die Streuung dar. Da der Nutzfluss über den Permanentmagneten führt und der Permanentmagnet eine relative Permeabilität in der Nähe von 1 besitzt,¹⁹ bildet sich aufgrund der konzentrierten Spule ein starker Streufluss im Luftraum aus (wie im untenstehenden Bild gezeigt):



Konkrete Ausführungsbeispiele zeigen extrem hohe Streuziffern im Bereich zwischen 40% und 45%.

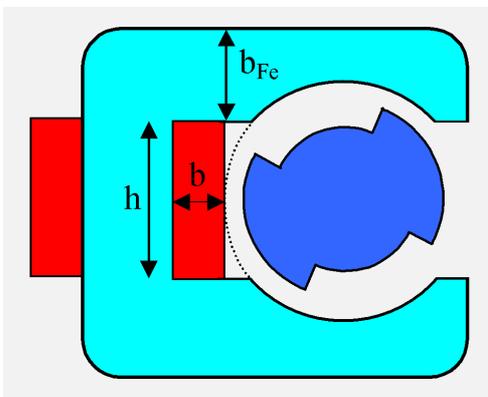
¹⁹ Luft besitzt die relative Permeabilität 1; Permanentmagnete besitzen eine relative Permeabilität im Bereich zwischen 1,05 und 1,10.

Das folgende Bild zeigt den Permanentmagnet-Aktor mit rotierender Bewegung in der Applikation als Drosselklappensteller im Automobilbereich.



2. Aktor mit rotierender Bewegung und beweglichem Eisenanker

Das Problem der großen Streuung beim Aktor mit Permanentmagneten kann vermieden werden, wenn statt des rotierenden Permanentmagneten ein rotierender Eisenanker eingesetzt wird. Die Drehmomenterzeugung basiert dann wieder auf dem Prinzip minimalen magnetischen Widerstandes im magnetischen Kreis. Ein solcher Aktor wird demnach Reluktanz-Aktor genannt. Der prinzipielle Aufbau eines solchen Reluktanz-Aktors ist im folgenden Bild dargestellt.



Wesentliche Unterschiede zum Permanentmagnet-Aktor sind:

- Der Stellbereich beträgt nur maximal 90° .
- Im ungesättigten Betrieb ist das Drehmoment proportional zum Quadrat des Stromes.
- Die Stromrichtung beeinflusst nicht die Drehmomentrichtung.
- Demzufolge muss das rückstellende Drehmoment z.B. mit einer mechanischen Feder realisiert werden.
- Um eine hohe Drehmomentdichte zu erreichen, muss dieser Aktor (analog zur geschalteten Reluktanzmaschine) weit in der Sättigung betrieben werden.

8 Leistungselektronische Stellglieder

8.1 Leistungselektronische Stellglieder für Gleichstrommaschinen

Betrachtet wird eine Wechselspannung

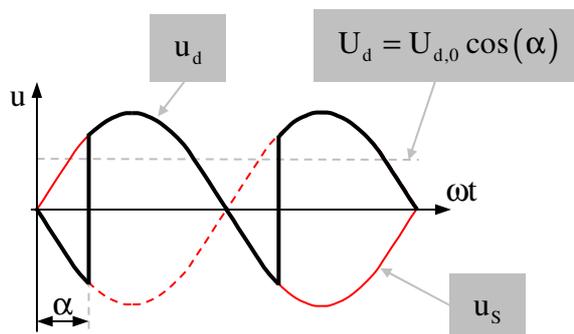
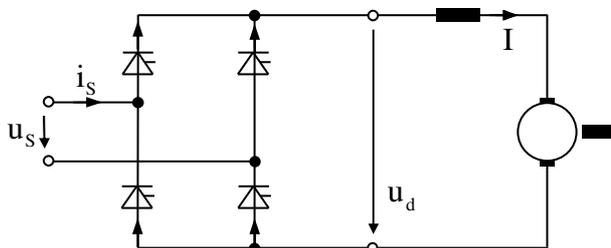
$$u_s = \sqrt{2} U_s \sin(\omega t)$$

Für den Mittelwert der gleichgerichteten Wechselspannung gilt:

$$\begin{aligned} U_{d,0} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sqrt{2} U_s \sin(\omega t) \right| dt = \frac{1}{2\pi} \sqrt{2} U_s \int_0^{2\pi} |\sin(\omega t)| dt \\ &= \frac{1}{2\pi} 2\sqrt{2} U_s \int_0^{\pi} \sin(\omega t) dt = \frac{\sqrt{2}}{\pi} U_s \left[-\cos(\omega t) \right]_{\omega t=0}^{\omega t=\pi} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} U_s [-(-1-1)] = \frac{2}{\pi} \sqrt{2} U_s \\ &\approx 0.9 U_s \end{aligned}$$

Beim Betrieb an einer einsträngigen Wechselspannung unterscheidet man zwei wesentliche Schaltungen:

- Vollgesteuerte Brückenschaltung



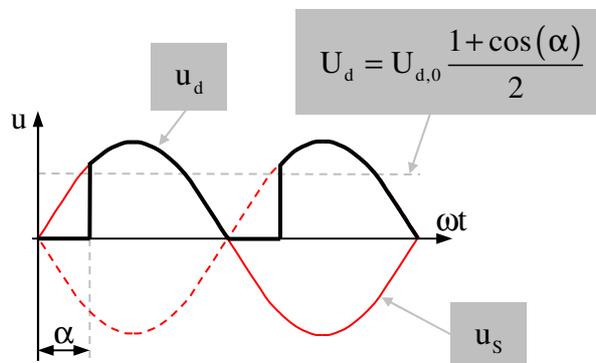
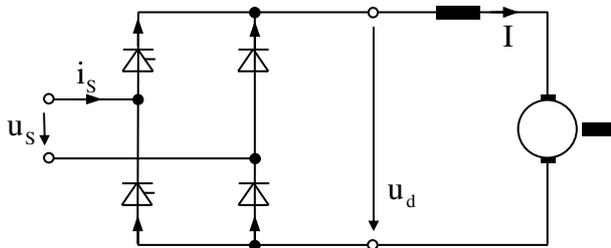
Der Mittelwert der Spannung U_d berechnet sich wie folgt:

$$U_d = U_{d,0} - 2 \frac{1}{\pi} \int_0^\alpha \sqrt{2} U_s \sin(\omega t) dt$$

Hieraus folgt weiter:

$$\begin{aligned} U_d &= \frac{2}{\pi} \sqrt{2} U_s - 2 \frac{1}{\pi} \sqrt{2} U_s [-\cos(\omega t)]_{\omega t=0}^{\omega t=\alpha} \\ &= \frac{2}{\pi} \sqrt{2} U_s - 2 \frac{1}{\pi} \sqrt{2} U_s [-(\cos(\alpha) - 1)] \\ &= \frac{2}{\pi} \sqrt{2} U_s (1 + \cos(\alpha) - 1) = \frac{2}{\pi} \sqrt{2} U_s \cos(\alpha) \\ &= U_{d,0} \cos(\alpha) \end{aligned}$$

- Halbgesteuerte Brückenschaltung



Bei dieser Schaltung ist:

$$U_d = U_{d,0} - \frac{1}{\pi} \int_0^\alpha \sqrt{2} U_s \sin(\omega t) dt$$

Weiter folgt:

$$\begin{aligned}U_d &= \frac{2}{\pi} \sqrt{2} U_s - \frac{1}{\pi} \sqrt{2} U_s \left[-\cos(\omega t) \right]_{\omega t=0}^{\omega t=\alpha} \\&= \frac{2}{\pi} \sqrt{2} U_s - \frac{1}{\pi} \sqrt{2} U_s \left[-(\cos(\alpha) - 1) \right] \\&= \frac{2}{\pi} \sqrt{2} U_s \left(1 + \frac{\cos(\alpha)}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{2}{\pi} \sqrt{2} U_s \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(\alpha)}{2} \right) \\&= U_{d,0} \frac{1 + \cos(\alpha)}{2}\end{aligned}$$

8.2 Leistungselektronische Stellglieder für Asynchronmaschinen

1. Allgemeines

Asynchronmaschinen werden über Umrichter mit Energie versorgt, um eine gleichzeitige Verstellung von Amplitude und Frequenz der speisenden Spannung (bzw. des Stromes) zu erzielen. Damit kann dann ein drehzahl- und/oder drehmoment geregelter Antrieb aufgebaut werden. Gegenüber einer stromrichter gespeisten Gleichstrommaschine bestehen vor allem die folgenden Vorteile:

- höhere Maximaldrehzahl
- kleineres Trägheitsmoment
- besseres Leistungsgewicht
- keine Kommutatorprobleme (Kohlestaub, Bürstenfeuer)
- geringerer Wartungsaufwand („life cycle cost“)
- einfachere explosionsgeschützte Ausführung

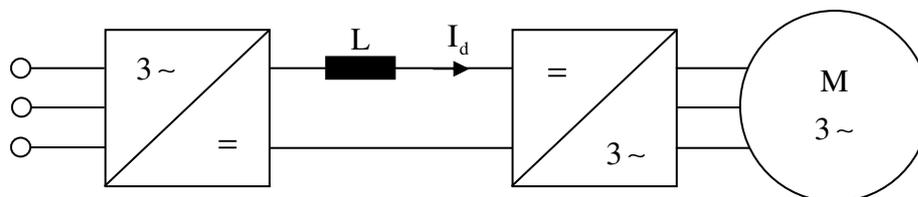
Nachteilig ist allerdings:

- höherer Aufwand im Leistungsteil
- höherer Aufwand für die Regelelektronik

Im Folgenden werden nun die drei wesentlichen Umrichter-Varianten für Asynchronmaschinen erläutert.

2. I-Umrichter

Das prinzipielle Blockschaftbild eines I-Umrichters ist:



Die eingangsseitige Gleichrichterschaltung liefert, wenn sie steuerbar ausgeführt wird (z.B. durch eine Thyristor-Brückenschaltung mit Anschnittsteuerung), einen einstellbaren Gleichstrom I_d . Aufgrund der großen Induktivität L im Zwischenkreis kann dieser Gleichstrom für den nachgeschalteten Wechselrichter als eingepreßt angesehen werden.

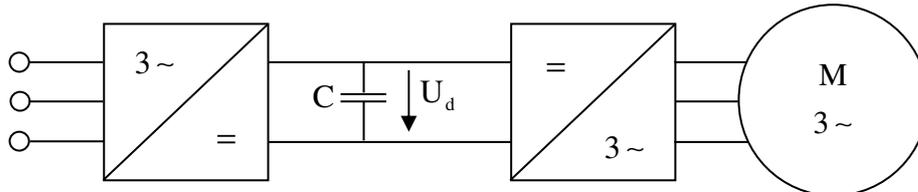
Der Gleichstrom I_d wird nun mit Hilfe des Wechselrichters in 120° Stromblöcke aufgeteilt, die jeweils in einem Wicklungsstrang fließen. Durch zyklisches Aufschalten dieser Stromblöcke an die Motorklemmen entsteht ein sprungförmig umlaufendes Ständerfeld einstellbarer Frequenz.

Durch Spannungsumkehr im Zwischenkreis kann bei gleichbleibender Stromrichtung die Rückspeisung von Bremsenergie ins Netz erfolgen.

Typische Anwendungsfelder sind Einzelantriebe für Pumpen, Lüfter und Zentrifugen mit Leistungen bis in den MW-Bereich. Der typische Frequenzbereich liegt zwischen 5 Hz und 150 Hz, bei einem Drehzahlstellbereich von bis zu 1:20.

3. U-Umrichter

Der prinzipielle Aufbau des U-Umrichters ist ähnlich dem des I-Umrichters, allerdings wird im Zwischenkreis die Induktivität durch einen Kondensator ersetzt.



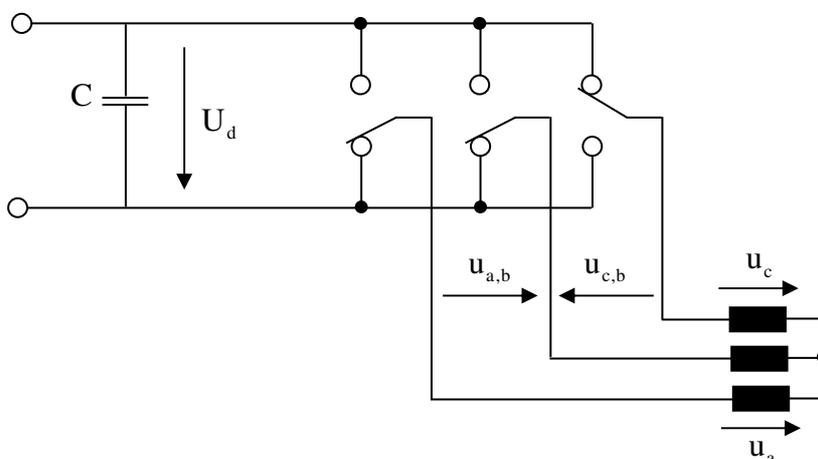
Man erhält dann im Zwischenkreis eine konstante Spannung U_d , die zyklisch an die Maschinenklemmen geschaltet wird.

Der Vorteil gegenüber dem I-Umrichter ist, dass keine hohen Ströme geschaltet werden müssen (die Maschinenimpedanz stellt für den Strom einen Tiefpass dar). Nachteilig ist dagegen, dass die Zwischenkreisspannung nur langsam verändert werden kann; dieser Antrieb eignet sich also nicht für hochdynamische Anwendungen. Häufig werden U-Umrichter transistorisiert aufgebaut für Nennleistungen bis zu einigen 100 kW.

4. Puls-Umrichter

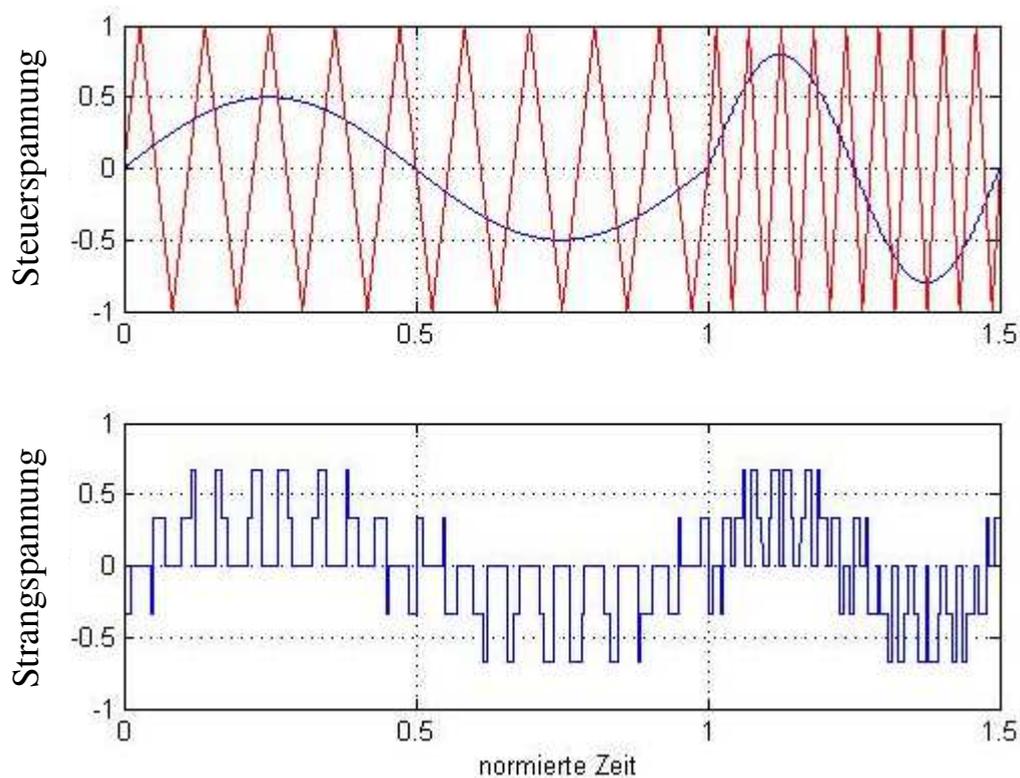
Das Blockschaltbild des Puls-Umrichters ist das gleiche wie des U-Umrichters, allerdings ist die Betriebsweise anders. Der eingangsseitige Gleichrichter ist ungesteuert, so dass die Zwischenkreisspannung nicht beeinflusst werden kann und den maximal möglichen Wert annimmt. Der maschinenseitige Wechselrichter wird nun hochfrequent getaktet (bei kleineren Leistungen oberhalb der Hörgrenze von 20 kHz). Hierdurch lassen sich die Amplitude der Spannungsgrundschwingung und die Frequenz einstellen.

Die Wirkungsweise kann vereinfachend mit dem 3-Schalter-Modell betrachtet werden:



Die Spannung zwischen zwei Motorklemmen (z.B. die Spannung $u_{a,b}$) kann nur die Werte $+U_d$, $-U_d$ oder 0 annehmen. Die Strangspannung (z.B. die Spannung u_a) kann dagegen die Werte $+\frac{1}{3}U_d$, $+\frac{2}{3}U_d$, $-\frac{1}{3}U_d$, $-\frac{2}{3}U_d$ oder 0 annehmen.

Das folgende Bild zeigt beispielhaft die Steuerspannung und die hierdurch eingestellte Strangspannung: Bei jedem Schnittpunkt der Steuerspannung mit der Dreieck-Kurve wird ein Schaltvorgang ausgelöst. Hierdurch ergibt sich für die Strangspannung ein Pulsmuster wie unten gezeigt. Dargestellt im Bild ist eine gleichzeitige Veränderung von Spannungsamplitude und -frequenz unter Beibehaltung der „Pulszahl“. Die Pulszahl ist das Verhältnis von Frequenz der Dreieckfunktion zu Frequenz der gewünschten Spannungsgrundschiwingung (Steuerspannung). Im Bild unten beträgt die Pulszahl $p_z = 9$. Die Zeit ist auf die erste dargestellte Periodendauer normiert.

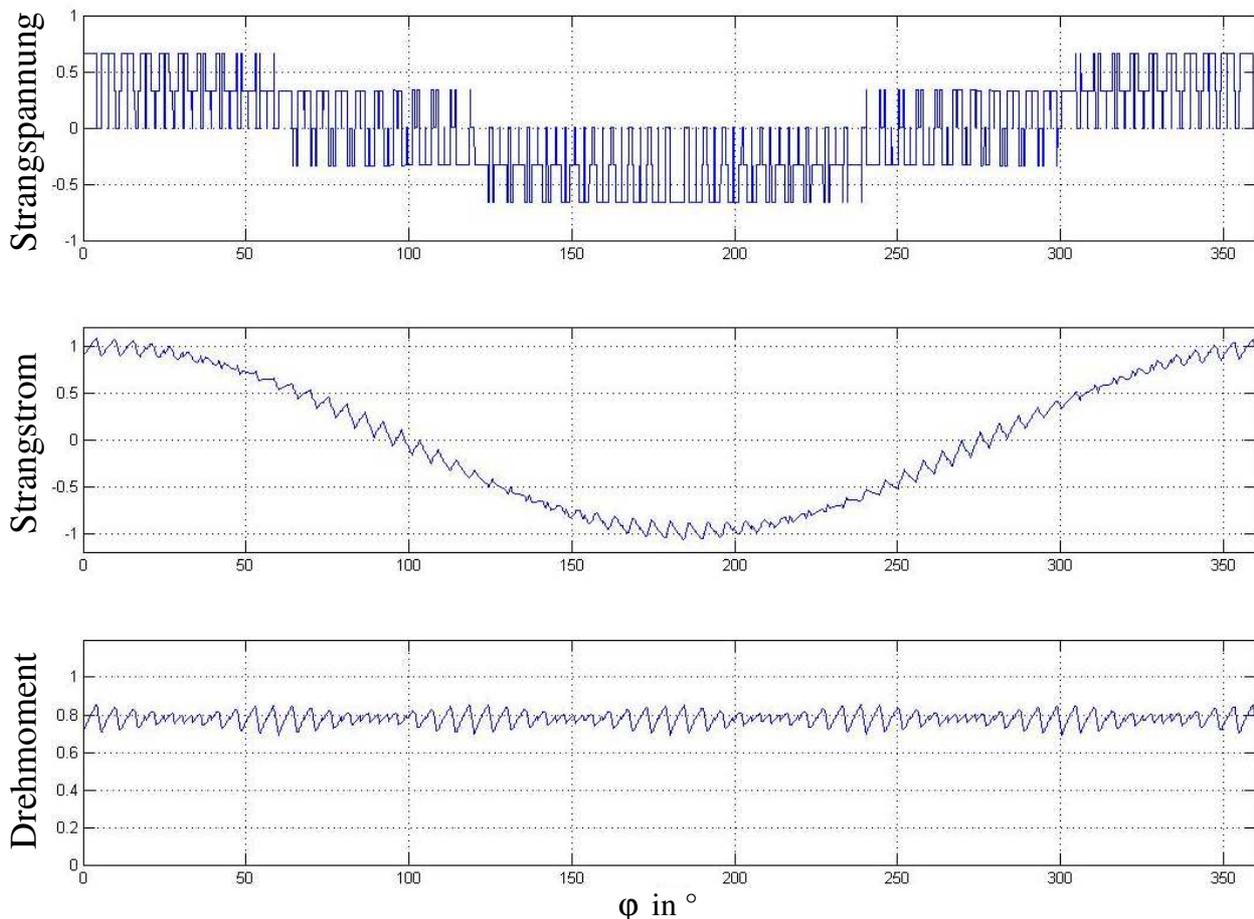


Aufgrund der Tiefpasscharakteristik der Strangimpedanz stellt sich ein weitgehend sinusförmiger Strom ein (je höher die Taktfrequenz der Dreieckfunktion desto besser).

Es wird nicht bei allen Anwendungen die Pulszahl konstant gehalten. Insbesondere bei kleinen Leistungen wird die Taktfrequenz der Dreieckfunktion konstant gehalten (z.B. 20 kHz); die Pulszahl stellt sich dann je nach gewünschter Frequenz der Spannungsgrundschiwingung ein.

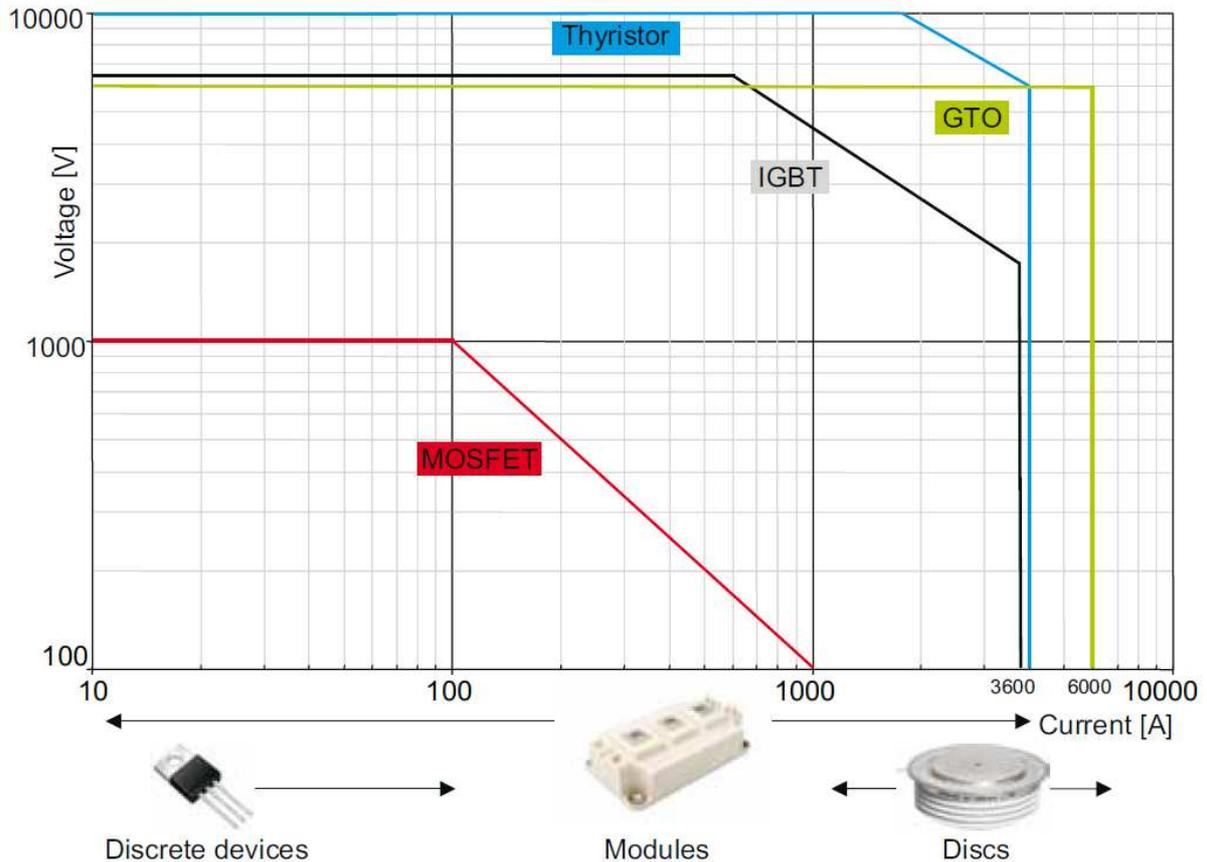
Dieses Verfahren kann beibehalten werden, solange die Taktfrequenz sehr viel größer als die Grundfrequenz ist; erst bei kleinen Pulszahlen kommt es zu deutlichen Abweichungen der Ströme von der gewünschten Sinusform. Dies führt dann zu Momentenpulsationen und deshalb zu Drehzahlschwankungen und Geräuschen. Abhilfe kann durch Erhöhung der Taktfrequenz oder (in Grenzen) durch besonders ausgewählte Pulsmuster erfolgen.

Im folgenden Bild ist beispielhaft dargestellt, wie sich trotz der mit vielen Oberschwingungen behafteten Strangspannung (geschaltete Spannung) ein Strangstrom einstellt, der sehr gut der Sinusform entspricht (d.h. nur einen geringen Oberschwingungsgehalt besitzt). Dies wird durch die Tiefpasscharakteristik der Strangimpedanz erzielt. Das Drehstromsystem mit symmetrischem (und nahezu sinusförmigem) Zeitverlauf erzeugt dann ein zeitlich nahezu konstantes Drehmoment. Die Pulszahl beträgt bei diesem Beispiel $p_z = 63$, d.h. bei einer Grundswingungsfrequenz von $f_1 = 320$ Hz beträgt die Taktfrequenz (Schaltfrequenz) $f_s = p_z \cdot f_1 = 20.16$ kHz. Die Strangspannung ist auf die Zwischenkreisspannung U_d normiert, der Strangstrom und das Drehmoment auf die jeweiligen Nennwerte; die horizontale Achse zeigt eine Periode ($0^\circ \leq \varphi \leq 360^\circ$).

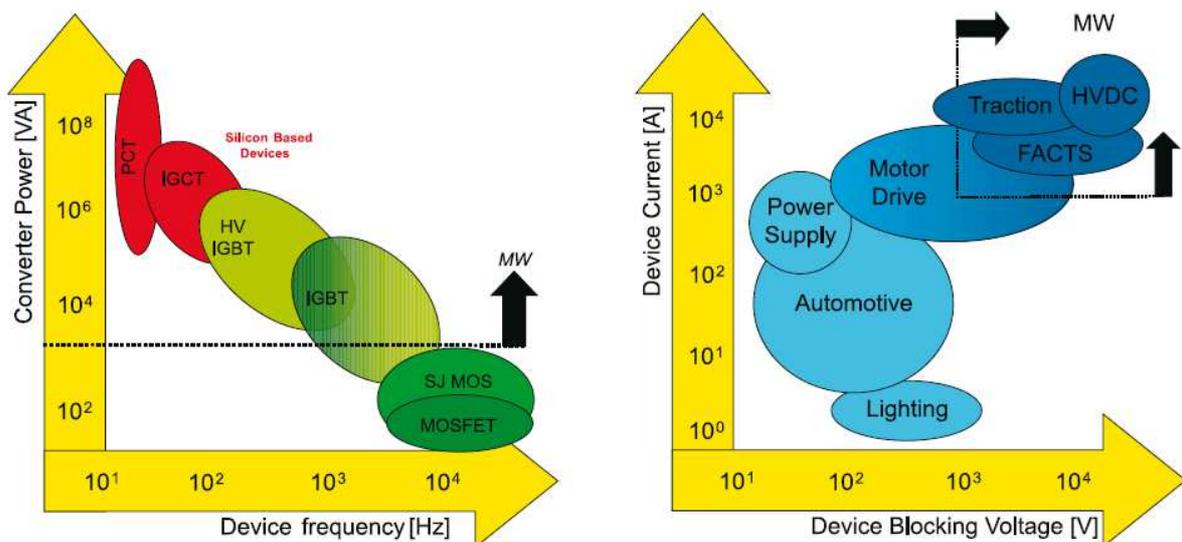


5. Leistungselemente

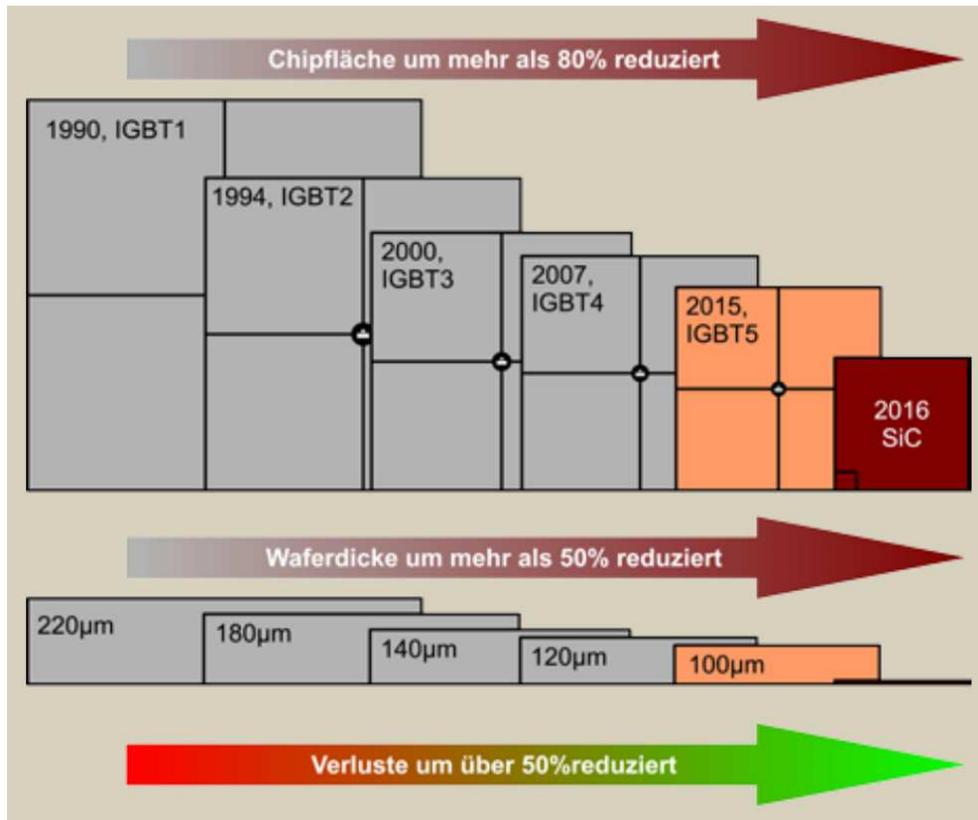
Die Auswahl der Bauelemente geschieht aufgrund der gewünschten Sperrspannung, der erforderlichen Stromtragfähigkeit und der – durch die Schaltverluste begrenzten – Schaltfrequenz. Das folgende Bild zeigt die Strom- und Spannungsgrenzen aktueller steuerbarer Leistungshalbleiter [10]:



Die Schaltfrequenzbereiche und die wesentlichen Einsatzgebiete stellen sich wie folgt dar [10]:



Es ist zu beachten, dass im Zuge des Entwicklungsfortschrittes sowohl die Grenzen der Bauelemente bzgl. Sperrspannung, Stromtragfähigkeit und Schaltfrequenz zu immer höheren Werten verschoben werden, als auch von Zeit zu Zeit neue Bauelemente mit verbesserten Eigenschaften entwickelt werden. Ein Beispiel hierfür ist die Weiterentwicklung von IGBTs und die Neuentwicklung von SiC-MOSFETs, siehe das folgende Bild, bei dem die Chip- Dimensionen (Fläche als relative Größe und Dicke als absolute Größe) pro Ampere Stromtragfähigkeit dargestellt sind [11]:



8.3 Leistungselektronische Stellglieder für Synchronmaschinen

Prinzipiell kann die Synchronmaschine wie die Asynchronmaschine von einem I-Umrichter, einem U-Umrichter oder einem Puls-Umrichter gespeist werden. Wird die Synchronmaschine dann bei konstantem Erregerstrom statorseitig mit einem starren Drehstrom- oder Drehspannungssystem gespeist, erhält man das bekannte Synchronmaschinenverhalten (Fremdsteuerung). Speist man dagegen den Stator über einen Stromrichter und leitet die Steuerimpulse aus der Rotorlage (gemessen oder berechnet) ab, so erhält man das Verhalten einer fremderregten Gleichstrommaschine (Selbststeuerung).

Weit verbreitet sind die folgenden beiden Alternativen:

- Als Stromrichtermotor wird ein Antrieb aus einer Synchronmaschine und Stromzwischenkreis-Umrichter (I-Umrichter) bezeichnet. Die Erregung des Rotors erfolgt elektrisch; der statorseitige Umrichter wird polradlageabhängig gesteuert. Ein solcher Antrieb wird für große Leistungen (einige 100 kW bis ca. 50 MW), z.B. für Pumpen und Lüfter, eingesetzt.
- Ein Servoantrieb ist eine permanentmagneterregte Synchronmaschine, die von einem Puls-Umrichter gespeist wird. Auch hierbei erfolgt die Steuerung des statorseitigen Umrichters polradlageabhängig. Die Speisung kann mit sinusförmigen oder blockförmigen Strömen erfolgen. Bei sinusförmiger Speisung muss die Rotorlage sehr genau bekannt sein (Resolver oder Inkrementalgeber), bei blockförmiger Speisung reichen in der Regel drei einfache Lagegeber (optisch oder magnetisch). Andere Bezeichnungen für einen solchen Antrieb sind auch „bürstenloser Gleichstrommotor“ oder „elektronisch kommutierter Gleichstrommotor“. Bei Speisung mit sinusförmigen Strömen spricht man auch von einem „selbstkommutierten Synchronmotor“. Anwendungsgebiete sind hochdynamische Antriebe für Werkzeugmaschinen und Roboterantriebe. Der Leistungsbereich erstreckt sich bis zu einigen kW.

9 Anhang

9.1 Drehmomentberechnung aus Kreuzprodukt von Flussverkettung und Strom

1. Drehmomentberechnung aus Statorflussverkettung und Statorstrom:

Das Drehmoment in Raumzeigerdarstellung ist nach Kapitel 3.9:

$$T(t) = \frac{3}{2} p \cdot \text{Im} \{ \underline{i}_I(t) \cdot \underline{\psi}_I^*(t) \}$$

Die Raumzeiger von Strom und Flussverkettung können wie folgt geschrieben werden:

$$\underline{i}_I(t) = i_I(t) \cdot e^{-j\varphi(t)}$$

$$\underline{\psi}_I(t) = \psi_I(t) \cdot e^{-j\xi(t)}$$

wobei alle Amplituden und Phasenwinkel beliebige Zeitabhängigkeiten aufweisen können. Dann gilt:

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{3}{2} p \cdot \text{Im} \left\{ i_I(t) \cdot e^{-j\varphi(t)} \cdot \left[\psi_I(t) \cdot e^{-j\xi(t)} \right]^* \right\} \\ &= \frac{3}{2} p \cdot i_I(t) \cdot \psi_I(t) \cdot \text{Im} \left\{ e^{-j[\varphi(t) - \xi(t)]} \right\} \\ &= \frac{3}{2} p \cdot i_I(t) \cdot \psi_I(t) \cdot \sin \{ \xi(t) - \varphi(t) \} \\ &= \frac{3}{2} p \cdot \underline{\psi}_I(t) \times \underline{i}_I(t) \end{aligned}$$

2. Drehmomentberechnung aus Statorstrom und Rotorstrom:

Nach Kapitel 3.9 gilt:

$$T(t) = -\frac{3}{2} p \cdot \text{Re} \{ j \cdot L_{1h} \cdot \underline{i}_I(t) \cdot \underline{i}_{II}^*(t) \}$$

Dann gilt aber auch:

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{3}{2} p \cdot \text{Im} \{ L_{1h} \cdot \underline{i}_I(t) \cdot \underline{i}_{II}^*(t) \} \\ &= \frac{3}{2} p \cdot L_{1h} \cdot \text{Im} \{ \underline{i}_I(t) \cdot \underline{i}_{II}^*(t) \} \end{aligned}$$

Analog zur obigen Berechnung folgt dann:

$$T(t) = \frac{3}{2} p \cdot L_{1h} \cdot \underline{i}_{II}(t) \times \underline{i}_I(t)$$

3. Drehmomentberechnung aus Rotorflussverkettung und Rotorstrom:

Nach Kapitel 3.9 gilt:

$$T(t) = -\frac{3}{2} p \cdot \operatorname{Re} \left\{ j \cdot \underline{\Psi}_{II}(t) \cdot \underline{i}_{II}^*(t) \right\}$$

Analog zur obigen Berechnung gilt dann:

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{3}{2} p \cdot \operatorname{Im} \left\{ \underline{\Psi}_{II}(t) \cdot \underline{i}_{II}^*(t) \right\} \\ &= \frac{3}{2} p \cdot \underline{i}_{II}(t) \times \underline{\Psi}_{II}(t) \end{aligned}$$

4. Drehmomentberechnung aus Statorflussverkettung und Rotorflussverkettung:

Nach Kapitel 4.7 gilt:

$$T = -\frac{3}{2} p \cdot \frac{1-\sigma}{\sigma L_{lh}} \cdot \operatorname{Im} \left\{ \underline{\Psi}_{II} \cdot \underline{\Psi}_I^* \right\}$$

Analog zur obigen Berechnung folgt dann:

$$\begin{aligned} T &= -\frac{3}{2} p \cdot \frac{1-\sigma}{\sigma L_{lh}} \cdot \underline{\Psi}_I \times \underline{\Psi}_{II} \\ &= \frac{3}{2} p \cdot \frac{1-\sigma}{\sigma L_{lh}} \cdot \underline{\Psi}_{II} \times \underline{\Psi}_I \end{aligned}$$

9.2 Drehmomentberechnung aus Strombelag und Flussdichte

In Kapitel 6.3 ist folgende Drehmomentgleichung für den stationären Betrieb der permanentmagneterregten Synchronmaschine mit Polradlagegeber angegeben:

$$T = \frac{3}{2} \frac{p}{\omega} \cdot i_{1,q} \left[u_p - (\omega L_q - \omega L_d) i_{1,d} \right]$$

Für Maschinen mit Oberflächenmagneten ($L_d = L_q$) oder Betrieb ohne Feldschwächung ($i_{1,d} = 0$) und $u_p = \omega \psi_p$ folgt weiter

$$T = \frac{3}{2} p \cdot i_{1,q} \cdot \psi_p$$

Die Flussverkettung des Permanentmagnetfeldes kann aus der Flussdichteamplitude B der Arbeitswelle und der effektiven Windungszahl ($w_{\text{eff}} = w \cdot \xi$) berechnet werden:

$$\begin{aligned} \psi_p &= w_{\text{eff}} B \frac{2\pi r \ell}{2p} \frac{2}{\pi} \\ &= w_{\text{eff}} B \frac{2r\ell}{p} \end{aligned}$$

Die Amplitude des Strombelages der Arbeitswelle kann mit Hilfe der Amplitude der Stromkomponente $i_{1,q}$ berechnet werden (vorausgesetzt hierbei ist $i_{1,d} = 0$; der Faktor 2 in der folgenden Gleichung kommt dadurch zustande, dass jede Windung aus Hin- und Rückleiter besteht):

$$A = \frac{m \cdot 2w_{\text{eff}}}{2\pi r} i_{1,q}$$

Mit der Strangzahl $m = 3$ folgt hieraus:

$$i_{1,q} = A \frac{\pi r}{3w_{\text{eff}}}$$

Insgesamt folgt dann für das Drehmoment:

$$\begin{aligned} T &= \frac{3}{2} p \cdot i_{1,q} \cdot \psi_p \\ &= \frac{3}{2} p \cdot A \frac{\pi r}{3w_{\text{eff}}} \cdot w_{\text{eff}} B \frac{2r\ell}{p} \\ &= \pi r^2 \ell \cdot A \cdot B \end{aligned}$$

Das Drehmoment ist also proportional zum Bohrungsvolumen ($\pi r^2 \ell$), zur Amplitude des Strombelages (A) und zur Amplitude der Flussdichte (B).

9.3 Inversion der Induktivitätsmatrix

Gegeben ist eine Matrixgleichung der Form²⁰

$$\begin{bmatrix} \Psi_{I,d} \\ \Psi_{I,q} \\ \Psi_{II,d} \\ \Psi_{II,q} \end{bmatrix} = \underbrace{L_{1h}}_{[L]} \begin{bmatrix} 1+\sigma_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1+\sigma_1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1+\sigma_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1+\sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{I,d} \\ i_{I,q} \\ i_{II,d} \\ i_{II,q} \end{bmatrix}$$

Gesucht ist die Matrix $[L]^{-1}$. Die Lösung kann auf zwei verschiedene Arten geschehen.

1. Methode:

Die Matrixgleichung wird zunächst in vier algebraische Gleichungen zerlegt. Dann wird die erste algebraische Gleichung nach $i_{I,d}$ aufgelöst und in die anderen eingesetzt. Ähnlich verfährt man nachfolgend auch mit der zweiten und dritten algebraischen Gleichung. Die vierte algebraische Gleichung kann dann nach $i_{II,q}$ aufgelöst und umgestellt werden. Nun setzt man diese Lösung sukzessive wieder in die algebraischen Gleichungen ein und fasst die so erhaltenen Gleichungen in einer Matrix-Gleichung zusammen. Man erhält damit die gesuchte Darstellung der Form

$$\begin{bmatrix} i_{I,d} \\ i_{I,q} \\ i_{II,d} \\ i_{II,q} \end{bmatrix} = [L]^{-1} \begin{bmatrix} \Psi_{I,d} \\ \Psi_{I,q} \\ \Psi_{II,d} \\ \Psi_{II,q} \end{bmatrix}$$

2. Methode:

Laut den Regeln für die Matrizen-Rechnung gilt für die invertierte Matrix $[L]^{-1}$:

$$[L]^{-1} = \frac{1}{\det([L])} [A_{i,j}]^T$$

Hierbei ist $[A_{i,j}]^T$ die transponierte Matrix von $[A_{i,j}]$ (d.h. Zeilen und Spalten werden vertauscht), $[A_{i,j}]$ ist die aus den Adjunkten bestehende Matrix und $\det([L])$ die Determinante von $[L]$. Diese berechnet man wie folgt:

²⁰ In Kapitel 4.3 ist diese Matrixgleichung in Form von vier algebraischen Gleichungen und mit den Bezeichnungen „x“ und „y“ statt „q“ und „d“ dargestellt, in Kapitel 5.3 findet man die Matrixgleichung wie hier angegeben.

$$\begin{aligned}
 \frac{\det([L])}{L_{1h}} &= (1 + \sigma_1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 + \sigma_1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 + \sigma_2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 + \sigma_2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 + \sigma_1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 + \sigma_2 \end{pmatrix} \\
 &= (1 + \sigma_1) \left[(1 + \sigma_1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 + \sigma_2 & 0 \\ 0 & 1 + \sigma_2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 + \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \right] + (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 + \sigma_1 & 1 \\ 1 & 1 + \sigma_2 \end{pmatrix} \\
 &= (1 + \sigma_1) \left[(1 + \sigma_1) [(1 + \sigma_2)(1 + \sigma_2) - 0 \cdot 0] + [0 \cdot 0 - (1 + \sigma_2) \cdot 1] \right] - [(1 + \sigma_1)(1 + \sigma_2) - 1 \cdot 1] \\
 &= (1 + \sigma_1)^2 (1 + \sigma_2)^2 - (1 + \sigma_1)(1 + \sigma_2) - (1 + \sigma_1)(1 + \sigma_2) + 1 \\
 &= ((1 + \sigma_1)(1 + \sigma_2) - 1)^2 \\
 &= \left(\frac{1}{1 - \sigma} - 1 \right)^2 = \left(\frac{\sigma}{1 - \sigma} \right)^2
 \end{aligned}$$

Die Adjunkten der ersten Zeile sind mit $1 - \sigma = \frac{1}{(1 + \sigma_1)(1 + \sigma_2)}$:

$$\begin{aligned}
 A_{1,1} &= (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} 1 + \sigma_1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 + \sigma_2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 + \sigma_2 \end{pmatrix} \\
 &= (1 + \sigma_1) [(1 + \sigma_2)(1 + \sigma_2) - 0 \cdot 0] + 1 [0 \cdot 0 - 1 \cdot (1 + \sigma_2)] \\
 &= (1 + \sigma_2) [(1 + \sigma_1)(1 + \sigma_2) - 1] \\
 &= (1 + \sigma_2) \left[\frac{1}{1 - \sigma} - 1 \right] \\
 &= (1 + \sigma_2) \frac{\sigma}{1 - \sigma}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{1,2} &= (-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 + \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \sigma_2 \end{pmatrix} \\
 &= (-1)^{1+2} [1 \cdot 0 - 0 \cdot (1 + \sigma_2)] = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{1,3} &= (-1)^{1+3} \det \begin{pmatrix} 0 & 1+\sigma_1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1+\sigma_2 \end{pmatrix} \\
 &= (-1)^{1+3} (-1) [(1+\sigma_1)(1+\sigma_2) - 1 \cdot 1] \\
 &= -(1+\sigma_1)(1+\sigma_2) + 1 \\
 &= -\frac{1}{1-\sigma} + 1 = -\frac{\sigma}{1-\sigma} \\
 A_{1,4} &= (-1)^{1+4} \det \begin{pmatrix} 0 & 1+\sigma_1 & 0 \\ 1 & 0 & 1+\sigma_2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= (-1)^{1+4} (-1) [0 \cdot (1+\sigma_1) - 1 \cdot 0] = 0
 \end{aligned}$$

Die Adjunkten der zweiten Zeile sind:

$$\begin{aligned}
 A_{2,1} &= (-1)^{2+1} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1+\sigma_2 & 0 \\ 1 & 0 & 1+\sigma_2 \end{pmatrix} \\
 &= (-1)^{2+1} (-1) [0 \cdot (1+\sigma_2) - 1 \cdot 0] = 0 \\
 A_{2,2} &= (-1)^{2+2} \det \begin{pmatrix} 1+\sigma_1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+\sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\sigma_2 \end{pmatrix} \\
 &= (-1)^{2+2} (1+\sigma_2) [(1+\sigma_1)(1+\sigma_2) - 1 \cdot 1] \\
 &= (1+\sigma_2) \left[\frac{1}{1-\sigma} - 1 \right] \\
 &= (1+\sigma_2) \frac{\sigma}{1-\sigma} \\
 A_{2,3} &= (-1)^{2+3} \det \begin{pmatrix} 1+\sigma_1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1+\sigma_2 \end{pmatrix} \\
 &= (-1)^{2+3} (1+\sigma_1) [0 \cdot (1+\sigma_2) - 1 \cdot 0] = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{2,4} &= (-1)^{2+4} \det \begin{pmatrix} 1+\sigma_1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1+\sigma_2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= (-1)^{2+4} (-1) [(1+\sigma_1) \cdot (1+\sigma_2) - 1 \cdot 1] \\
 &= - \left[\frac{1}{1-\sigma} - 1 \right] \\
 &= - \frac{\sigma}{1-\sigma}
 \end{aligned}$$

Die Adjunkten der dritten Zeile sind:

$$\begin{aligned}
 A_{3,1} &= (-1)^{3+1} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1+\sigma_1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1+\sigma_2 \end{pmatrix} \\
 &= (-1)^{3+1} (-1) [(1+\sigma_1) \cdot (1+\sigma_2) - 1 \cdot 1] \\
 &= - \left[\frac{1}{1-\sigma} - 1 \right] \\
 &= - \frac{\sigma}{1-\sigma}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{3,2} &= (-1)^{3+2} \det \begin{pmatrix} 1+\sigma_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1+\sigma_2 \end{pmatrix} \\
 &= (-1)^{3+2} (-1) [(1+\sigma_1) \cdot 0 - 0 \cdot 1] = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{3,3} &= (-1)^{3+3} \det \begin{pmatrix} 1+\sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\sigma_1 & 1 \\ 0 & 1 & 1+\sigma_2 \end{pmatrix} \\
 &= (-1)^{3+3} (1+\sigma_1) [(1+\sigma_1) \cdot (1+\sigma_2) - 1 \cdot 1] \\
 &= (1+\sigma_1) \left[\frac{1}{1-\sigma} - 1 \right] \\
 &= (1+\sigma_1) \frac{\sigma}{1-\sigma}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{3,4} &= (-1)^{3+4} \det \begin{pmatrix} 1+\sigma_1 & 0 & 1 \\ 0 & 1+\sigma_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{3+4} (-1) [(1+\sigma_1) \cdot 0 - 0 \cdot 1] = 0 \end{aligned}$$

Die Adjunkten der vierten Zeile sind:

$$\begin{aligned} A_{4,1} &= (-1)^{4+1} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1+\sigma_1 & 0 & 1 \\ 0 & 1+\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{4+1} (-1) [(1+\sigma_1) \cdot 0 - 0 \cdot 1] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{4,2} &= (-1)^{4+2} \det \begin{pmatrix} 1+\sigma_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1+\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{4+2} (-1) [(1+\sigma_1) \cdot (1+\sigma_2) - 1 \cdot 1] \\ &= - \left[\frac{1}{1-\sigma} - 1 \right] \\ &= - \frac{\sigma}{1-\sigma} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{4,3} &= (-1)^{4+3} \det \begin{pmatrix} 1+\sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\sigma_1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{4+3} [0 \cdot 1 - (1+\sigma_1) \cdot 0] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{4,4} &= (-1)^{4+4} \det \begin{pmatrix} 1+\sigma_1 & 0 & 1 \\ 0 & 1+\sigma_1 & 0 \\ 1 & 0 & 1+\sigma_2 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{4+4} (1+\sigma_1) [(1+\sigma_1) \cdot (1+\sigma_2) - 1 \cdot 1] \\ &= (1+\sigma_1) \left[\frac{1}{1-\sigma} - 1 \right] \\ &= (1+\sigma_1) \frac{\sigma}{1-\sigma} \end{aligned}$$

Also gilt mit

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{L}]^{-1} &= \frac{1}{\det([\mathbf{L}])} [\mathbf{A}_{i,j}]^T \\
 &= \frac{1}{\det([\mathbf{L}])} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1,1} & \mathbf{A}_{2,1} & \mathbf{A}_{3,1} & \mathbf{A}_{4,1} \\ \mathbf{A}_{1,2} & \mathbf{A}_{2,2} & \mathbf{A}_{3,2} & \mathbf{A}_{4,2} \\ \mathbf{A}_{1,3} & \mathbf{A}_{2,3} & \mathbf{A}_{3,3} & \mathbf{A}_{4,3} \\ \mathbf{A}_{1,4} & \mathbf{A}_{2,4} & \mathbf{A}_{3,4} & \mathbf{A}_{4,4} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

für die Ströme:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{i}_{1,d} \\ \dot{i}_{1,q} \\ \dot{i}_{II,d} \\ \dot{i}_{II,q} \end{bmatrix} &= \frac{1}{\left(\frac{\sigma}{1-\sigma}\right)^2 L_{1h}} \begin{bmatrix} (1+\sigma_2)\frac{\sigma}{1-\sigma} & 0 & -\frac{\sigma}{1-\sigma} & 0 \\ 0 & (1+\sigma_2)\frac{\sigma}{1-\sigma} & 0 & -\frac{\sigma}{1-\sigma} \\ -\frac{\sigma}{1-\sigma} & 0 & (1+\sigma_1)\frac{\sigma}{1-\sigma} & 0 \\ 0 & -\frac{\sigma}{1-\sigma} & 0 & (1+\sigma_1)\frac{\sigma}{1-\sigma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_{I,d} \\ \Psi_{I,q} \\ \Psi_{II,d} \\ \Psi_{II,q} \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1-\sigma}{\sigma L_{1h}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1+\sigma_2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1+\sigma_2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1+\sigma_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1+\sigma_1 \end{bmatrix}}_{[\mathbf{L}]^{-1}} \begin{bmatrix} \Psi_{I,d} \\ \Psi_{I,q} \\ \Psi_{II,d} \\ \Psi_{II,q} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

10 Literatur

Die folgende Literatur wurde zum Teil benutzt, zum Teil führt sie als Ergänzung über die beschriebenen Themenbereiche hinaus.

- [1] **Pfaff, G.:** „Regelung elektrischer Antriebe I und II“, Oldenbourg Verlag, München, 1994
- [2] **Kleinrath, H.:** „Stromrichter gespeiste Drehfeldmaschinen“, Springer Verlag, Wien, 1980
- [3] **Sattler, P. K.:** „Elektrische Maschinen I“, Vorlesungsmanuskript, RWTH Aachen, 1982
- [4] **Henneberger, G.:** „Elektrische Maschinen“, Vorlesungsmanuskript, RWTH Aachen, 1990
- [5] **Bausch, H.:** „Elektrische Maschinen“, Vorlesungsmanuskript, Universität der Bundeswehr München
- [6] **Bronstein, I. N.; Semendjajew, K. A.:** „Taschenbuch der Mathematik“, Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt (Main), 1981
- [7] **Dajaku, G.:** „Electromagnetic and Thermal Modeling of Highly Utilized PM Machines“, Dissertation, Lehrstuhl für Elektrische Antriebstechnik und Aktorik, Universität der Bundeswehr München, 2006
- [8] **Buja, G. S.; Kazmierkowski, P.:** „Direct Torque Control of PWM Inverter-Fed AC Motors – A Survey“, IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol. 51, No. 4, August 2004
- [9] **Janocha, H.:** „Aktoren“, Springer-Verlag, Berlin, 1992
- [10] **Wintrich, A.; Nicolai, U.; Tursky, W.; Reimann, T.:** „Applikationshandbuch Leistungshalbleiter“, Herausgeber SEMIKRON International GmbH, 2015
- [11] **Schulz, M.:** „Vom Selen zum Siliziumkarbid: Historie der Leistungselektronik“, https://www.infineon.com/dgdl/Infineon-Vom+Selen+zum+Siliziumkarbid+-+Historie+der+Leistungselektronik-ART-v01_00-DE.pdf?fileId=5546d46257fa4a9c015805d3b905560e